Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **18** (2006), 241–264

La structure différentielle de l'anneau des formes quasi-modulaires pour $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$

par Federico PELLARIN

Résumé. Dans ce texte, nous déterminons explicitement les idéaux premiers différentiellement stables dans l'anneau des formes quasi-modulaires pour $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$. Les techniques introduites permettent de préciser des résultats de Nesterenko dans [5] et [6].

Abstract. In this text we explicitly compute all the prime ideals which are differentially stable in the ring of quasi-modular forms for $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$. The techniques we introduce allow to refine some results by Nesterenko in [5] and [6].

1. Introduction.

Soient $E_2(z), E_4(z), E_6(z)$ les développements en séries de Fourier complexes des séries d'Eisenstein classiques de poids $2, 4, 6$, convergentes pour $|z| < 1$:

$$\begin{aligned} E_2(z) &= 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) z^n, \\ E_4(z) &= 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) z^n, \\ E_6(z) &= 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) z^n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nesterenko a démontré que pour tout nombre complexe q tel que $0 < |q| < 1$, le corps $\mathbb{Q}(q, E_2(q), E_4(q), E_6(q))$ a un degré de transcendance au moins 3 (voir [4], [5] et [6]). L'ingrédient clef de sa preuve est l'estimation de multiplicité qui suit (théorème 2.3 p. 33 de [5]).

Théorème 1.1 (Nesterenko). *Il existe une constante $c_1 > 0$ avec la propriété suivante. Soit M un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$, de degré total au plus N. Alors, la fonction $F(z) = M(z, E_2(z), E_4(z), E_6(z))$ s'annule en $z = 0$ avec une multiplicité au plus $c_1 N^4$.*

Manuscrit reçu le 19 mai 2004.

Le théorème 1.1 s'obtient en utilisant en profondeur certaines propriétés différentielles de l'anneau

$$\mathcal{R}_1 = \mathbb{C}[z, E_2(z), E_4(z), E_6(z)],$$

d'intérêt indépendant : décrivons ci-après ces propriétés. On voit facilement que $\mathcal{R}_1$, muni de la dérivation $z(d/dz)$, est un anneau différentiel. On a d'une part $z(d/dz)z = z$, et d'autre part, les séries $E_2(z), E_4(z), E_6(z)$ satisfont au système différentiel non linéaire de Ramanujan (cf. théorème 5.3 de [2]) :

$$\begin{aligned} z\frac{d}{dz}E_2 &= \frac{1}{12}(E_2^2 - E_4), \\ z\frac{d}{dz}E_4 &= \frac{1}{3}(E_2E_4 - E_6), \\ z\frac{d}{dz}E_6 &= \frac{1}{2}(E_2E_6 - E_4^2). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Un idéal $\mathcal{P}$ d'un anneau différentiel $(\mathcal{A}, D)$ est dit *D-stable* si pour tout $x \in \mathcal{P}$ on a $Dx \in \mathcal{P}$. Nesterenko démontre le résultat qui suit (cf. proposition 5.1 p. 161 de [6]), indispensable dans la preuve du théorème 1.1.

Proposition 1.1. *Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier non nul et $z\frac{d}{dz}$-stable de $\mathcal{R}_1$, tel que pour tout $F \in \mathcal{P}$ on ait $F(0) = 0$. Alors $z\Delta \in \mathcal{P}$, où $\Delta = E_4^3 - E_6^2$.*

Nesterenko a déjà démontré des résultats de même nature, tout à fait généraux, mais valides seulement en présence d'un système différentiel linéaire (cf. théorème 3 de [3]), auquel cas on peut établir une correspondance entre orbites de certaines actions du groupe de Galois différentiel, et idéaux différentiellement stables.

Le système différentiel (1.2) n'étant pas linéaire, la théorie de [3] ne s'applique pas ; Nesterenko donne alors une démonstration *ad hoc* de la proposition 1.1 qui est élémentaire, mais difficile à adapter à d'autres situations intéressantes du point de vue arithmétique.

La méthode de Nesterenko est, en citant l'auteur (p. 162 de [6]) « une généralisation d'une idée utilisée par Siegel visant à classifier les solutions algébriques des équations différentielles de Riccati » (cf. paragraphe 1 pp. 214-222 de [11], voir aussi le lemme 3 p. 211 of [10]).

La proposition 1.1 suscite la question naturelle de connaître et de caractériser complètement tous les idéaux premiers $z(d/dz)$-stables de $\mathcal{R} := \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$, mais la méthode de Nesterenko que nous avons mentionné ci-dessus ne semble pas s'y prêter.

Dans ce texte nous donnons une réponse complète à cette question tout en introduisant une approche nouvelle, essentiellement algébrique.

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{Q}$, soient P, Q, R des indéterminées indépendantes sur $\mathbb{K}$, notons $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}[P, Q, R]$. Considérons l'anneau différentiel $(\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}, D)$, où la dérivation D est déterminée par les relations

$$\begin{aligned} DP &= \frac{1}{12}(P^2 - Q), \\ DQ &= \frac{1}{3}(PQ - R), \\ DR &= \frac{1}{2}(PR - Q^2), \end{aligned} \tag{1.3}$$

et par l'égalité $D(\mathbb{K}) = (0)$, de telle sorte que l'anneau $\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$ soit différentiellement isomorphe à $\mathcal{R}$.

Notons $\mathcal{P}_0 := (P^2 - Q, P^3 - R)$ et $\mathcal{P}_\infty := (Q, R)$. Ce sont deux idéaux premiers de codimension 2.

Pour $d \neq 0$, soit $\mathcal{P}_d$ l'idéal engendré par Θ et les quatre polynômes :

$$\begin{aligned} \Theta &= Q^3 - R^2, \\ F_d &= P^2Q + Q^2 - 2PR + dR, \\ G_d &= 2PQ^2 - P^2R - QR - dQ^2, \\ H_d &= P^4 - 2P^2Q + Q^2 + 4dPQ - d^2Q. \end{aligned}$$

Pour tout $d \neq 0$ l'idéal $\mathcal{P}_d$ est premier (cf. lemme 4.2).

Nous avons les diagrammes d'inclusions suivants, paramétrés par $c \in \mathbb{K}$ et $d \in \mathbb{K}^\times$:

$$\begin{array}{ccccc} (P - c, Q - c^2, R - c^3) & \leftarrow & \mathcal{P}_0 & & \\ & & & \nwarrow & \\ & & \mathcal{P}_d & \leftarrow & (\Theta) \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ (P, Q, R) & \leftarrow & \mathcal{P}_\infty & & \end{array}$$

Dans ce texte, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 1.2. *Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier non nul D-stable de $(\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}, D)$; on a les faits suivants.*

- *Si $\mathcal{P}$ a codimension 3 alors il existe un élément $c \in \mathbb{K}$ tel que $\mathcal{P} = (P - c, Q - c^2, R - c^3)$.*
- *Si $\mathcal{P}$ a codimension 2 alors il existe $d \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ tel que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_d$.*
- *Si $\mathcal{P}$ est principal, alors $\mathcal{P} = (\Theta)$.*

Ce théorème permet de classifier tous les idéaux radiciels D-stables de $(\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}, D)$ car ils sont tous intersection d'idéaux premiers D-stables (voir le théorème 1 de [9]).

L'anneau

$$\mathcal{R}_2 := \mathcal{R}_1[\log(z)] = \mathbb{C}[z, \log(z), E_2(z), E_4(z), E_6(z)],$$

muni de la dérivation $z(d/dz)$ (et pour un choix quelconque d'une détermination de log), est un anneau différentiel, car

$$z\frac{d}{dz}\log(z) = 1$$

sur un ouvert de $\mathbb{C}$; de plus les fonctions $\log(z), z, P(z), Q(z), R(z)$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$. On a le résultat suivant :

Théorème 1.3. *Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier non nul et $z\frac{d}{dz}$-stable de $\mathcal{R}_2$. Alors $z\Delta \in \mathcal{P}$.*

On en déduit un raffinement de la proposition 1.1.

Théorème 1.4. *Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier non nul et $z\frac{d}{dz}$-stable de $\mathcal{R}_1$. Alors $z\Delta \in \mathcal{P}$.*

Voici le plan de cet article. Dans les paragraphes 2, 3 et 4 nous démontrons le théorème 1.2. La structure de la preuve est la suivante. On commence par démontrer que tous les idéaux premiers du théorème sont D-stables ; ceci ne pose aucun problème, mais nous donnerons plusieurs manières de le faire, tout en discutant du lien entre nos résultats et la théorie des formes quasi-modulaires (paragraphe 2).

Une application des propriétés des *crochets de Rankin* permet de démontrer que tout idéal premier non nul D-stable $\mathcal{P}$ de $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ contient Θ (paragraphe 3) ; cette propriété suffit déjà pour démontrer les théorèmes 1.3 et 1.4.

Considérons ensuite le quotient $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}/(\Theta)$; c'est un anneau différentiel car $D\Theta = P\Theta$ d'après (1.3). Nous trouvons que l'anneau quotient $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}/(\Theta)$ est isomorphe à un anneau de fonctions algébriques sur un corps de fonctions rationnelles $\mathbb{K}(U)$. Ceci permet de décrire avec précision l'image de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}/(\Theta)$, et le théorème 1.2 s'obtient ensuite en « relevant »les informations obtenues. Pour pouvoir utiliser facilement ces propriétés, nous allons travailler d'abord dans un sur-anneau différentiel auxiliaire $\mathcal{A} \supset \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ (étude développée au paragraphe 3). La démonstration des théorèmes 1.3 et 1.4 sera traitée dans le paragraphe 5.

Ces deux derniers théorèmes peuvent être utilisés pour démontrer une généralisation du théorème 1.1. On peut démontrer qu'il existe une constante $c_2 > 0$ avec la propriété suivante. Soit log la détermination principale du logarithme. Pour tout polynôme $F \in \mathcal{R}_2$ non nul, de degré au plus N en $\log(z), z, E_2(z), E_4(z), E_6(z)$, et pour tout $\xi \in B \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, où B désigne la boule ouverte complexe de centre 0 et rayon 1, l'ordre d'annulation de F en ξ satisfait :

$$\mathrm{ord}_\xi(F) \leq c_2 N^5.$$

Si de plus $F \in \mathcal{R}_1$, alors pour tout $\xi \in B$, l'ordre d'annulation de F en ξ satisfait :

$$\mathrm{ord}_\xi(F) \leq c_2 N^4.$$

Ce sont exactement la suppression de l'hypothèse d'annullation dans la proposition 1.1, et le fait que Δ ne s'annule pas dans $B \setminus \{0\}$, qui impliquent les majorations uniformes de cette estimation de multiplicité.

On peut étendre le théorème 1.1 au cadre de fonctions liées à des groupes fuchsiens triangulaires co-compacts ; ce sujet est développé dans [7].

2. Premières remarques, lien avec les formes quasi-modulaires.

Pour $d \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, $c \in \mathbb{K}$, les idéaux $(\Theta), \mathcal{P}_d, (P - c, Q - c^2, R - c^3)$ sont D-stables. Ceci suit des formules suivantes, que l'on vérifie en utilisant (1.3) :

$$D\Theta = P\Theta, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} D(P^2 - Q) &= \frac{P}{2}(P^2 - Q) - \frac{1}{3}(P^3 - R), \\ D(P^3 - R) &= -\frac{1}{4}(P^2 + 2Q)(P^2 - Q) + \frac{P}{2}(P^3 - R), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} DQ &= \frac{1}{3}PQ - \frac{1}{3}R, \\ DR &= -\frac{1}{2}Q^2 + \frac{1}{2}PR, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} DF_d &= \frac{P}{2}F_d + \frac{1}{2}G_d, \\ DG_d &= -\frac{1}{2}\Theta + \frac{2}{3}QF_d + \frac{2}{3}PG_d \\ DH_d &= -\frac{1}{3}(2P - d)F_d + \frac{2}{3}G_d + \frac{P}{3}H_d, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(P - c) &= \frac{1}{12}(P + c)(P - c) - \frac{1}{12}(Q - c^2), \\ D(Q - c^2) &= \frac{c^2}{3}(P - c) + \frac{P}{3}(Q - c^2) - \frac{1}{3}(R - c^3), \\ D(R - c^3) &= \frac{1}{2}((P + c)Q - c^2P)(P - c) \\ &\quad - \frac{1}{2}(Q + P^2)(Q - c^2) + \frac{P}{2}(R - c^2). \end{aligned}$$

On peut vérifier que les idéaux $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_\infty$ sont D-stables sans utiliser les groupes de formules (2.2) et (2.3). L'idéal $\mathcal{P}_0$ est l'idéal engendré par l'image de l'application $D : \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} \to \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$; il est donc D-stable. En ce qui concerne $\mathcal{P}_\infty$, on voit facilement que c'est l'idéal engendré par les polynômes nuls sur le lieu singulier de la surface affine d'équation $\Theta = 0$. En utilisant (2.1) et en combinant les théorèmes 2, 5 de [9], on vérifie que $\mathcal{P}_\infty$ est D-stable.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il y a une autre manière, plus directe, de vérifier que $(\Theta), \mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_\infty$ sont D-stables, qui utilise la notion de *forme quasi-modulaire* sans utiliser (1.3) (voir la définition 113 p. 78 de [8]).

Les formes quasi-modulaires ont un *poids*, qui est un entier positif ou nul, et une *profondeur*, qui est un entier positif ou nul, inférieur ou égal à la moitié du poids. Toute forme modulaire de poids k est aussi une forme quasi-modulaire de poids k et profondeur 0 (remarques 119 p. 79 de loc. cit.). On a que $E_2(e^{2\pi \mathrm{i}\tau})$ est une forme quasi-modulaire non modulaire de poids 2 et profondeur ≤ 1, et que $E_4(e^{2\pi \mathrm{i}\tau}), E_6(e^{2\pi \mathrm{i}\tau})$ sont des formes modulaires de poids $4, 6$.

L'anneau des formes quasi-modulaires pour $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$, noté $\widetilde{M_*(1)}$ dans [8], est un anneau différentiel pour la dérivation $(2\pi \mathrm{i})^{-1} d/d\tau$, qui est isomorphe à l'anneau différentiel $(\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6], D)$ ([1] et proposition 124 p. 85 de [8]), ce qui donne un isomorphisme différentiel $\iota : \mathcal{Y}_{\mathbb{C}} \to \widetilde{M_*(1)}$.

Ainsi, $D\Delta$ est un polynôme en E_2, E_4, E_6. Comme $\Delta(e^{2\pi \mathrm{i}\tau})$ est modulaire (et nulle à l'infini) de poids 12 sans zéros dans $\mathcal{H}$, $(D\Delta/\Delta)(e^{2\pi \mathrm{i}\tau})$ doit être, d'après la proposition 124 de [8], une forme quasi-modulaire non nulle de poids 2 et profondeur ≤ 1 (donc proportionnelle à $E_2(e^{2\pi \mathrm{i}\tau})$), ce qui implique $D(\Theta) \subset (\Theta)$, puisque $\iota(\Theta) = \Delta$.

On vérifie facilement que $\iota(\mathcal{P}_0)$ est aussi égal à l'idéal engendré par les formes quasi-modulaires nulles à l'infini, ce qui implique que $D(\mathcal{P}_0) \subset \mathcal{P}_0$.

D'autre part, $\iota(\mathcal{P}_\infty)$ est égal à l'idéal engendré par les formes quasi-modulaires f de poids k et profondeur $\leq l$ avec $k > 2l$, qui est $(2\pi \mathrm{i})^{-1} d/d\tau$-stable grâce au lemme 118 p. 81 de [8], ce qui implique que $D(\mathcal{P}_\infty) \subset \mathcal{P}_\infty$.

Le théorème 1.2 détermine la structure différentielle complexe de $\widetilde{M_*(1)}$. À travers la classification de tous les idéaux premiers D-stables de cet anneau, nous caractérisons en fait (par passage au quotient) tous les anneaux différentiels intègres $(\mathcal{A}, D')$ tels qu'il existe un morphisme différentiel surjectif :

$$(\widetilde{M_*(1)}, (2\pi \mathrm{i})^{-1} d/d\tau) \to (\mathcal{A}, D').$$

3. Etude différentielle d'un anneau auxiliaire.

Il convient de travailler dans un anneau auxiliaire $\mathcal{A}$ un peu plus grand que $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$.

D'après (1.3) on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
D\left(\frac{R}{Q}\right) &= -\frac{Q}{2} + \frac{PR}{6Q} + \frac{R^2}{3Q^2} \\
&= \frac{1}{6}\frac{R}{Q}\left(P - \frac{R}{Q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{Q^2} - Q\right), \\
DQ &= \frac{1}{3}(PQ - R) \\
&= \frac{1}{3}Q\left(P - \frac{R}{Q}\right), \\
D\left(P - \frac{R}{Q}\right) &= \frac{P^2}{12} + \frac{5Q}{12} - \frac{PR}{6Q} - \frac{R^2}{3Q^2} \\
&= \frac{1}{12}\left(P - \frac{R}{Q}\right)^2 - \frac{5}{12}\left(\frac{R^2}{Q^2} - Q\right).
\end{aligned}$$

En d'autres termes, si l'on pose :

$$X_1 = \frac{R}{Q}, \quad X_2 = Q, \quad X_3 = P - \frac{R}{Q},$$

alors :

$$\begin{aligned}
DX_1 &= \frac{1}{6}X_1X_3 + \frac{1}{2}(X_1^2 - X_2), \\
DX_2 &= \frac{1}{3}X_2X_3, \\
DX_3 &= \frac{1}{12}X_3^2 - \frac{5}{12}(X_1^2 - X_2).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Notons :

$$\mathcal{A} = \mathbb{K}[X_1, X_2, X_3].$$

D'après les formules (3.1) c'est un anneau différentiel pour la dérivation D. Cet anneau contient $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$: en effet, $R = Q(R/Q), P = P - (R/Q) + (R/Q) \in \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ d'où $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}} \subset \mathcal{A}$.

L'anneau $(\mathcal{A}, D)$ possède deux idéaux principaux premiers non nuls D-stables car :

$$\begin{aligned}
DX_2 &= \frac{1}{3}X_2X_3, \\
D(X_1^2 - X_2) &= \frac{1}{3}(3X_1 + X_3)(X_1^2 - X_2).
\end{aligned}$$

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier D-stable non nul de $\mathcal{A}$ ne contenant pas X_2. Alors $\mathcal{P}$ est l'un des idéaux premiers suivants :*

$$(X_1^2 - X_2)$$

$$(X_1 - c, X_2 - c^2, X_3)$$

$$(X_3, X_1^2 - X_2)$$

$$(X_1^2 - X_2, X_3^2 + dX_1),$$

pour $c, d \in \mathbb{K}^\times$.

Le lecteur peut vérifier que tous ces idéaux sont premiers et D-stables en utilisant (3.1). La proposition 3.1 s'obtient en combinant les propositions 3.2, 3.3 et 3.4 qui suivent, et qui classifient les idéaux premiers D-stables de codimension respectivement $1, 2, 3$.

L'anneau $\mathcal{A}$ est gradué en assignant à X_1, X_3 le poids 2 et à X_2 le poids 4. Un élément M de $\mathcal{A}$ est dit *isobare de poids* $p(M) \in 2\mathbb{N}$ s'il est homogène de degré $p(M)$ par rapport à cette graduation. Cette graduation provient des poids des formes quasi-modulaires ; les poids de E_2, E_4, E_6 sont respectivement $2, 4, 6$. Si on assigne à P, Q, R les poids $2, 4, 6$, alors $p(X_1) = p(R) - p(Q) = 2, p(X_2) = p(Q) = 4$ et $p(X_3) = 2$.

Un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ est dit *isobare* s'il admet un système de générateurs isobares (de poids non nécessairement égaux). La dérivation D est *isobare* (ou p-homogène) de poids 2 ; si $X \in \mathcal{A}$ est un élément isobare de poids $p(X)$, alors DX est isobare de poids $p(X) + 2$.

Sur $\mathcal{A}$ il existe une autre graduation q, qui est déterminée en assignant à X_1, X_2, X_3 les degrés $q(X_1) = 2, q(X_2) = 4, q(X_3) = 1$; la dérivation D n'est pas q-isobare mais on vérifie, en utilisant (3.1), que pour tout élément q-homogène $X \in \mathcal{A}$, il existe un unique élément $Y \in \mathbb{C}[X_1, X_3]$ qui est q-homogène tel que $q(Y) = q(X) + 1$, et tel que $Y \equiv DX \mod (X_1^2 - X_2)$.

On voit déjà, dans l'énoncé de la proposition 3.1, que si $\mathcal{P}$ est un idéal premier D-stable de $\mathcal{A}$ de codimension 2, alors ou bien il est engendré par deux éléments p-homogènes non nuls, ou bien il est engendré par un élément p-homogène non nul et un élément q-homogène non nul, d'où l'intérêt d'introduire la graduation q.

3.1. Idéaux principaux D-stables. Ici nous démontrons la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Soit H un polynôme non constant, irréductible de $\mathcal{A} = \mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]$ qui ne soit pas de la forme $c(X_1^2 - X_2)$ avec $c \in \mathbb{K}^\times$ et tel que $DH = VH$ avec $V \in \mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]$. Alors $V = (1/3)X_3$ et $(H) = (X_2)$.*

Cette proposition correspond au lemme 5.2 de [6] (voir aussi le lemme 4.1 de [4]), dont la démonstration repose sur l'existence des développements en série de Fourier des formes quasi-modulaires.

Nous proposons, pour la proposition 3.2, une démonstration qui ne fait intervenir que les relations (3.1). Avant de la démontrer, nous introduisons un anneau différentiel quotient de $\mathcal{A}$ (de type « parabolique ») muni de deux graduations compatibles avec la structure différentielle, et nous démontrons un lemme qui caractérise le corps des constantes de son corps différentiel de fractions et ses idéaux principaux différentiellement stables.

On considère l'anneau $\mathcal{A}/(X_1^2 - X_2)$ et la projection

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/(X_1^2 - X_2).$$

Posons

$$Y_1 := \pi(X_1), \quad Y_3 := \pi(X_3),$$

de telle sorte que $Y_1^2 = \pi(X_2)$; alors

$$\mathcal{A}/(X_1^2 - X_2) = \mathbb{K}[Y_1, Y_3].$$

Puisque $(X_1^2 - X_2)$ est D-stable, l'anneau $\mathbb{K}[Y_1, Y_3]$ est un anneau différentiel, avec la dérivation induite $\delta = D + (X_1^2 - X_2)$. De plus, $\delta \circ \pi = \pi \circ D$ et on a les relations :

$$\begin{aligned} \delta Y_1 &= \frac{1}{6} Y_1 Y_3 \\ \delta Y_3 &= \frac{1}{12} Y_3^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sur $\mathbb{K}[Y_1, Y_3]$ nous considérons deux graduations. La première graduation $\mathcal{F}$ est induite par la graduation p sur $\mathcal{A}$, de telle sorte que les degrés de Y_1 et Y_3 soient égaux à 2. La deuxième graduation $\mathcal{G}$ est induite par la graduation q en assignant à Y_1 le degré 2 et à Y_3 le degré 1 (noter que $X_1^2 - X_2$ est q-homogène de degré 4).

Les éléments non nuls de $\mathbb{K}[Y_1, Y_3]$ de $\mathcal{F}$-degré 0, tout aussi comme les éléments non nuls de $\mathcal{G}$-degré 0, sont tous et seulement les éléments de $\mathbb{K}^\times$.

La dérivation δ a la propriété d'envoyer un élément $\mathcal{F}$-homogène de degré m sur un élément $\mathcal{F}$-homogène de degré $m+2$, et d'envoyer un élément $\mathcal{G}$-homogène de degré n sur un élément $\mathcal{G}$-homogène de degré $n+1$; en d'autres termes δ est à la fois $\mathcal{F}$-homogène de degré 2 et $\mathcal{G}$-homogène de degré 1.

Lemme 3.1. *Le corps des fractions différentiel* $(\mathbb{K}(Y_1, Y_3), \delta)$ ([1]) *a pour sous-corps des constantes C le corps $\mathbb{K}(Y_1/Y_3^2)$. On a $C \cap \mathbb{K}[Y_1, Y_3] = \mathbb{K}$. Soit $L \in \mathbb{K}[Y_1, Y_3] \setminus \mathbb{K}$: on a que L divise δL dans* $\mathbb{K}[Y_1, Y_3]$ *si et seulement*

[1] On considère l'extension naturelle de δ fournie par la règle de dérivation des fractions : $\delta(a/b) = (b(\delta a) - a(\delta b))/b^2$.

si L est un polynôme de $\mathbb{K}[Y_1, Y_3]$ homogène par rapport à $\mathcal{G}$. Dans ce cas, $\delta L/L = \mu Y_3$ avec $\mu \in (1/12)\mathbb{Z}$.

Démonstration. Noter que $\delta(Y_1/Y_3^2) = 0$, donc $\delta F = 0$ pour tout $F \in C$ d'après (3.2). Posons $U = Y_1/Y_3^2, V = Y_3$: on a $\mathbb{K}(Y_1, Y_3) = \mathbb{K}(U, V)$ et $\delta U = 0, \delta V = (1/12)V^2$. Soit $R \in \mathbb{K}(U, V)$; on a

$$\begin{aligned}\delta R &= \frac{\partial R}{\partial U}(\delta U) + \frac{\partial R}{\partial V}(\delta V)\\ &= \frac{\partial R}{\partial V}\frac{V^2}{12}.\end{aligned}$$

Donc $\delta R = 0$ si et seulement si $\partial R/\partial V = 0$, d'où $C = \mathbb{K}(Y_1/Y_3^2)$; on en déduit que $C \cap \mathbb{K}[Y_1, Y_3] = \mathbb{K}$.

Soit $L \in \mathbb{K}[Y_1, Y_3]$ homogène de degré n par rapport à la graduation $\mathcal{G}$; on peut écrire ($c_{a,b} \in \mathbb{K}$) :

$$L = \sum_{2a+b=n} c_{a,b} Y_1^a Y_3^b.$$

On a :

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial Y_1}(\delta Y_1) + \frac{\partial L}{\partial Y_3}(\delta Y_3)\\ &= \frac{1}{6}Y_3\left(Y_1\frac{\partial L}{\partial Y_1} + \frac{Y_3}{2}\frac{\partial L}{\partial Y_3}\right)\\ &= \frac{1}{6}Y_3 \sum_{2a+b=n} c_{a,b}(a+b/2)Y_1^a Y_3^b\\ &= \frac{n}{12}Y_3 L. \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Soit maintenant $L \in \mathbb{K}[Y_1, Y_3]$ tel que $\delta L = ML$ avec $M \in \mathbb{K}[Y_1, Y_3]$. Si $L \notin \mathbb{K}$, alors $M \neq 0$, car $C \cap \mathbb{K}[Y_1, Y_3] = \mathbb{K}$. On peut écrire :

$$L = L_h + L_{h+1} + \cdots + L_k, \quad M = M_s + M_{s+1} + \cdots + M_t \qquad (3.4)$$

avec L_h, L_k, M_s, M_t non nuls, L_i $\mathcal{F}$-homogène de degré i et M_j $\mathcal{F}$-homogène de degré j. On a :

$$\delta L = \delta L_h + \cdots + \delta L_k = (M_s + M_{s+1} + \cdots + M_t)(L_h + L_{h+1} + \cdots + L_k),$$

d'où $\delta L_h = M_s L_h$ et $\delta L_k = M_t L_k$. Comme δ est homogène de degré 2 par rapport à $\mathcal{F}$, on en déduit que $L_h \notin \mathbb{K}$ et $s = t = 2$. Donc $\delta L = (\lambda Y_1 + \mu Y_3)L$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Écrivons $L = Y_3^l L'$ avec $L' \in \mathbb{K}[Y_1, Y_3]$ non divisible par Y_3. On a aussi :

$$\begin{aligned}\lambda Y_1 Y_3^l L' + \mu Y_3^{l+1} L' = \delta L &= \delta(Y_3^l L')\\ &= (l/12)Y_3^{l+1}L' + Y_3^l \delta L'.\end{aligned}$$

La définition de δ implique que Y_3 divise $\delta L'$ (d'après (3.2) l'image de δ est contenue dans l'idéal engendré par Y_3). Donc Y_3 divise λY_1, ce qui implique $\lambda = 0$ et

$$\delta L = \mu Y_3 L. \tag{3.5}$$

Écrivons $L = L_{i_1} + \cdots + L_{i_r}$ avec L_{i_k} non nul et homogène de degré i_k par rapport à la graduation $\mathcal{G}$, les i_k distincts et $r \geq 1$. En appliquant (3.3) on obtient :

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta L_{i_1} + \cdots + \delta L_{i_r} \\ &= Y_3 \left(\frac{i_1}{12} L_{i_1} + \cdots + \frac{i_r}{12} L_{i_r} \right). \end{aligned}$$

En combinant cette égalité avec (3.5) on trouve :

$$\frac{i_1}{12} L_{i_1} + \cdots + \frac{i_r}{12} L_{i_r} = \mu(L_{i_1} + \cdots + L_{i_r}).$$

Si $r > 1$ on trouve une contradiction ; si $r = 1$ alors $\mu = i_1/12$ et L est homogène par rapport à $\mathcal{G}$. $\square$

Démonstration de la proposition 3.2.

Supposons que la relation $DH = VH$ soit satisfaite et montrons l'homogénéité de V pour la graduation p. Écrivons :

$$H = H_h + H_{h+1} + \cdots + H_k, \quad V = V_s + V_{s+1} + \cdots + V_t$$

avec H_h, H_k, V_s, V_t non nuls et pour tout i, j, H_i isobare de poids i et V_j isobare de poids j. On a :

$$\begin{aligned} DH &= DH_h + \cdots + DH_k \\ &= (V_s + V_{s+1} + \cdots + V_t)(H_h + H_{h+1} + \cdots + H_k), \end{aligned}$$

d'où $DH_h = V_s H_h$ et $DH_k = V_t H_k$. On en déduit que $s = t = 2$. Donc $V = V_2 = \lambda X_1 + \mu X_3$ (non nul car H n'est pas constant) avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Montrons ensuite que $V = \mu X_3$ avec $\mu \in \mathbb{Q}^\times$. On a que $\pi(DH) = \delta(\pi(H)) = \pi(V)\pi(H)$ dans $\mathbb{K}[Y_1, Y_3]$. Posons $L = \pi(H)$ et $M = \pi(V)$: on a $\delta L = ML$. D'après le lemme 3.1, L est $\mathcal{G}$ homogène de degré n et $V = \lambda X_1 + \mu X_3$ est congru à μX_3 modulo $(X_1^2 - X_2)$ avec $\mu = n/12$; comme il est de poids 2, $V = \mu X_3$. En particulier, $\mu \in \mathbb{Q}^\times$. Ainsi :

$$DH/H = \mu X_3, \quad DX_2/X_2 = (1/3)X_3$$

sont $\mathbb{Z}$-linéairement dépendants, ce qui implique l'existence d'entiers α, β, non tous nuls, avec $H^\alpha X_2^\beta \in \mathbb{K}^\times$. Comme H est un polynôme irréductible en X_1, X_2, X_3, ceci implique $(H) = (X_2)$ et $\mu = 4/12 = 1/3$. $\square$

3.2. Idéaux D-stables de codimension 2. Dans cette partie, nous démontrons la proposition suivante.

Proposition 3.3. *Soit $\mathcal{Q}$ un idéal premier de $\mathcal{A}$ de codimension 2, D-stable, ne contenant pas X_2. Alors, soit $\mathcal{Q} = (X_3, X_1^2 - X_2)$, soit il existe un élément $d \in \mathbb{K}^\times$ tel que*

$$\mathcal{Q} = (X_1^2 - X_2, X_3^2 + dX_1).$$

Pour démontrer cette proposition, nous allons distinguer deux cas, selon que $\mathcal{Q}$ est isobare ou non. Si $\mathcal{Q}$ est isobare, alors le lemme 3.3 ci-dessous implique que $X_1^2 - X_2 \in \mathcal{Q}$. Si $\mathcal{Q}$ n'est pas isobare, alors le lemme 6.2 de l'appendice implique que $\mathcal{Q}$ contient un idéal non nul, isobare principal et D-stable, égal à $(X_1^2 - X_2)$ d'après la proposition 3.2. Dans tous les cas donc, $\mathcal{Q}$ contient l'idéal $(X_1^2 - X_2)$ et l'image de $\mathcal{Q}$ par π est un idéal principal δ-stable non nul de $\mathbb{K}[Y_1, Y_3]$ que nous étudions ensuite, en appliquant les résultats du paragraphe 3.1.

Nous démontrons le lemme qui suit, où nous utilisons les crochets de Rankin, qui sont définis uniquement sur des polynômes isobares de $\mathcal{A}$, mais pas sur des polynômes quelconque. Le crochet de Rankin $[U, V]$ de deux polynômes isobares U, V est défini par

$$[U, V] = p(U)U(DV) - p(V)V(DU).$$

Voici les propriétés principales du crochet.

Lemme 3.2. *Soient X, Y, M des éléments isobares de $\mathcal{A}$.*
- *Si $X \in \mathcal{A}$ est de poids x et Y est de poids y, alors $[X, Y] = -[Y, X]$ est isobare de poids $x + y + 2$.*
- *Si X, Y ont même poids, alors l'application $d_M(X) := [X, M]$ satisfait $d_M(X + Y) = d_M(X) + d_M(Y)$.*
- *On a $d_M(XY) = d_M(X)Y + Xd_M(Y)$.*
- *Si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$ qui est D-stable, et $X \in \mathcal{I}$, alors $d_M(X) \in \mathcal{I}$.*

Les premières deux propriétés sont triviales. Démontrons la troisième propriété. On a :

$$\begin{aligned} d_M(XY) = [XY, M] &= p(XY)XYDM - p(M)MD(XY) \\ &= (p(X) + p(Y))XYDM \\ &\quad - p(M)M((DX)Y + XDY) \\ &= (p(X)XDM - p(M)MDX)Y \\ &\quad + X(p(Y)YDM - p(M)MDY) \\ &= d_M(X)Y + Xd_M(Y). \end{aligned}$$

Démontrons la quatrième propriété. Si $X \in \mathcal{I}$ et M est isobare, alors $DX \in \mathcal{I}$ car $\mathcal{I}$ est D-stable. Donc $XDM, MDX \in \mathcal{I}$, et $d_M(X) = p(X)XDM - p(M)MDX \in \mathcal{I}$. $\square$

Lemme 3.3. *Tout idéal premier isobare $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{A}$, D-stable et de codimension 2, ne contenant pas X_2, contient l'idéal principal $(X_1^2 - X_2)$.*

Démonstration. Nous pouvons supposer que $\mathcal{Q} \cap \mathbb{K}[X_2] = (0)$. En effet, si $\mathcal{Q} \cap \mathbb{K}[X_2] \neq (0)$ alors $X_2 - a \in \mathcal{Q}$ avec $a \in \mathbb{K}$ car $\mathcal{Q}$ est premier. Mais $a = 0$ car $\mathcal{Q}$ est isobare, d'où $X_2 \in \mathcal{Q}$ et $d_{X_1}(X_2) \in \mathcal{Q}$ grâce au lemme 3.2, car $\mathcal{Q}$ est D-stable. Or :

$$\begin{aligned} d_{X_1}(X_2) &= 4X_2DX_1 - 2X_1DX_2 \\ &= 2(X_1^2 - X_2)X_2 \end{aligned}$$

d'où le lemme dans ce cas car comme $\mathcal{Q}$ est premier, il contient un des facteurs de $(X_1^2 - X_2)X_2$.

Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, qu'il existe un polynôme isobare et non nul $M \in \mathcal{Q} \cap \mathbb{K}[X_1, X_2]$. En effet, si $\mathcal{Q} \cap \mathbb{K}[X_1, X_2] = (0)$, alors $\mathcal{Q}$ serait principal. Donc $\mathcal{Q}$ contient un élément non nul F de $\mathbb{K}[X_1, X_2]$; écrivons $F = \sum_i F_i$ avec $F_i \in \mathbb{K}[X_1, X_2]$ isobare de poids i. Comme $\mathcal{Q}$ est isobare, $F_i \in \mathcal{Q}$ pour tout i (voir le lemme 6.2 de l'appendice), d'où l'existence de M.

Remarquons que M dépend de X_1 car $\mathcal{Q} \cap \mathbb{K}[X_2] = (0)$: choisissons M de degré minimal par rapport à X_1.

À nouveau, grâce au lemme 3.2, on a $d_{X_2}(M) \in \mathcal{Q}$. On a :

$$\begin{aligned} d_{X_2}(M) &= \frac{\partial M}{\partial X_1} d_{X_2}(X_1) + \frac{\partial M}{\partial X_2} d_{X_2}(X_2) + \frac{\partial M}{\partial X_1} d_{X_2}(X_3) \\ &= \frac{\partial M}{\partial X_1} d_{X_2}(X_1) \\ &= -\frac{\partial M}{\partial X_1} d_{X_1}(X_2) \\ &= -2\frac{\partial M}{\partial X_1}(X_1^2 - X_2)X_2, \end{aligned}$$

car $\partial M/\partial X_1 = 0$ et $d_{X_2}(X_2) = 0$. Comme $\mathcal{Q}$ est premier, on a soit $\partial M/\partial X_1 \in \mathcal{Q}$, soit $X_1^2 - X_2 \in \mathcal{Q}$ car $X_2 \notin \mathcal{Q}$. Si $X_1^2 - X_2 \in \mathcal{Q}$ nous avons terminé. Sinon, on a $M' = \partial M/\partial X_1 \in \mathcal{Q}$: comme M est de degré minimal par rapport à X_1, il faut que $M' = 0$, d'où l'on déduit que M ne dépend pas de X_1, contre nos hypothèses. $\square$

Démonstration de la proposition 3.3.

Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{A}$; on note $\tilde{\mathcal{I}}$ l'idéal engendré par les polynômes isobares de $\mathcal{I}$. D'après le lemme 6.2 de l'appendice, $\tilde{\mathcal{Q}}$ est non nul, premier et D-stable. Si $\mathcal{Q}$ n'est pas isobare, alors $\tilde{\mathcal{Q}}$ est de codimension 1 donc principal non nul et $\tilde{\mathcal{Q}} = (X_1^2 - X_2)$ d'après la proposition 3.2. Si $\mathcal{Q}$ est isobare alors le lemme 3.3 implique que $\mathcal{Q}$ contient $X_1^2 - X_2$. Dans les deux cas, $\mathcal{Q}$ contient $X_1^2 - X_2$ et donc $\pi(\mathcal{Q})$ est un idéal principal non nul et δ-stable de $(\mathbb{K}[Y_1, Y_3], \delta)$. Soit L un de ses générateurs ; d'après le lemme 3.1, L est $\mathcal{G}$-homogène. La projection π induit un isomorphisme $\mathbb{K}[X_1, X_3] \cong \mathbb{K}[Y_1, Y_3]$, et puisque $\mathcal{Q}$ contient $X_1^2 - X_2$, on a que $\mathcal{Q}$ contient aussi un élément non nul $W \in \mathbb{K}[X_1, X_3]$, q-homogène, tel que $\pi(W) = L$.

La q-homogénéité de W implique :

$$W = X_3^s \prod_{i=1}^{t} (\alpha_i X_1 - \beta_i X_3^2),$$

avec $s \in \{0, 1\}$ et $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i = 1, \ldots, t$. Mais $\mathcal{Q}$ est premier, et contient un facteur irréductible de W. Ainsi, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (non tous nuls) tels que $\alpha X_1 - \beta X_3^2 \in \mathcal{Q}$. On en déduit dans ce cas que :

$$\mathcal{Q} = (X_1 - X_2^2, X_3),$$

ou

$$\mathcal{Q} = (X_1^2 - X_2, X_3^2 + dX_1) \text{ avec } d \in \mathbb{K}^\times.$$

□

3.3. Idéaux D-stables de codimension 3. La proposition suivante complète la description des idéaux premiers D-stables de $\mathcal{A}$ ne contenant pas X_2, et permet de terminer la preuve de la proposition 3.1.

Proposition 3.4. *Soit $\mathcal{Q}$ un idéal premier de codimension 3, D-stable de $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{Q}$ est égal à l'un des idéaux suivants :*

$$\mathcal{Q} = (X_1 - c, X_2 - c^2, X_3).$$

avec $c \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Ici, $\mathcal{Q}$ est un idéal maximal $\mathcal{Q} = (X_1 - u, X_2 - v, X_3 - w)$, pour certains $u, v, w \in \mathbb{K}$. Pour que $D(X_1 - u), D(X_2 - v), D(X_3 - w) \in \mathcal{Q}$, il faut que ces polynômes s'annulent tous en (u, v, w). En utilisant (3.1) on voit que :

$$\begin{aligned}
D(X_1-u) &= \frac{1}{6}(3u+3X_1+X_3)(X_1-u)-\frac{1}{2}(X_2-v)+\frac{u}{6}(X_3-w)\\
&\quad -\frac{1}{6}(3u^2-3v+uw),\\
D(X_2-v) &= \frac{X_3}{3}(X_2-v)+\frac{v}{3}(X_3-w)-\frac{vw}{3},\\
D(X_3-w) &= -\frac{5}{12}(u+X_1)(X_1-u)\\
&\quad +\frac{5}{12}(X_2-v)+\frac{1}{12}(w+X_3)(X_3-w)+\frac{1}{12}(5u^2-5v-w^2).
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{Q}$ est D-stable si et seulement si :

$$\begin{aligned}
3u^2-3v+uw&=0,\\
vw&=0,\\
5u^2-5v-w^2&=0.
\end{aligned}$$

On trouve : $u=c, v=c^2, w=0$ avec $c\in\mathbb{K}$ si et seulement si $\mathcal{Q}$ est D-stable. □

4. Démonstration du théorème 1.2.

Nous commençons avec deux lemmes préliminaires.

Lemme 4.1. *Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier de $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ ne contenant pas Q : on a que $\mathcal{A}\mathcal{P}\cap\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}=\mathcal{P}$.*

Démonstration. Posons $\mathcal{T}=\mathcal{A}\mathcal{P}$; on a clairement $\mathcal{P}\subset\mathcal{T}\cap\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$. Soit $q\in\mathcal{T}\cap\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$; on a

$$q=a_1p_1+\cdots+a_sp_s \tag{4.1}$$

avec $a_i\in\mathcal{A}$ et $p_i\in\mathcal{P}$ pour tout i. Il existe un entier $l\geq 0$ tel que $r_i:=Q^la_i\in\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ pour tout i. Donc

$$Q^lq=\sum_i r_ip_i\in\mathcal{P}.$$

Mais $Q^l\notin\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ est premier. Donc $q\in\mathcal{P}$, d'où $\mathcal{T}\cap\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}\subset\mathcal{P}$. □

Lemme 4.2. *Si $d\in\mathbb{K}^\times$, alors l'idéal $\mathcal{P}_d$ est premier de codimension 2, et son lieu de zéros est la sextique affine lisse image de la paramétrisation $t\mapsto(\sqrt{-d}t+t^2,t^4,t^6)$.*

Démonstration. On commence par déterminer le lieu des zéros de $\mathcal{P}_d$ dans l'espace affine $\mathbb{A}_3(\mathbb{K})$. Puisque $\Theta\in\mathcal{P}_d$ et $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, on se ramène à déterminer les zéros de la forme (s, t^4, t^6) avec $s, t \in \mathbb{K}$. Observons que :

$$F_d(s,t^4,t^6) = t^4U, \quad G_d(s,t^4,t^6) = -t^6U, \quad H_d(s,t^4,t^6) = UV,$$

avec

$$\begin{aligned} U &= s^2 + t^4 - t^2(2s-d) \\ V &= s^2 + t^4 + t^2(2s-d). \end{aligned}$$

Comme t ne divise pas V, on a $F_d(s,t^4,t^6) = G_d(s,t^4,t^6) = H_d(s,t^4,t^6) = 0$ si et seulement si $U = 0$, c'est-à-dire :

$$s = \pm\sqrt{-d}t + t^2.$$

Puisque $\sqrt{-d}t + t^2 = -\sqrt{-d}(-t) + (-t)^2$, le lieu des zéros de $\mathcal{P}_d$ est égal à la sextique affine lisse $\mathcal{C}_d$ image de la paramétrisation :

$$t \mapsto (\sqrt{-d}t + t^2, t^4, t^6)$$

(isomorphe à la droite affine). Comme $\mathcal{C}_d$ est irréductible, $\mathcal{P}_d$ est primaire.

Montrons que $\mathcal{P}_d$ est réduit ; il suffit de montrer que la matrice jacobienne J des polynômes Θ, F_d, G_d, H_d par rapport aux inconnues P, Q, R a rang 2 partout dans $\mathcal{C}_d$. Tout d'abord, on a :

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Theta}{\partial P} & \dfrac{\partial\Theta}{\partial Q} \\ \\ \dfrac{\partial F_d}{\partial P} & \dfrac{\partial F_d}{\partial Q}\end{pmatrix} = 4R(PQ-R),$$

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Theta}{\partial P} & \dfrac{\partial\Theta}{\partial R} \\ \\ \dfrac{\partial F_d}{\partial P} & \dfrac{\partial F_d}{\partial R}\end{pmatrix} = -6Q^2(Q^2-PR).$$

Si $(P,Q,R) \neq (0,0,0)$, ces deux mineurs de J ne peuvent pas être tous les deux nuls sur $\mathcal{C}_d$ car cela reviendrait à dire que $P = c, Q = c^2, R = c^3$ pour un certain $c \in \mathbb{K}^\times$ et $\mathcal{C}_d$ ne contient aucun point de cette forme si $d \neq 0$.

D'autre part, si $(P,Q,R) = (0,0,0)$, le mineur de J :

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_d}{\partial Q} & \dfrac{\partial F_d}{\partial R} \\ \\ \dfrac{\partial H_d}{\partial Q} & \dfrac{\partial H_d}{\partial R}\end{pmatrix} = -(2P-d)(2P^2-2Q-4Pd+d^2)$$

vaut $d^3 \neq 0$, donc $\mathcal{P}_d$ est réduit.

Comme $\mathcal{P}_d$ est primaire et réduit, il est premier. □

Nous pouvons compléter la démonstration du théorème 1.2. Supposons que $\mathcal{P}$ soit un idéal premier D-stable de $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$. Supposons d'abord que $Q \in \mathcal{P}$; l'égalité $DQ = (1/3)(PQ - R)$ implique que $R \in \mathcal{P}$, et $\mathcal{P}$ a codimension ≥ 2. Si la codimension de $\mathcal{P}$ est 2 alors $\mathcal{P} = (Q, R)$. Si la codimension de $\mathcal{P}$ est 3 alors $\mathcal{P}$ est un idéal maximal qui contient Q, R, donc il contient $P - c$ pour une constante $c \in \mathbb{K}$. On vérifie facilement que $c = 0$ est le seul élément de $\mathbb{K}$ tel que $(P - c, Q, R)$ soit D-stable.

Les seuls idéaux premiers non nuls D-stables de $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ qui contiennent Q sont donc :

$$(Q, R), \quad (P, Q, R).$$

Supposons maintenant que $Q \notin \mathcal{P}$. D'après le lemme 4.1, l'idéal $\mathcal{T} = \mathcal{A}\mathcal{P}$ satisfait $\mathcal{T} \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = \mathcal{P}$; il est de plus D-stable. Le lemme 6.3 de l'appendice implique qu'il existe un idéal premier $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{A}$, D-stable, tel que $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = \mathcal{P}$ et donc $\mathcal{Q}$ est l'un des idéaux décrits dans la proposition 3.1 pour certains c ou d.

Pour terminer la preuve du théorème 1.2 il faut calculer, pour chaque $\mathcal{Q}$ idéal premier de $\mathcal{A}$ décrit dans la proposition 3.1, l'idéal premier $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ qui est forcément D-stable ; nous considérons quatre cas.

(1). Comme $\Theta = X_2^2(X_2 - X_1^2)$, on voit tout de suite l'égalité $(X_2 - X_1^2) \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = (\Theta)$.

(2). En utilisant les égalités $P = X_3 + X_1, Q = X_2, R = X_1X_2$ on vérifie facilement que l'idéal $(X_1 - c, X_2 - c^2, X_3) \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$, qui est premier, contient $P - c$, $Q - c^2$ et $R - c^3$. Comme l'idéal $(P - c, Q - c^2, R - c^3)$ est maximal, on trouve :

$$\mathcal{A}(X_1 - c, X_2 - c^2, X_3) \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = (P - c, Q - c^2, R - c^3).$$

(3). En faisant comme au point (2), on vérifie aussi que l'idéal premier $(X_1^2 - X_2, X_3) \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ contient $P^2 - Q$ et $P^3 - R$. Comme $\mathcal{A}(X_1^2 - X_2, X_3) \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ est de codimension 2 et comme l'idéal $(P^2 - Q, P^3 - R)$ est premier de codimension 2, on a :

$$\mathcal{A}(X_1^2 - X_2, X_3) \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = (P^2 - Q, P^3 - R).$$

(4). Pour terminer la démonstration du théorème 1.2 nous devons encore démontrer que, pour d un élément non nul de $\mathbb{K}$, si l'on pose

$$\mathcal{Q}_d := (X_1^2 - X_2, X_3^2 + dX_1) \subset \mathcal{A}$$

alors $\mathcal{Q}_d \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}} = \mathcal{P}_d$. On a les égalités :

$$\begin{aligned}
\Theta &= X_2(X_1^2 - X_2),\\
F_d &= X_2(-(X_1^2 - X_2) + (X_3 + dX_1)),\\
G_d &= X_2((d - X_1 - 2X_3)(X_1^2 - X_2) - X_1(X_3 + dX_1)),\\
H_d &= (X_1^2 + 4X_1X_3 + 6X_3^2 - X_2 - 4dX_3 + d^2)(X_1^2 - X_2)\\
&\quad + (4X_1X_3 + X_3^2 + 4X_2 - dX_1)(X_3 + dX_1),
\end{aligned}$$

ce qui implique $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{Q}_d \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$. Comme l'idéal premier $\mathcal{Q}_d \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ a codimension 2, le lemme 4.2 implique l'égalité $\mathcal{P}_d = \mathcal{Q}_d \cap \mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$. La preuve du théorème 1.2 est terminée. $\square$

5. Démonstration des théorèmes 1.3 et 1.4.

Nous démontrons d'abord le théorème 1.3. On considère l'anneau de polynômes en cinq indéterminées

$$\mathcal{N} := \mathbb{C}[L, Z, P, Q, R],$$

et ses sous-anneaux

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}[P, Q, R], \quad \mathcal{L} := \mathbb{C}[L, Z].$$

Nous étudions la dérivation $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{N}$ définie par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}S = &\frac{1}{12}(P^2 - Q)\frac{\partial S}{\partial P} + \frac{1}{3}(PQ - R)\frac{\partial S}{\partial Q}\\
&+ \frac{1}{2}(PR - Q^2)\frac{\partial S}{\partial R} + Z\frac{\partial S}{\partial Z} + \frac{\partial S}{\partial L},
\end{aligned}$$

pour $S \in \mathcal{N}$. Les sous-anneaux $\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}$, munis de la dérivation $\mathcal{E}$, sont des sous-anneaux différentiels. Puisque $\log(z), z, E_2(z), E_4(z), E_6(z)$ sont des fonctions algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, on a l'isomorphisme d'anneaux différentiels

$$(\mathcal{N}, \mathcal{E}) \cong \left(\mathcal{R}_2, z\frac{d}{dz}\right) \tag{5.1}$$

défini en associant $\log(z) \mapsto L, z \mapsto Z, E_2 \mapsto P, E_4 \mapsto Q, E_6 \mapsto R$. Soit $\mathbb{K}$ une clôture algébrique du corps des fractions de $\mathcal{L}$. Sur

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{K}} := \mathbb{K}[P, Q, R] \supset \mathcal{N}$$

nous avons la dérivation D définie par les relations (1.3) et par $D(\mathbb{K}) = 0$. Sur $\mathcal{N}$ nous avons aussi la dérivation D' définie par $D'(\mathcal{Y}_{\mathbb{C}}) = 0$ et par les relations $D'Z = Z$, $D'L = 1$. Clairement, pour $S \in \mathcal{N}$, on a :

$$\mathcal{E}S = DS + D'S.$$

Un élément de $\mathcal{N}$ est dit *isobare de poids s* s'il s'exprime comme une somme de monômes

$$L^a Z^b P^{t_1} Q^{t_2} R^{t_3}$$

avec $2t_1 + 4t_2 + 6t_3 = s$.

Si $F \in \mathcal{N}$ alors nous notons $p(F)$ le plus grand poids d'un monôme de F ; on a $p(DF) \leq p(F)+2$. D'autre part, pour $F \in \mathcal{N}$ non nul, on a clairement $\deg_Z(DF) \leq \deg_Z(F)$ et $\deg_L(DF) \leq \deg_L(F)$. Nous démontrons le lemme qui suit, qui généralise le lemme 5.2 p. 161 de [6].

Lemme 5.1. *Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier principal non nul de $\mathcal{N}$ qui est $\mathcal{E}$-stable. Alors $\mathcal{P} = (\Theta)$ ou $\mathcal{P} = (Z)$.*

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{N}$ un polynôme non nul et irréductible tel que

$$\mathcal{E}M = FM, \tag{5.2}$$

avec $F \in \mathcal{N}$; nous devons démontrer que soit $M = c\Theta$, soit $M = cZ$, avec $c \in \mathbb{C}^\times$.

Comme $p(\mathcal{E}M) = p(F)+p(M)$, on a que $p(F) \leq 2$. Comme $\deg_Z(\mathcal{E}M) = \deg_Z(F)+\deg_Z(M)$ et $\deg_L(\mathcal{E}M) = \deg_L(F)+\deg_L(M)$, on a que $\deg_Z(F) = \deg_L(F) = 0$ et

$$F = \lambda_1 P + \lambda_2 \tag{5.3}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. On a aussi $F \neq 0$ car M étant irréductible, il est non constant, et d'après l'isomorphisme (5.1), le sous-corps des constantes du corps des fractions de $\mathcal{N}$ pour la dérivation $\mathcal{E}$ est $\mathbb{C}$.

Notre but est maintenant de montrer que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ dans (5.3). Nous commençons par démontrer que $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$.

Écrivons

$$M = M_h + M_{h+1} + \cdots + M_k, \tag{5.4}$$

avec $0 \leq h \leq k$, M_i homogène de poids i et M_h, M_k non nuls.

Écrivons également

$$M_k = \sum_{j=1}^{t} c_j V_j,$$

avec $V_1, \ldots, V_t \in \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$ isobares de poids k, et $c_j \in \mathcal{L}$. On a

$$\mathcal{E}M_k = \sum_{j=1}^{t} c_j \mathcal{E}V_j + \sum_{j=1}^{t} (\mathcal{E}c_j)V_j.$$

En comparant les poids des termes isobares dans (5.2), on vérifie :

$$\mathcal{E}M_k = \lambda_1 P M_k + \lambda_2 M_k + \lambda_1 P M_{k-1},$$

d'où :

$$DM_k = \lambda_1 P M_k. \tag{5.5}$$

D'après la troisième affirmation du théorème 1.2, il existe un unique idéal premier principal non nul et D-stable de $\mathcal{Y}_{\mathbb{K}}$ qui est l'idéal (Θ). Donc tout idéal principal non nul D-stable est de la forme (Θ^m) et $M_k = c\Theta^m$ avec $c \in \mathbb{K}^\times$, d'où l'égalité $\lambda_1 = m \in \mathbb{Z}$ dans (5.3).

Montrons ensuite que $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$ dans (5.3). Nous pouvons supposer dans la suite que $M_h \notin \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$ car si $M_h \in \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$, $\lambda_2 = 0$. Écrivons maintenant

$$M_h = \sum_{j=1}^{t} c_j U_j,$$

avec $U_1, \ldots, U_t \in \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$ isobares de poids h, et $c_1, \ldots, c_t \in \mathcal{L}$. Si $h = 0$, alors $M_h \in \mathcal{L}$. Si $h > 0$, on a

$$\mathcal{E}M_h = \sum_{j=1}^{t} c_j \mathcal{E}U_j + \sum_{j=1}^{t} (\mathcal{E}c_j)U_j.$$

Donc si $h \geq 0$ (après comparaison des termes de même poids dans (5.2)) :

$$\frac{\partial M_h}{\partial L} + \frac{\partial M_h}{\partial Z} = \lambda_2 M_h,$$

et

$$D'M_h = \lambda_2 M_h. \tag{5.6}$$

On voit tout de suite que si $M_h \notin \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$, alors M_h dépend de Z. Écrivons :

$$\begin{aligned} M_h &= \sum_{a,b \geq 0} c_{a,b} L^a Z^b \\ &= \sum_{a,b>0} c_{a,b} L^a Z^b + \sum_{b>0} d_b Z^b + \sum_{a>0} e_a L^a + f_0, \quad c_{a,b}, d_b, e_a, f_0 \in \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} D'M_h = &\sum_{a,b>0} (bc_{a,b} + (a+1)c_{a+1,b}) L^a Z^b + \sum_{b>0} (bd_b + c_{1,b}) Z^b \\ &+ \sum_{a>0} (a+1) e_{a+1} L^a + e_1 + f_0. \end{aligned}$$

Soit a_0 maximal avec $c_{a_0,b_0} \neq 0$ pour un certain $b_0 \geq 0$.

Si $a_0 = 0$, alors $M_h \in \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}[Z]$. Donc $M_h = k_0 + k_1 Z + \cdots + k_r Z^r$ ($k_j \in \mathcal{Y}_{\mathbb{C}}$ et $k_r \neq 0$), et $D'M_h = k_1 Z + \cdots + rk_r Z^r$, d'où $rk_r = \lambda_2 k_r$ et $\lambda_2 = r \in \mathbb{Z}$.

Si $a_0 > 0$ alors $b_0 > 0$ et :

$$\begin{aligned} b_0 c_{a_0,b_0} &= b_0 c_{a_0,b_0} + (a_0+1) c_{a_0+1,b_0} \\ &= \lambda_2 c_{a_0,b_0}, \end{aligned}$$

puisque $c_{a_0+1,b_0} = 0$. Donc $\lambda_2 = b_0$ et aussi dans ce cas, $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$.

Terminons la démonstration du lemme. Nous avons montré que

$$\mathcal{E}M = (\lambda_1 P + \lambda_2)M$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{E}\Theta = P\Theta$ et $\mathcal{E}Z = Z$. Donc

$$\frac{\mathcal{E}M}{M} = \lambda_1 \frac{\mathcal{E}\Theta}{\Theta} + \lambda_2 \frac{\mathcal{E}Z}{Z}.$$

On en déduit que $\mathcal{E}(M\Theta^{-\lambda_1}Z^{-\lambda_2}) = 0$, d'où $M\Theta^{-\lambda_1}Z^{-\lambda_2} \in \mathbb{C}^\times$ (le corps des fractions de $\mathcal{N}$ a $\mathbb{C}$ comme sous-corps des constantes pour la dérivation $\mathcal{E}$). L'irréductibilité de M implique $M = c\Theta$ ou $M = cZ$, avec $c \in \mathbb{C}^\times$. $\square$

Démonstration du théorème 1.3. Soit $\mathcal{J}$ un idéal premier de $\mathcal{N}$. Si $\mathcal{J} \cap \mathcal{Y}_\mathbb{C}[Z] = (0)$, alors $\mathcal{J}$ est principal et ne peut pas être $\mathcal{E}$-stable d'après le lemme 5.1.

Donc, si $\mathcal{J}$ est $\mathcal{E}$-stable, alors $\mathcal{J}_1 := \mathcal{J} \cap \mathcal{Y}_\mathbb{C}[Z]$ est un idéal premier $\mathcal{E}$-stable non nul de $\mathcal{Y}_\mathbb{C}[Z]$.

Si $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{Y}_\mathbb{C} = (0)$ alors $\mathcal{J}_1$ est principal, donc $\mathcal{J}_1\mathcal{N}$ est un idéal premier principal $\mathcal{E}$-stable de $\mathcal{N}$, et le lemme 5.1 implique $Z \in \mathcal{J}$.

Sinon, $\mathcal{I} = \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{Y}_\mathbb{C}$ est un idéal premier D-stable non nul de $\mathcal{Y}_\mathbb{C}$; il contient Θ d'après le théorème 1.2 (avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

La preuve du théorème 1.3 se termine en considérant l'isomorphisme différentiel (5.1). $\square$

Démonstration du théorème 1.4. Ce théorème est un corollaire du théorème 1.3. Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier non nul et $z(d/dz)$-stable de $\mathcal{R}_1$. L'idéal $\mathcal{T} := \mathcal{N}\mathcal{P}$ est un idéal $z(d/dz)$-stable de $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{T} \cap \mathcal{R}_1 = \mathcal{P}$. Le lemme 6.3 de l'appendice implique qu'il existe un idéal premier $z(d/dz)$-stable $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}_1 = \mathcal{P}$. Le théorème 1.3 implique que $z\Delta \in \mathcal{Q}$, donc $z\Delta \in \mathcal{P}$. $\square$

6. Appendice : lemmes auxiliaires.

Soient $X_0, \ldots, X_s$ des indéterminées. On considère sur $\mathbb{K}[X_0, X_1, \ldots, X_s]$ une graduation p déterminée par $p(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{K}^\times$, et en assignant à X_i un degré $p(X_i) = p_i \in \mathbb{Z}_{>0}$. Supposons que p_0 soit égal au plus petit commun diviseur de $p_1, \ldots, p_s$. Nous démontrons deux lemmes.

Lemme 6.1. *Soient $F, G \in \mathbb{K}[X_0, X_1, \ldots, X_s]$ deux polynômes p-homogènes. Si le résultant $R = \mathrm{Rés}_{X_0}(F, G) \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_s]$ est non nul, alors il est p-homogène et*

$$p(R) = p(F)\deg_{X_0}(G) + p(G)\deg_{X_0}(F) - 2\deg_{X_0}(F)\deg_{X_0}(G).$$

Démonstration. Quitte à diviser tous les poids par p_0, on peut se ramener au cas $p_0 = 1$. On écrit :

$$F = F_0 + F_1 X_0 + \cdots + F_m X_0^m, \quad G = G_0 + G_1 X_0 + \cdots + G_n X_0^n,$$

avec F_m, G_n non nuls, et $F_i, G_j \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_s]$ pour tout i, j. Il est bien connu que le résultant R est homogène par rapport à chaque groupe de variables $(F_i)_{i=1,\ldots,m}$ et $(G_j)_{j=1,\ldots,n}$ de degrés respectifs n, m. De plus, d'après [12], théorème 6.1, R est « ν-homogène de degré mn », avec $\nu = (0, 1, \ldots, n, 0, 1, \ldots, m)$. Ceci veut dire que si le monôme

$$M_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} = F_0^{\alpha_0} \cdots F_m^{\alpha_m} G_0^{\beta_0} \cdots G_n^{\beta_n}$$

apparaît avec un coefficient non nul dans l'expression de R, alors :

$$\sum_{i=1}^{m} i\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} j\beta_j = mn. \tag{6.1}$$

La p-homogénéité de F, G implique que tous les F_i et G_j sont p-homogènes. Il existe deux entiers k, h tels que $p(F_i) = m + k - i$ et $p(G_j) = n + h - j$ pour tout i, j (on applique l'hypothèse sur p_0).

Donc si le monôme $M_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}$ apparaît avec coefficient non nul dans l'écriture de R, alors il est p-homogène ; calculons son degré.

$$\begin{aligned} p(M_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}) &= \sum_{i=0}^{m} \alpha_i p(F_i) + \sum_{i=0}^{n} \beta_j p(G_j) \\ &= (k+m)\sum_{i=0}^{m} \alpha_i + (h+n)\sum_{j=0}^{n} \beta_j - \sum_{i=1}^{m} i\alpha_i - \sum_{j=1}^{n} j\beta_j \\ &= (k+m)n + (h+n)m - mn \\ &= kn + hm + mn, \end{aligned}$$

en appliquant (6.1). Ainsi, tous les monômes qui interviennent dans l'écriture de R avec un coefficient non nul ont même p-degré $kn + hm + mn$, ce qui implique que R est p-homogène de degré $kn + hm + mn$; cette quantité correspond à ce qui était prevu. □

Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_s]$ et notons $\tilde{\mathcal{I}}$ l'idéal engendré par les éléments p-homogènes de $\mathcal{I}$. Soit D une dérivation p-homogène de poids d sur $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_s]$.

Lemme 6.2. *Nous avons les propriétés suivantes.*

(1) *Si $\mathcal{I}$ est D-stable, alors $\tilde{\mathcal{I}}$ est D-stable.*

(2) *Si $\mathcal{I}$ est premier, alors $\tilde{\mathcal{I}}$ est premier.*

(3) *Si $\mathcal{I}$ est premier et n'est pas principal, alors $\tilde{\mathcal{I}} \neq (0)$.*

Démonstration. 1. Soit $U \in \tilde{\mathcal{I}}$; alors $U = U_0 + \cdots + U_k$ pour certains polynômes p-homogènes $U_0, \ldots, U_k \in \mathcal{I}$. Pour tout j on a $DU_j \in \mathcal{I}$ car $\mathcal{I}$ est D-stable. De plus DU_j est p-homogène, donc $DU = DU_0 + \cdots + DU_k \in \tilde{\mathcal{I}}$.

2. C'est bien connu : voir chapitre 7, paragraphe 2 de [13].

3. Notons, pour tout polynôme non nul $F \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_s]$:

$$^hF = X_0^{p/p_0} F\left(\frac{X_1}{X_0^{p_1}}, \ldots, \frac{X_s}{X_0^{p_s}}\right) \in \mathbb{K}[X_0, X_1, \ldots, X_s],$$

où p est le plus grand degré d'un monôme non nul de F par rapport à la graduation p.

Il faut montrer que $\mathcal{I}$ contient un polynôme p-homogène non nul. Par hypothèse il existe $U, V \in \mathcal{I}$ premiers entre eux ; donc ^hU et ^hV sont premiers entre eux. Donc $T := \mathrm{Rés}_{X_0}(^hU, {}^hV) \in \mathcal{A}$ est non nul, et p-homogène d'après le lemme 6.1. De plus $T \in \mathcal{I}$ car il existe $A, B \in \mathbb{K}[X_0, X_1, \ldots, X_s]$ tels que $T = A^hU + B^hV$ d'où, en prenant $X_0 = 1$, $T = aU + bV$ pour $a, b \in \mathcal{A}$, on obtient $T \in \mathcal{I}$. □

Lemme 6.3. *Soient $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ deux anneau noethériens, soit D une dérivation de $\mathcal{A}$ telle que $(\mathcal{B}, D)$ soit un anneau différentiel. Soit $\mathcal{T}$ un idéal D-stable de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{P} := \mathcal{T} \cap \mathcal{B}$ soit premier. Il existe alors un idéal premier D-stable $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{Q} \cap \mathcal{B} = \mathcal{P}$.*

Démonstration. D'après le théorème 1 p. 24 de [9], les idéaux premiers $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_t$ associés de $\mathcal{T}$ sont D-stables, et $\mathcal{T}$ admet une décomposition primaire :

$$\mathcal{T} = \bigcap_{j=1}^{t} \mathcal{T}_j$$

avec $\mathcal{T}_j$ qui est $\mathcal{Q}_j$-primaire, et D-stable, pour tout j. On a :

$$\mathcal{P} = \left(\bigcap_{j=1}^{t} \mathcal{T}_j\right) \cap \mathcal{B} = \bigcap_{j=1}^{t} (\mathcal{T}_j \cap \mathcal{B}).$$

Donc il existe j tel que $\mathcal{T}_j \cap \mathcal{B} = \mathcal{P}$ (tous les idéaux $\mathcal{T}_j \cap \mathcal{B}$ sont primaires). Soit $x \in \mathcal{B}$ tel que $x^n \in \mathcal{T}_j$ pour un certain n. Alors $x \in \mathcal{P}$, d'où $x \in \mathcal{Q}_j = \sqrt{\mathcal{T}_j}$. Ainsi l'idéal $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_j$, qui est premier et D-stable, satisfait $\mathcal{Q} \cap \mathcal{B} = \mathcal{P}$. □

Remerciements. L'auteur souhaite remercier S. David pour des commentaires très utiles, et F. Amoroso pour une relecture minutieuse du texte, et pour m'avoir suggéré l'argument du résultant dans la preuve du lemme 6.2, ce qui a apporté des simplifications par rapport à une version précédente.

Bibliographie

[1] M. Kaneko & D. Zagier, *A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms.* Dijkgraaf, R. H. (éd.) et al., The moduli space of curves, Prog. Math. **129**, 165–172, Basel : Birkhäuser, 1995.

[2] S. Lang, *Introduction to modular forms,* (Avec deux appendices, par D. B. Zagier et par W. Feit). Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **222**, Springer, 1976.

[3] Yu. V. Nesterenko, *On the algebraic dependence of the components of solutions of a system of linear differential equations.* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **38** (1974), 495–512.

[4] Yu. V. Nesterenko, *Modular functions and transcendence questions.* Sb. Math. **187** (1996), No. 9, 1319–1348.

[5] Yu. V. Nesterenko, *Algebraic independence for values of Ramanujan functions.* Dans *Introduction to algebraic independence theory.* Yu. V. Nesterenko et P. Philippon éditeurs, chapitre 3, 27–43, Lecture Notes in Mathematics **1752**, Springer, 2001.

[6] Yu. V. Nesterenko, *Multiplicity estimates for solutions of algebraic differential equations.* Dans *Introduction to algebraic independence theory.* Yu. V. Nesterenko et P. Philippon éditeurs, chapitre 10, 149–165, Lecture Notes in Mathematics **1752**, Springer, 2001.

[7] F. Pellarin, *Les nilradicaux différentiels d'anneaux différentiels associés aux groupes triangulaires de Riemann-Schwarz.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **114** (2005), 213–239.

[8] F. Martin & E. Royer, *Formes modulaires et périodes.* Dans S.M.F. Séminaires et Congrès No. **12**, (2005).

[9] A. Seidenberg, *Differential ideals in rings of finitely generated type.* Am. J. Math. **89** (1967), 22–42.

[10] AA. B. Shidlovskij, *Transcendental numbers.* De Gruyter Studies in Mathematics **12**, W. de Gruyter, 1989.

[11] C. L. Siegel, *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen.* Abh. Preuss. Akad. Wiss. Dans Gesammelte Abhandlungen I, 210–266.

[12] B. Sturmfels, *On the Newton polytope of the resultant.* J. Algebraic Combin. **3 : 2** (1994), 207–236.

[13] O. Zariski & P. Samuel, *Commutative algebra. Vol. II.* Réédition de l'édition Van Nostrand 1958–1960. Graduate Texts in Mathematics **29**, Springer-Verlag.

Federico Pellarin
L.M.N.O., Université de Caen
Campus II - Boulevard Maréchal Juin
BP 5186 - F14032 Caen Cedex, France
E-mail : `pellarin@math.unicaen.fr`