

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Юлка Кнежевич-Милянович

Абстракт. С помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке найдены достаточные условия существования периодических решений уравнений третьего порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' + f(x, y, y', y'') = 0, \quad (1)$$

где $f(x, y, z, u)$ непрерывная по совокупности переменных при всех $-\infty < x, y, z, u < +\infty$ и ω -периодическая по x , т.е. $f(x, y, z, u) = f(x + \omega, y, z, u)$ при всех x, y, z, u . нас будет интересовать вопрос о существовании ω -периодических решений уравнения (1). Для исследования этого вопроса мы применяем теорему Шаудера о неподвижной точке.

Обозначим через $C_{[0, \omega]}^n$ множество функций $y(x)$ определенных на $[0, \omega]$, непрерывных на этом сегменте и имеющих на нем непрерывные производные до n -того порядка включительно. В этом множестве введем норму, полагая

$$\|y\| = \sum_{i=0}^n \max_{0 \leq x \leq \omega} |y^{(i)}(x)|, \quad (y^{(0)}(x) = y(x)). \quad (2)$$

Пространство $C_{[0, \omega]}^n$ является банаховым. Так как сходимость в $C_{[0, \omega]}^n$ означает равномерную сходимость как последовательности самих функций, так и последовательности k -тых производных ($k = 1, 2, \dots, n$), то нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Для того чтобы множество $B \subset C_{[0, \omega]}^n$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы на сегменте $[0, \omega]$ функции $y(x) \in B$ и их производные до n -того порядка включительно были равномерно ограничены и равномерно непрерывны.*

ЛЕММА 2. ω -периодическое продолжение всякого решения уравнения

$$y(x) = \int_0^\omega G(x, s)[8k^3 y(s) - f(s, y(s), y'(s), y''(s))] ds \quad (3)$$

где $G(x, s)$ – функция Грина задачи

$$y''' + 8k^3 y = 0, \quad (4)$$

$$y^{(i)}(0) = y^{(i)}(\omega), \quad i = 0, 1, 2, \quad (5)$$

является периодическим решением уравнения (1).

Доказательство. Пусть $\bar{y}(x)$ – решение уравнения (3). Введем обозначение

$$\varphi(x) \equiv 8k^3 \bar{y}(x) - f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \bar{y}''(x)).$$

Тогда $\bar{y}(x)$ является решением уравнения (см. [2], стр. 40–42) $y''' + 8k^3 y = \varphi(x)$ с краевыми условиями (5) и следовательно, ω -периодическое продолжение $\bar{y}(x)$ является периодическим решением уравнения (1). Лемма доказана. ■

ТЕОРЕМА. Пусть существуют постоянные $C > 0$, $k \neq 0$ (обозначим $k_1 = |k|$) такие, что

$$\left| \frac{M\omega e^{k_1\omega} (3e^{2k_1\omega} + 3e^{k_1\omega} + 2)}{12k^2(e^{k_1\omega} - 1)(e^{2k_1\omega} - 1)} \right| \leq C, \quad (6)$$

где $M = \max\{|8k^3 y - f(x, y, y', y'')| : x \in [0, \omega], |y| \leq C, |y'| \leq 2k_1 C, |y''| \leq 4k^2 C\}$. Тогда уравнение (1) имеет по крайней мере одно ω -периодическое решение.

Доказательство. Исходя из определения найдем, что функцией Грина задачи (4)–(5) является функция, определенная выражением

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{e^{k(t+\omega-s)} \{e^{k\omega} \sin[\sqrt{3}k(s-t) + \frac{\pi}{6}] + \sin[\sqrt{3}k(t+\omega-s) - \frac{\pi}{6}]\}}{6k^2(1 + e^{2k\omega} - 2e^{k\omega} \cos \sqrt{3}k\omega)} \\ + \frac{e^{2k(s-\omega-t)}}{12k^2(1 - e^{-2k\omega})}, & 0 \leq t \leq s \leq \omega, \\ \frac{e^{k(t-s)} \{e^{k\omega} \sin[\sqrt{3}k(s+\omega-t) + \frac{\pi}{6}] + \sin[\sqrt{3}k(t-s) - \frac{\pi}{6}]\}}{6k^2(1 + e^{2k\omega} - 2e^{k\omega} \cos \sqrt{3}k\omega)} \\ + \frac{e^{2k(s-t)}}{12k^2(1 - e^{-2k\omega})}, & 0 \leq s < t \leq \omega. \end{cases}$$

В силу леммы 2 для доказательства теоремы достаточно показать существование решения уравнения (3).

Пусть

$$U = \{y(x) \in C_{[0, \omega]}^2 : |y(x)| \leq C, |y'(x)| \leq 2k_1 C, |y''(x)| \leq 4k^2 C\}.$$

Рассмотрим на ограниченном замкнутом выпуклом множестве U пространства $C_{[0,\omega]}^2$ оператор A , определенный выражением

$$(Ay)(x) = \int_0^\omega G(x,s)[8k^3y(s) - f(s,y(s),y'(s),y''(x))] ds. \quad (7)$$

В случае $k > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |(Ay)(x)| &\leq \left[\frac{e^{k\omega}(e^{k\omega} + 1)}{6k^2(1 - e^{k\omega})^2} + \frac{1}{12k^2(1 - e^{-2k\omega})} \right] \omega M \\ &= \frac{M\omega e^{k\omega}(3e^{2k\omega} + 3e^{k\omega} + 2)}{12k^2(e^{k\omega} - 1)(e^{2k\omega} - 1)} \leq C. \end{aligned} \quad (8)$$

Если же $k < 0$ то

$$\begin{aligned} |(Ay)(x)| &\leq \left[\frac{e^{k\omega} + 1}{6k^2(1 - e^{k\omega})^2} + \frac{e^{-2k\omega}}{12k^2(e^{-2k\omega} - 1)} \right] \omega M \\ &= \frac{M\omega e^{k_1\omega}(3e^{2k_1\omega} + 3e^{k_1\omega} + 2)}{12k^2(e^{k_1\omega} - 1)(e^{2k_1\omega} - 1)} \leq C. \end{aligned} \quad (8')$$

Аналогично

$$|(Ay)'(x)| \leq 2k_1C. \quad (9)$$

Хотя производные $\frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 G(x,s)}{\partial x^3}$, имеют разрыв при $t = s$, аналогично можно показать, что производные $(Ay)''(x)$, $(Ay)'''(x)$ существуют и выражаются соответственно формулами

$$(Ay)''(x) = \int_0^\omega \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} [8k^3y(s) - f(s,y(s),y'(s),y''(s))] ds, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (Ay)'''(x) = \\ \int_0^\omega \frac{\partial^3 G(x,s)}{\partial x^3} [8k^3y(s) - f(s,y(s),y'(s),y''(s))] ds + 8k^3y(x) - f(x,y,y',y''). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (10) и из выражения для $\frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}$ получим

$$|(Ay)''(x)| \leq 4k^2C. \quad (12)$$

Из (8), (8'), (9) и (12) вытекает, что оператор A отображает множество U в себя.

Покажем, что оператор A компактен. В силу (8), (8'), (9) и (12) множество $\{(Ay)(x) : y(x) \in U\}$ ограничено в пространстве $C_{[0,\omega]}^2$, т.е. функции $(Ay)^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2$ равномерно ограничены. Поэтому, из леммы 1 вытекает, что оператор A компактен.

Далее, пусть последовательность $\{y_n(x)\}$ функций принадлежащих множеству U , сходится (в смысле нормы (2)) к функции $y(x)$ (очевидно, $y(x)$ также принадлежит множеству U). Тогда последовательность $f(x, y_n, y_n', y_n'')$ сходится

к функции $f(x, y, y', y'')$ равномерно на $[0, \omega]$. Отсюда вытекает, что возможен предельный переход под знаком интеграла в (7), т.е. $Ay_n \rightarrow Ay$ и оператор A непрерывен на множестве U .

Таким образом, оператор A удовлетворяет всем условиям теоремы Шаудера. Следовательно, существует неподвижная точка оператора A , т.е. уравнение (3) имеет по крайней мере одно решение. Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Москва, 1970.
- [2] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Москва, 1969.

(поступило 20.04.2000.)

Математический факультет, Студентская площадь 16, Белград