

**THÉORÈMES DE POINT FIXE DANS LES CÔNES
BIEN BASÉS DANS LES ESPACES DE FRÉCHET. (II)**

Isac, G.

Soit $E(\tau)$ un espace de Fréchet qui a la propriété que la topologie τ est définie par une famille suffisante dénombrable de semi-normes $\{|\cdot|_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

On utilise les notions et la terminologie de l'ouvrage [1].

THÉORÈME 3. *Soit $K \subset E$ un cône convexe, fermé bien basé et $F \in E'$ une fonctionnelle uniformément positive sur K .*

On suppose que $f: K \rightarrow K$ est un opérateur compact et continu qui vérifie les hypothèses suivantes.

1° Il existe $r > 0$ et g un opérateur compact et continue,

$g: \{x \in K \mid F(x) = r\} \rightarrow K$, tel que:

$\inf\{F(g(x)) \mid x \in K, F(x) = r\} > 0$ et l'équation:

$y = f(y) + \lambda g(y)$; $0 < \lambda < +\infty$ n'a aucune solution

$x \in K_r = \{x \in K \mid F(x) = r\}$.

2° Il existe $R > r$ tel que l'équation:

$$x = \lambda \cdot f(x); \quad 0 < \lambda < 1$$

n'a aucune solution $x \in K_R = \{x \in K \mid F(x) = R\}$.

Alors, f a un point fixe $x_* \in K$ tel que: $r \leq F(x_*) \leq R$.

DÉMONSTRATION. On considère l'ensemble:

$$D^* = \left\{ x \in K \mid \frac{r}{2} \leq F(x) \leq R \right\}$$

et soit:

$$\beta = \inf_{F(x)=r} F(g(x)).$$

Soit:

$$M \geq F(f(z)) : \forall z \in K_r = \{z \in K \mid F(z) = r\}.$$

Le nombre M il existe parce que d'après la proposition 1. [1] L'ensemble K_r est borné, g est compact et F est continue.

On prend: $\alpha > 0$ tel que $\alpha \geq \frac{M+r}{\beta}$ et on considère l'opérateur: $h: D^* \rightarrow K$ donné par:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{r} \cdot f\left(\frac{r \cdot x}{F(x)}\right) + 2\alpha \frac{F(x)}{r} \left(\frac{r - F(x)}{r}\right) \cdot g\left(\frac{r \cdot x}{F(x)}\right) & \text{si: } \frac{r}{2} \leq F(x) \leq r \\ f(x) & \text{si: } r \leq F(x) \leq R \end{cases}$$

L'opérateur h est compact et continu.

On suppose qu'il existe

$$x \in K_{\frac{r}{2}} = \left\{x \in K \mid F(x) = \frac{r}{2}\right\}$$

tel que:

$$(\beta_1): h(x) = \lambda x \text{ où } \lambda \geq 0.$$

Soit $z = \frac{r \cdot x}{F(x)}$, alors d'après un calcul élémentaire de la relation (β_1) on obtient:

$$f(z) + \alpha \cdot g(z) = \lambda \cdot z.$$

Si on applique la fonctionnelle F et si on utilise le fait que $F(f(z)) \geq 0$ on obtient:

$$(\beta_2): \lambda \cdot F(z) = F(f(z)) + \alpha F(g(z)) \geq \alpha F(g(z)) - F(f(z)).$$

Comme $F(z) = r$ de la relation (β_2) on obtient:

$$\lambda r \geq \alpha \cdot \beta - M \geq r, \text{ donc } \lambda \geq 1.$$

Il résulte ainsi que l'opérateur h vérifie l'hypothèse (ii) du théorème 1.

L'opérateur h vérifie aussi l'hypothèse (i) du même théorème, parce que ça c'est une conséquence de la définition de h et de l'hypothèse (2).

Soit $x \in K_{\frac{r}{2}} = \{x \in K \mid F(x) = \frac{r}{2}\}$; on a dans ce cas:

$$\begin{aligned} F(h(x)) &= \frac{F(x)}{r} \cdot F\left(f\left(\frac{rx}{F(x)}\right)\right) + 2\alpha \frac{f(x)}{r} \left(\frac{r - F(x)}{r}\right) \cdot F\left(g\left(\frac{rx}{F(x)}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} F\left(f\left(\frac{rx}{F(x)}\right)\right) + \frac{1}{2} \alpha F\left(g\left(\frac{rx}{F(x)}\right)\right) \geq \frac{1}{2} \alpha \beta - \frac{1}{2} M \geq \frac{1}{2} r > 0. \end{aligned}$$

Comme cette relation est vraie pour tout $x \in K_{\frac{r}{2}}$ il résulte que:

$$\inf\{F(h(x)) \mid x \in K_{\frac{r}{2}}\} > 0$$

et de la remarque du [1] on a: $0 \notin \overline{h(K_{\frac{r}{2}})}$.

Parce que les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées on obtient que h a un point fixe $x_* \in D^*$.

Si on suppose que: $\frac{1}{2}r \leq F(x_*) < r$ on obtient:

$$z_0 = f(z_0) + 2\alpha \left(\frac{r - F(x_*)}{r} \right) \cdot g(z_0) \text{ où: } z_0 = \frac{rx_*}{F(x_*)}$$

ce qui contredit l'hypothèse (1).

On a donc $r \leq F(x_*) \leq R$ et le théorème est démontré.

THÉORÈME 4. *Soit $K \subset E$ un cône convexe, fermé bien basé et $F \in E'$ une fonctionnelle uniformément positive sur K .*

On suppose que $f: K \rightarrow K$ est un opérateur compact et continu qui vérifie les hypothèses suivantes.

1° Il existe $r > 0$ et g un opérateur compact et continu:

$g: \{x \in K \mid F(x) = r\} \rightarrow K$ tel que:

$F(g(x)) < r$ si $x \in K_r = \{x \in K \mid F(x) = r\}$ et

$(x \in K) \& (x = \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x); 0 < \lambda < 1) \Rightarrow F(x) \neq r$.

2° Il existe $R > r$ et h un opérateur compact et continu

$h: \{x \in K \mid F(x) = R\} \rightarrow K$ tel que:

$\inf\{F(h(x)) \mid x \in K, F(x) = R\} > 0$ et

$(z \in K) \& (z = f(z) + \lambda h(z); 0 < \lambda < +\infty) \Rightarrow F(z) \neq R$.

Alors f a un point fixe $x_0 \in K$ tel que: $r \leq F(x_0) \leq R$.

DÉMONSTRATION. *Soit:*

$$M \geq \sup\{F(f(x)) \mid x \in K, F(x) = R\},$$

$$\gamma = \inf\{F(h(x)) \mid x \in K, F(x) = R\}.$$

On prend:

$$\beta \in [0, r] \text{ et } \alpha \geq \frac{R + M}{\gamma}.$$

On considère l'opérateur,

$$k: \{x \in K \mid r - \beta \leq F(x)\} \rightarrow K \text{ donné par:}$$

$$k(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{r} \left(1 + \frac{F(x) - r}{\beta} \right) \cdot f \left(\frac{rx}{F(x)} \right) + \frac{F(x)}{r} \left(\frac{r - F(x)}{\beta} \right) \cdot g \left(\frac{rx}{F(x)} \right) \\ \text{si: } r - \beta \leq F(x) \leq r \\ f(x) \text{ si: } r \leq F(x) \leq R \\ \frac{F(x)}{R} \cdot f \left(\frac{Rx}{F(x)} \right) + \frac{F(x)}{R} \left(\frac{F(x) - R}{R} \right) \cdot \alpha \cdot h \left(\frac{R}{F(x)} \cdot x \right) \text{ si: } R \leq F(x). \end{cases}$$

L'opérateur k est continu.

On démontre que l'opérateur k vérifie les hypothèses du théorème 2. [1] sur l'ensemble: $\{x \in K \mid r - \beta \leq F(x) \leq n \cdot R\}$ où le nombre n sera déterminé.

Soit $x \in K$ tel que $F(x) = r - \beta$. Si on suppose que: $k(x) = \lambda x$ où $\lambda > 0$ alors,

$$(\beta_3): \lambda x = \frac{F(x)}{r} \cdot g \left(\frac{rx}{F(x)} \right) \Rightarrow \lambda \cdot \frac{rx}{F(x)} = g \left(\frac{rx}{F(x)} \right).$$

Comme $F \left(\frac{rx}{F(x)} \right) = r$, si on applique la fonctionnelle F à la relation (β_3) , de l'hypothèse (1) on obtient: $\lambda r < r$ c'est-à-dire $\lambda < 1$.

Donc, l'hypothèse (ii) du théorème 2 est vérifiée sur l'ensemble:

$$\{x \in K \mid r - \beta \leq F(x) \leq nR\}$$

pour tout $n \in N$. On suppose maintenant que: $F(x) > R$.

On obtient dans ce cas:

$$\begin{aligned} F(k(x)) &= \frac{F(x)}{R} \left[F \left(f \left(\frac{Rx}{F(x)} \right) \right) + \frac{F(x) - R}{R} \cdot \alpha \cdot F \left(h \left(\frac{R \cdot x}{F(x)} \right) \right) \right] \geq \\ &\geq \frac{F(x)}{R} \left[\frac{F(x) - R}{R} \cdot \gamma \cdot \alpha - M \right]. \end{aligned}$$

Si $n_0 \in N$, $n_0 > 1$ est fixé et suffisamment grand et si on prend:

$$K_{n_0 R} = \{x \in K \mid F(x) = n_0 R\}, \text{ alors, } F(k(x)) \geq n_0 [(n_0 - 1) \cdot \alpha \cdot \gamma - M] > 0$$

d'où on obtient que:

$$\inf\{F(k(x)) \mid x \in K, F(x) = n_0 \cdot R\} > 0$$

et donc $0 \notin \overline{k(K_{n_0 R})}$.

On suppose donc, $k(x) = \lambda x$ où $\lambda > 0$ et $F(x) = n_0 R$. Si on met: $z = \frac{Rx}{F(x)}$ on obtient:

$$\lambda z = f(z) + \left(\frac{F(x) - R}{R} \right) \cdot \alpha \cdot h(z) = f(z) + (n_0 - 1)\alpha h(z)$$

et si on applique la fonctionnelle F il résulte:

$$\lambda \cdot F(z) = (n_0 - 1)\alpha F(h(z)) + F(f(z)) \geq (n_0 - 1)\alpha\gamma - M$$

parce que F est positive, et enfin, $\lambda \cdot R \geq (n_0 - 1)\alpha\gamma - M$ d'où:

$$\lambda \geq \frac{1}{R}[(n_0 - 1)\alpha\gamma - M].$$

La définition de $\alpha \Rightarrow$

$$\lambda \geq \frac{1}{R} \left[\frac{R + M}{\gamma} \cdot (n_0 - 1)\gamma - M \right] = \frac{1}{R} [(R + M)(n_0 - 1) - M] \geq 1.$$

Donc, k vérifie l'hypothèse (i) du théorème 2.

Comme l'opérateur k est compact sur l'ensemble

$$\{x \in K \mid r - \beta \leq F(x) \leq n_0 R\}.$$

D'après le théorème 2 on obtient que l'opérateur k a un point fixe x_0 dans l'ensemble:

$$\{x \in K \mid r - \beta \leq F(x) \leq n_0 R\}.$$

Si $R < F(x_0) \leq n_0 R$ et si on met: $z_0 = \frac{R x_0}{F(x_0)}$ on obtient:

$$z_0 = f(z_0) + \frac{F(x_0) - R}{R} \cdot \alpha \cdot h(z_0)$$

ce qui contredit l'hypothèse 2°).

Si on suppose: $r - \beta \leq F(x_0) < r$ et si on met: $z_0 = \frac{r x_0}{F(x_0)}$ on obtient:

$$z_0 = \left(1 + \frac{F(x_0) - r}{\beta} \right) \cdot f(z_0) + \frac{r - F(x_0)}{\beta} \cdot g(z_0)$$

ce qui contredit l'hypothèse 1°).

Il reste alors que $r \leq F(x_0) \leq R$ ce qui démontre le théorème.

REFERENCES

- [1] Isac, G., *Théorèmes de point fixe dans les cônes bien basés dans les espaces de Fréchet*. (I).

Département de mathématiques
Collège militaire royal
Saint-Jean, Québec, J0J 1R0
Canada