

SUR LES LIMITES DES ZÉROS DU POLYNÔME

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

D. M. Simeunović

(Communiqué le 9. XI 1979)

G. Pólya et G. Szegő ont considéré, dans [1] (tome, I, p. 109), le polynôme

$$(1) \quad 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

de degré impair n , et démontré, que $n \rightarrow \infty$, on a pour son unique racine réelle $-x_n$

$$(2) \quad x_n = ns + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln n + \frac{s}{1+s} \ln \left(\sqrt{2\pi} \frac{1+s}{s} \right) + o(1),$$

où s est la racine positive de l'équation

$$se^{1+s} = 1.$$

Dans cet article on considère le polynôme (1) de degré n impair ou pair et on va démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME. *Tout zéro z_k ($k = 1, 1, \dots, n$) du polynôme (1) satisfait à l'inégalité*

$$(3) \quad (n+1)s[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}} < |z_k| \leq n,$$

où s est la racine positive de l'équation

$$(4) \quad se^{1+s} = 1 \quad (0,278 < s < 0,279)$$

et où on a

$$\alpha_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}.$$

COROLLAIRE 1. Pour tout zéro $z_k (k = 1, 2, \dots, n)$ du polynôme (1) on a les inégalités

$$(5) \quad (n+1)s + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s\alpha_n} \ln(n+1) + \frac{s}{1+s\alpha_n} \ln[\sqrt{2\pi}(1-s\alpha_n)] < |z_k| \leq n.$$

COROLLAIRE 2. Pour tout zéro $z_k (k = 1, 2, \dots, n)$ du polynôme (1) on a les inégalités

$$(6) \quad ns + \frac{s}{1+s} \ln n + \frac{s}{1+s} \ln\left(\sqrt{2\pi} \frac{1+s}{s}\right) - \frac{0,25}{\sqrt[4]{n+1}} - 0,25 < |z_k| \leq n$$

et les inégalités

$$(7) \quad ns + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln n < |z_k| \leq n.$$

Démonstration du théorème. Soit $z_k = x_k + iy_k$ un zéro arbitraire du polynôme (1). D'après [1] (tome I, p. 116, problème 23), il résulte que

$$(8) \quad |z_k| \leq n.$$

(Voir aussi [2]).

Pour chaque zéro du polynôme (1) on a ensuite

$$\begin{aligned} |e^{z_k}| = e^{x_k} &= \left| \frac{z_k^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{z_k^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{z_k^{n+3}}{(n+3)!} + \dots \right| \\ &\leq \frac{|z_k|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{|z_k|}{n+2} + \frac{|z_k|^2}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) \\ &\leq \frac{|z_k|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{|z_k|}{n+2} + \frac{|z_k|^2}{(n+2)^2} + \dots \right) = \frac{|z_k|^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{1 - \frac{|z_k|}{n+2}}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(9) \quad e^{x_k} \leq \frac{|z_k|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z_k|}{n+2}}.$$

Démontrons que

$$(10) \quad |z_k| > (n+1)s[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}$$

Supposons qu'on a

$$(11) \quad \begin{aligned} |z_k| &\leq (n+1)s[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}} = \\ &= \frac{n+1}{e^{1+s}} [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}} \end{aligned}$$

On obtient de (9)

$$(12) \quad e^{x_k} \leq \frac{(n+1)^{n+1} [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)}}}{(n+1)! e^{n+1} \cdot e^{(n+1)s} \left\{ 1 - \frac{(n+1)s}{n+2} [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}} \right\}}$$

D'après la formule de Stirling

$$(n+1)! > \frac{(n+1)^{n+1} \sqrt{2\pi(n+1)}}{e^{n+1}}$$

on aura, de (12)

$$(13) \quad e^{x_k} < \frac{1}{[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{s\alpha_n}{2(1+s\alpha_n)}} \cdot e^{(n+1)s} \cdot \frac{1 - \frac{(n+1)s}{n+2} [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}}{1-s\alpha_n}}$$

où on a posé

$$\sqrt{2\pi(n+1)} = \frac{[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)}} \cdot [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{s\alpha_n}{2(1+s\alpha_n)}}}{1-s\alpha_n}.$$

On va démontrer maintenant que

$$(14) \quad [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(2+s\alpha_n)(n+1)}} < e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \alpha_n.$$

De l'inégalité

$$\frac{\ln t}{t-1} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (t > 0 \text{ et } t \neq 1)$$

obtenue par J. Karamata dans [3] (voir aussi [4]), on a l'inégalité

$$(15) \quad t \leq e^{\frac{t-1}{\sqrt{t}}} \quad (t > 1).$$

Si on pose, dans l'inégalité (15) $t = 2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1) &\leq e^{\frac{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)-1}{\sqrt{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)}}} < e^{\frac{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)}{\sqrt{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)}}} = \\ &= e^{\frac{\sqrt{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)}}{\sqrt{n+1}}}, \end{aligned}$$

d'où

$$(16) \quad x = [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}} < e^{\frac{\sqrt{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)}}{2(1+s\alpha_n)\sqrt{n+1}}} < e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \alpha_n,$$

puisque $\frac{\sqrt{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)}}{2(1+s\alpha_n)} = \frac{\sqrt{2\pi} \left(1 - se^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right)}{2 \left(1 + e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right)} < 1$, ce qui signifie que l'inégalité

(14) est valable.

A la suite de (16) on a

$$(17) \quad \frac{1 - \frac{(n+1)s}{n+2} \cdot x}{1-s\alpha_n} > \frac{1 - \frac{(n+1)s}{n+2} \cdot \alpha_n}{1-s\alpha_n} > \frac{1-s\alpha_n}{1-s\alpha_n} = 1, \text{ e'est-à-dire}$$

$$\frac{1 - \frac{(n+1)s}{n+2} [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}}{1-s\alpha_n} > 1.$$

Nous démontrerons aussi que

$$(18) \quad [2\pi(1 - s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{s\alpha_n}{2(1+s\alpha_n)}} e^{(n+1)s} \geq e^{(n+1)s[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)}}}.$$

Pour obtenir l'inégalité (18), nous démontrerons d'abord l'inégalité

$$(19) \quad x^{\alpha_n} e \geq e^x \quad (1 \leq x \leq \alpha_n).$$

Considérons la fonction

$$f(x) = x^{\alpha_n} e^{1-x} - 1$$

qui donne $f'(x) = x^{\alpha_n-1} e^{1-x} (\alpha_n - x)$. Comme $f'(x) \geq 0$ pour $1 \leq x \leq \alpha_n$ et comme $f(1) = 0$, nous avons $f(x) \geq 0$ pour $1 \leq x \leq \alpha_n$, ce qui signifie que l'inégalité (19) est valable.

En utilisant (19) on obtient

$$(20) \quad x^{\alpha_n(n+1)s} e^{(n+1)s} \geq e^{(n+1)sx} \quad (1 \leq x \leq \alpha_n).$$

En posant, dans (20) $x = [2\pi(1 - s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}$, pour $1 \leq x \leq \alpha_n$, on obtient l'inégalité (18).

En prenant en considération les inégalités (17) et (18), l'inégalité (13) se réduit à

$$(21) \quad e^{x_k} < \frac{1}{e^{(n+1)s[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}}}.$$

Il résulte de l'inégalité (21)

$$x_k < -(n+1)s[2\pi(1 - s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}},$$

c'est-à-dire

$$(22) \quad |x_k| > (n+1)s[2\pi(1 - s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}.$$

En supposant que (11) est valable, nous avons obtenu (22), c'est-à-dire $|x_k| > |z_k|$, ce qui est impossible. Cette contradiction démontre (10).

On obtient, de (8) et de (10), l'inégalité (3), d'où il résulte que le théorème est démontré.

Démontrons encore les corollaires 1 et 2.

Si on pose, dans l'inégalité $e^y \geq y$ ($y \geq 0$)

$$y = \ln[2\pi(1 - s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}},$$

on obtiendra

$$(23) \quad [2\pi(1 - s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}} \geq 1 + \frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)} \ln[2\pi(1 - s\alpha_n)^2(n+1)].$$

A la suite de l'inégalité (23), l'inégalité (10) se réduit à

$$(24) \quad |z_k| > (n+1)s + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s\alpha_n} \ln(n+1) + \frac{s}{1+s\alpha_n} \ln[\sqrt{2\pi}(1-s\alpha_n)],$$

ce qui, avec (8), donne (5).

Pour démontrer (6) nous ferons usage des inégalités suivantes:

$$(25) \quad e^t \leq 1 + 2t \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$(26) \quad \frac{\ln p}{p} \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \quad (p \geq 1),$$

$$(27) \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Pour $t = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, on obtiendra, de (25)

$$(28) \quad \alpha_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n+1}},$$

d'où

$$1 + s\alpha_n \leq 1 + s + \frac{2s}{\sqrt{n+1}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1+s\alpha_n} \geq \frac{1}{1+s+\frac{2s}{\sqrt{n+1}}} = \frac{1}{1+s} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{1+s} \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}}} \geq \frac{1}{1+s} \left[1 - \frac{s}{1+s} \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right],$$

de sorte que

$$(29) \quad \frac{1}{2} \frac{s}{1+s\alpha_n} \geq \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

On a, de (28) $-s\alpha_n \geq -s - \frac{2s}{\sqrt{n+1}}$, d'où

$$1 - s\alpha_n \geq 1 - s - \frac{2s}{\sqrt{n+1}} = (1+s) - 2s - \frac{2s}{\sqrt{n+1}},$$

c'est-à-dire

$$(30) \quad 1 - s\alpha_n \geq (1+s) \left[1 - \frac{2s}{1+s} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right].$$

On obtient de (29)

$$(31) \quad \frac{s}{1+s\alpha_n} \geq \frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

En usant des inégalités (29), (30) et (31), on obtient de (24)

$$\begin{aligned}
 (32) \quad |z_k| &> (n+1)s + \left[\frac{1}{2} \frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right] \ln(n+1) + \\
 &+ \left[\frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right] \ln \left\{ \sqrt{2\pi}(1+s) \left[1 - \frac{2s}{1+s} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right] \right\} - \\
 &= (n+1)s + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln(n+1) + \frac{s}{1+s} \ln[\sqrt{2\pi}(1+s)] - \\
 &- 2 \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \left[\frac{\ln \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{\ln \sqrt{2\pi}(1+s)}{\sqrt{n+1}} \right] + \\
 &+ \left[\frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right] \ln \left[1 - \frac{2s}{1+s} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right].
 \end{aligned}$$

On obtient, de l'inégalité (26), pour $p = \sqrt{n+1}$

$$(33) \quad \frac{\ln \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}.$$

En considérant les inégalités (27) et (33), on obtient ensuite de (32)

$$\begin{aligned}
 |z_k| &> (n+1)s + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln(n+1) + \frac{s}{1+s} \ln[\sqrt{2\pi}(1+s)] - \\
 &- 2 \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \{ 1 + \ln[\sqrt{2\pi}(1+s)] \} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} + \\
 &+ \left[\frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right] \ln \left[1 - \frac{2s}{1+s} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right],
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(34) \quad |z_k| > (n+1)s + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln(n+1) + \frac{s}{1+s} \ln[\sqrt{2\pi}(1+s)] - \frac{0,25}{\sqrt[4]{n+1}} - 0,25$$

puisque

$$\begin{aligned}
 &-2 \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \{ 1 + \ln[\sqrt{2\pi}(1+s)] \} > -0,25, \\
 &\left[\frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s} \right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right] \ln \left[1 - \frac{2s}{1+s} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right] > -0,25
 \end{aligned}$$

On obtient de (34)

$$(35) \quad |z_k| > ns + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln n + \frac{s}{1+s} \ln \left(\sqrt{2\pi} \frac{1+s}{s} \right) - \frac{0,25}{\sqrt[4]{n+1}} - 0,25,$$

où on a posé $s = \frac{s}{1+s} \ln e^{1+s} = \frac{s}{1+s} \ln \frac{1}{s}$, à la suite de $\ln(n+1) > \ln n$. Les inégalités (35) et (8) donnent (6).

À la suite de

$$\frac{s}{1+s} \ln\left(\sqrt{2\pi} \frac{1+s}{s}\right) > \frac{0,25}{\sqrt[4]{n+1}} + 0,25$$

on obtient de (35)

$$|z_k| > ns + \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln n,$$

ce qui, avec (8), donne (7).

Nous avons démontré, de cette manière, le corollaire 2.

Comme on a

$$\frac{0,25}{\sqrt[4]{n+1}} < 0,25,$$

on obtient de (35)

$$|z_k| > ns \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \ln n + \frac{s}{1+s} \ln\left(\sqrt{2\pi} \frac{1+s}{s}\right) - 0,5.$$

REFERENCES

- [1] G. Pólya and G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Zadaci i teoremi iz analiza, perevod s nemeckogo D. A. Rajkova, Moskva (1956).*
- [2] D. M. Simeunović, *Sur les zéros du polynôme $\sum_{v=1}^n \frac{z^v}{v}$; $n = 1, 2, \dots$* , Matematički vesnik **2(17)** 1965, 259–261.
- [3] J. Karamata, *Vesnik Društva matematičara i fizičara SRS, knjiga I, sveska 1(1949), 78–79, Pitanja i zadaci.*
- [4] D. S. Mitrinović (saradnik P. M. Vasić), *Analitičke nejednakosti*, Beograd 1970.