

## UN THÉORÈME SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE QUADRIQUES À JACOBIENNE INDETERMINÉE

Lando Degoli

**Résumé.** On démontre la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire de quadriques de  $S_r$  soit à matrice Jacobienne identiquement nulle de caractéristique  $r - k$ .

Un système linéaire  $L_d$  ( $d \geq r$ ) de quadriques de l'espace complexe  $S_r$  à  $r$  dimensions de coordonnées:  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_r$  est exprimé par l'équation:

$$\lambda^0 f_0 + \lambda^1 f_1 + \lambda^2 f_2 + \dots + \lambda^d f_d = 0$$

avec:  $f_q = a_q^{ik} x_i x_k$ .

Prenons en considération la matrice Jacobienne à  $d+1$  lignes et  $r+1$  colonnes:

$$J = \|\partial f_i / \partial x_s\| \quad (i = 0, 1, 2, \dots, d; \quad s = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (1)$$

En général la matrice Jacobienne égalée à zéro est le lieu géométrique des points de  $S_r$  conjugués entre eux — mêmes par rapport à toutes les quadriques du système. Si la matrice Jacobienne est identiquement nulle cela signifie que tout l'espace est lieu de points conjugués.

Si la caractéristique de la Jacobienne est  $r$ , un point générique de  $S_r$  est conjugué avec un seul point. Si au contraire la caractéristique est  $r - h$  avec  $h > 0$  un point quelconque de  $S_r$  est conjugué avec un espace  $S_h$ .

**Premises.** Nous considérerons un système linéaire de quadriques  $L_d$  ( $d \geq r$ ) qui ne possède aucun système subordonné  $L_g$  ( $r \leq g \leq d - 1$ ) possédant une Jacobienne identiquement nulle de caractéristique  $r - k - 1$  ( $k \geq 0$ ).

Considérons le théorème suivant.

---

*AMS Subject Classification* (1970): Primary 54H25, Secondary 47H10.

*Key words and phrases:* Mappings with contractive iteration at a point, fixed points, convergence of iterations.

*La condition nécessaire et suffisante pour que le système linéaire de quadriques  $L_d$  ( $d \geq r$ ), satisfaisant aux prémisses précédentes, ait la Jacobienne identiquement nulle de caractéristique  $r - k$  ( $k \geq 0$ ), est que les quadriques du système qui passent par un point quelconque de  $S_r$  possèdent en commun un  $S_{k+1}$ .*

Avant tout nous démontrons ce cas particulier:

*Si le système  $L_d$  est à Jacobienne identiquement nulle de caractéristique  $r$ , les quadriques du système qui passent par un point ont en commun une droite.*

Si la Jacobienne est identiquement nulle de caractéristique  $r$ , cela signifie que tous les déterminants de la matrice (1) d'ordre  $r + 1$  sont identiquement nuls.

Considérons le déterminant donné par  $r + 1$  quadriques quelconques. On ne nuit pas à la généralité en choisissant les premières  $r$  quadriques du système:

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_{r-1}, f_r.$$

On aura:

$$D = \begin{vmatrix} \partial f_0 / \partial x_0 & \partial f_1 / \partial x_0 & \dots & \partial f_r / \partial x_0 \\ \partial f_0 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_r / \partial x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial f_0 / \partial x_r & \partial f_1 / \partial x_r & \dots & \partial f_r / \partial x_r \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

Les mineurs d'ordre  $r$  extraits du déterminant  $D$  ne peuvent pas être tous nuls, autrement le système linéaire  $L_r$  déterminé par les  $r + 1$  quadriques précédentes aurait la Jacobienne identiquement nulle de caractéristique  $< r$ , et pour cela il existerait dans  $L_d$  un système subordonné avec la Jacobienne identiquement nulle de caractéristique inférieure à  $r$ , contredisant les prémisses du théorème.

Il est donc nécessaire qu'au moins un des déterminants d'ordre  $r - 1$  ne soit pas zéro. Nous pouvons supposer que c'est le mineur obtenu en éliminant la dernière ligne et la dernière colonne. Nous l'indiquerons avec  $A$ :

$$A = \begin{vmatrix} \partial f_0 / \partial x_0 & \partial f_1 / \partial x_0 & \dots & \partial f_{r-1} / \partial x_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial f_0 / \partial x_{r-1} & \partial f_1 / \partial x_{r-1} & \dots & \partial f_{r-1} / \partial x_{r-1} \end{vmatrix}$$

Prenons en considération la matrice extraite du déterminant  $D$  formée avec les premières  $r$  lignes et indiquons avec:

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{r-1}$$

les mineurs d'ordre  $r$  qu'on obtient en substituant à la première, deuxième, etc., colonne de  $A$  la dernière colonne de la matrice. Un seul de ces déterminants peut être nul, parce que si deux déterminants d'ordre  $r$  sont nuls dans la matrice à  $r + 1$  colonnes et  $r$  lignes, par un théorème de Kronecker tous les déterminants seraient nuls et par conséquent il serait nul:  $A$ , ce qui est impossible.

Puisque le déterminant  $D$  est identiquement nul les quadriques ne sont pas indépendantes et une quelconque, par exemple  $f_r$  sera fonction des autres. Nous aurons:

$$f_r = F(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{r-1}). \quad (3)$$

Mais parce que les  $f_i$  sont toutes des formes de deuxième ordre en remplaçant  $x_0, x_1, \dots, x_r$  par  $tx_0, tx_1, \dots, tx_r$  on obtient:

$$t^2 f_r = F(t^2 f_0, t^2 f_1, \dots, t^2 f_{r-1})$$

ce qui montre que  $F$  est une fonction homogène de premier degré.

En dérivant l'expression (3) on obtient:

$$\frac{\partial F}{\partial f_0} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_0} + \dots + \frac{\partial F}{\partial f_{r-1}} \frac{\partial f_{r-1}}{\partial x_0} = \frac{\partial f_r}{\partial x_0}$$


---


$$\frac{\partial F}{\partial f_0} \frac{\partial f_0}{\partial x_{r-1}} + \frac{\partial F}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_{r-1}} + \dots + \frac{\partial F}{\partial f_{r-1}} \frac{\partial f_{r-1}}{\partial x_{r-1}} = \frac{\partial f_r}{\partial x_{r-1}},$$
(4)

un système de premier degré, ce qui donne aisément les dérivées partielles de la fonction  $F$ , c'est à dire:

$$\partial F / \partial f_0 = -A_0 / A, \quad \partial F / \partial f_1 = -A_1 / A, \dots, \partial F / \partial f_{r-1} = -A_{r-1} / A. \quad (5)$$

Considérons un point  $x$  de  $S_r$  de coordonnées:  $x_0, x_1, \dots, x_r$ , et soit  $x'$  de coordonnées:  $x'_0, x'_1, \dots, x'_r$  son conjugué par rapport à toutes les quadriques du système.

La droite qui unit deux points sera donnée par:

$$y_i = t_i x_i + t_2 x'_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r). \quad (6)$$

En remplaçant (6) dans toutes les quadriques, on obtient pour la quadrique générique  $f_m$ :

$$f_m(y) = f_m(x)t_1^2 + f_m(x')t_2^2 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, r). \quad (7)$$

parce que les termes  $2a_m^{ik}x_i x'_k$  sont nuls, les points  $x$  et  $x'$  étant conjugués.

En remplaçant les équations (7) dans les équations (3) et en dérivant par rapport à  $t_1$  et  $t_2$  on obtient:

$$\partial f_r / \partial t_1 = \partial F / \partial f_s \cdot \partial f_s / \partial t_1$$

$$(s = 0, 1, 2, \dots, r - 1) \quad (8)$$

$$\partial f_r / \partial t_2 = \partial F / \partial f_s \cdot \partial f_s / \partial t_2$$

En dérivant les équations (7) on a:

$$\partial f_m / \partial t_2 = 2t_1 f_m(x), \quad \partial f_m / \partial t_1 = 2t_2 f_m(x') \quad (m = 0, 1, 2, \dots, r).$$

Remplaçons ces dernières dans (8). On obtient:

$$f_r(x) = \partial F / \partial f_s \cdot f_s(x), \quad f_r(x') = \partial F / \partial f_s \cdot f_s(x') \quad (s = 0, 1, 2, \dots, r - 1).$$

Et enfin pour les équations (5):

$$A_0 f_0(x) + A_1 f_1(x) + \dots + A_{r-1} f_{r-1}(x) + A f_r(x) = 0$$

$$A_0 f_0(x') + A_1 f_1(x') + \dots + A_{r-1} f_{r-1}(x') + A f_r(x') = 0 \quad (9)$$

Les déterminants  $A, A_0, A_1, \dots, A_{-1}$ , sont calculés dans un point générique de  $S_r$ , par exemple en  $x$ , et un seul d'entre eux est au maximum nul.

En multipliant la première des équations (7) par  $t_1$  et la deuxième par  $t_2^2$  et additionnant après, on obtient:

$$A_0 f_0(y) + A_1 f_1(y) + \dots + A_{r-1} f_{r-1}(y) + A f_r(y) = 0 \quad (10)$$

où  $y$  est le point générique de la droite:  $y_i = t_1^2 x_i + t_2^2 x'_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, r$ ).

Considérons deux quadriques quelconques du système:  $f_h$  et  $f_k$ . Nous savons qu'on peut écrire pour (7):

$$f_h(y) = f_h(x)t_1^2 + f_h(x')t_2^2, \quad f_k(y) = f_k(x)t_1^2 + f_k(x')t_2^2 \quad (11)$$

On en déduit:

$$t_1^2 = 1/B(f_h(y)f_k(x') - f_k(y)f_h(x')), \quad t_2^2 = 1/B(f_h(x)f_k(y) - f_k(x)f_h(y))$$

avec:

$$B = \begin{vmatrix} f_h(x) & f_h(x') \\ f_k(x) & f_k(x') \end{vmatrix}.$$

En remplaçant  $t_1^2$  et  $t_2^2$  dans (7) on trouve que la quadrique générique  $f_m(y)$  est une combinaison linéaire des deux quadriques  $f_h(y)$  et  $f_k(y)$ . C'est à dire que le premier membre de (10) évalue une combinaison linéaire à coefficients constants de  $f_h(x)$  et  $f_k(x)$  et par (11) on peut écrire:

$$a[f_h(x)t_1^2 + f_h(x')t_2^2] + b[f_k(x)t_1^2 + f_k(x')t_2^2] = 0.$$

L'expression du premier membre est identiquement nulle par rapport aux variables  $t_1$  et  $t_2$  et on arrive aux relations:

$$a f_h(x) + b f_k(x) = 0, \quad a f_h(x') + b f_k(x') = 0$$

avec  $a$  et  $b$  non nulles en même temps.

Ainsi il faut que le déterminant:

$$\begin{vmatrix} f_h(x) & f_k(x) \\ f_h(x') & f_k(x') \end{vmatrix}$$

soit nul. C'est à dire:  $f_h(x)/f_h(x') = f_k(x)/f_k(x') = c$ . On obtient:  $f_h(x) = c f_h(x')$ ,  $f_k(x) = c f_k(x')$ ,  $c$  étant une constante non nulle.

Puisque  $f_h$  et  $f_k$  sont deux quadriques génériques, ces relations seront vérifiées par une quadrique quelconque  $f_m$  du système  $L_d$ . Nous aurons:

$$f_m(x) = c f_m(x') \quad (12)$$

On en déduit que toutes les quadriques du système  $L_d$  qui passent par un point  $x$  passent aussi par son conjugué  $x'$  et réciproquement. Si  $x$  est situé sur la quadrique  $f_m$  on aura:  $f_m(x) = 0$  et pour (12):  $f_m(x') = 0$ , en remarquant que

$x'$  est le conjugué de  $x$  par rapport à toutes les quadriques de  $L_d$ . Il en résulte:  $t_1^2 f_m(x) + t_2^2 f_m(x') = 0$  et pour (7):  $f_m(y) = 0$  où  $y$  est le point générique de la droite  $xx'$ .

Donc la droite en question appartient toute entière à la quadrique  $f_m$ . On en déduit que toutes les quadriques qui passent par  $x$  contiennent la droite  $xx'$ .

Supposons maintenant que la Jacobienne du système  $L_d$  soit identiquement nulle de caractéristique  $r - k$ .

Cela signifie qu' un point  $x$  de  $S_r$  à pour conjugué un  $S_k$ .

Considérons un générique  $S_{r-k}$  qui passe par  $x$ . Le système  $L_d$  sera entrecoupé par le  $S_{r-k}$  suivant un système linéaire  $S_d$  de quadriques de  $S_{r-k}$ , qui a son tour coupera le  $S_k$  en un point  $x'$ , qui résulte le conjugué de  $x$  par rapport à toutes (es quadriques du système  $L_d$ ).

Nous pourrons choisir pour coordonnées de  $S_{r-k}$ :  $x_0, x_1, \dots, x_{r-k}$ , en annulant toutes les autres coordonnées. C est à dire en écrivant:  $x_{r-k+1} = x_{r-k+2} = \dots = x_r = 0$ .

Les équations des quadriques  $f_0, f_1, \dots, f_r$  seront du type:

$$f_i(x_0, x_1, \dots, x_{r-k}, 0, 0, 0, \dots, 0).$$

Les dérivées partielles:  $\partial f_i / \partial x_s$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, r - k$ ) pour  $x_{r-k+1} = x_{r-k+2} = \dots = x_r = 0$ , seront toutes nulles. La matrice Jacobienne du système  $L_d$ :

$$\|\partial f_i / \partial x_s\| \begin{array}{l} i = 0, 1, 2, \dots, d' \\ s = 0, 1, 2, \dots, r - k \end{array}$$

sera identiquement nulle.

Elle ne pourra pas avoir de caractéristique supérieure à  $r - k$  parce que ses lignes ne sont qu'en nombre  $r - k + 1$ , et elle ne pourra pas avoir de caractéristique inférieure à  $r - k$ , sinon le point  $x$  aurait pour conjugué un  $S_g$  avec  $g > 0$  et non le seul point  $x'$ .

Il résulte que le système  $L_d$  de  $S_{r-k}$  a la caractéristique  $r - k$ . Cela permet de conclure, pour la première partie du théorème, que les quadriques de  $L_d$  qui passent par  $x$  auront en commun la droite  $xx'$ .

Puisque nous pouvons dire la même chose pour tous les  $S_k$  qui passent par  $x$  on en déduit que les quadriques de  $L_d$  qui passent par  $x$  auront en commun le  $S_{k+1}$  joignant le point  $x$  avec  $S_k$ .

La condition du Théorème est donc nécessaire.

Elle est aussi suffisante. En effet, si toutes les quadriques de  $L_d$ , qui ont en commun un point  $x$ , ont en commun un  $S_{k+1}$ , il est évident que le point  $x$  a pour conjugué le même  $S_{k+1}$  par rapport du système  $L_{d-1}$  de quadriques qui passent par  $x$ . Une autre quadrique du système  $L_d$  qui ne passe pas par  $x$  a pour conjugué de  $x$  un hyperplan qui coupera le  $S_{k+1}$  dans un  $S_k$  et il en résulte que  $x$  aura pour conjugué par rapport au système  $L_d$  un  $S_k$ .

Cela signifie que la matrice Jacobienne est identiquement nulle de caractéristique  $r - k$ , comme on voulait démontrer.

**Observation.** Les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne identiquement nulle de caractéristique  $r - k$ , qui possèdent des systèmes subordonnés à Jacobienne identiquement nulle de caractéristique inférieure, ne satisfont pas au théorème.

Par exemple considérons un système  $L_d$  avec  $d \geq r + 1$  à Jacobienne identiquement nulle de caractéristique  $r$ , qui possède un système subordonné  $L_{d-1}$  à Jacobienne identiquement nulle de caractéristique  $r - 1$ . Les quadriques de  $L_{d-1}$  qui passent par un point  $x$  ont par le théorème démontré un plan en commun.

Alors une quadrique ultérieure qui n'appartient pas à  $L_{d-1}$  et qui passe par le point  $x$  sera coupée par le plan dans une conique et par conséquent les quadriques de  $L_d$  qui passent par  $x$  ont en commun une conique.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Terracini, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*, Atti Accad. Sci. Torino, Nota II, **51** (1916); Nota III, **55** (1919-20).
- [2] C. Bonferroni, *Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare*, R. Accad. Sci. Torino **50** (1914-15).
- [3] L. Muracchini, *Sulle Varietà  $V_5$  i cui spazi tangenti ricoprono una varietà  $W$  di dimensione inferiore alla ordinaria*, (Parte II), Riv. Mat. Univ. Parma, **3** (1952), 75-89.
- [4] L. Degoli, *Sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla di caratteristica  $\leq r$* , Accad. Sci. Bologna, Rend. Ser. XI, **10** (1963).

Istituto matematico  
dell' Università  
41100 Modena  
Italia

(Received 25 04 1981)