PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 36 (50), 1984, pp.35–44

ГРУППЫ ПРОСТОЙ И КРАТНОЙ АНТИСИММЕТРИИ БОРДЮРОВ

Славик Яблан

Резюме. В статье намечен новый прием вывода групп простой и кратной антисимметрии непосредственно из классических групп и на бордюрных группах проиллюстрированы его особенности.

Основой изложения теории антисимметрии, подробно освещенной в работах [4, 7, 8, 10], послужат следующие данные:

Пусть дискретная группа симметрии G с множеством образујущих $S_1, S_2, \ldots, S_p$ дана абстрактным определением [2]:

$$g_n(S_1, S_2, \ldots, S_p) = E \qquad n = 1, 2, \ldots s \tag{1}$$

и пусть $e_1, e_2, \ldots, e_l$-преобразования антитождества 1-го, 2-го,..., l-го рода, удовлетворяющие отношениям:

$$e_i e_j = e_j e_i, \;\; e_i^2 = E, \;\; e_i S_q e_i, \;\; i, j \in \{1, 2, \ldots, l\}, \;\; q \in \{1, 2, \ldots, p\} \tag{2}$$

Группы простой и кратной антисимметрии получаются применением обобщенного метода Шубникова-Заморзаева [8], заменой образующих группы симметрии G антиобразующими одного или больше независимых родов антисимметрии. Согласно теореме о классификации всех групп простой и кратной антисимметии на группы типа $C^k(1 \leq k \leq l)$, $C^k M^m(1 \leq k, m; k + m \leq l)$ и $M^m(1 \leq m \leq l)$ [7, 8] и возможности вывода групп типа C^k и $C^k M^m$ прямо из порожающей группы G и групп типа M^m соответственно, как нетривиальная возникает только проблема вывода групп типа M^m. Все группы типа M^m изоморфны порождающей группе G, а также друг другу.

Обобщенным методом Шубникова-Заморзаева получаются группы типа C^k, $C^k M^m$ и M^m. После выделения групп типа M^m дальнейший

AMS Subject Classification (1980): Primary 20H15 вывод групп простой и кратной антисимметрии (шубниковских групп) сводится к устраннию одинаковых групп типа M^m при фиксированном m и доказательству неодинаковости оставшихся. Данное устранение осуществляется в соответствии с определением одинаковости Ш-групп:

Определение 1: Группы Ш$_1$ и Ш$_2$ типа M^m при фиксированном m одинаковы, если имеется изоморфизм, переводящий преобразования группы Ш$_1$ в преобразования группы Ш$_2$, эквивалентные в смысле симметрии и антисимметрии [8].

В первой части работы будут намечены основные идеи метода порождения групп простой и кратной антисимметрии. Возможности использования предлагаемого метода, область применения которого распространяется на все группы простой и кратной антиосимметрии, будут проиллюстрированы во второй части выводом известных по [9] групп простой и кратной антисимметрии бордюров. Третья часть содержит полученные резульататы, представленые в $0-1$ варианте Международной символики. Приведенные в последней части резултаты интерпретированы в виде мозаик групп простой и кратной антистимметрии бордюров.

1. Метод вывода групп простой и кратной антисимметрии

Теорема 1. *(критерий существования для групп типа M^m): Группа простой или кратной антисимметрии G' будем типа M^m при фиксированном m* (а)*: если все, заданные в представлении группы G отношения остаются удовлетвореными после замены образующих антиобразующими, и* (б)*: если антисимметрию любого рода можно получить в группе антисимметрии G' в качестве самостоятельного антисимметрического преобразования.*

(а) *После замены образующих антиобразующими, каждое из отношения* (1) *вследствие* (2) *дает:*

$$g_n(S_1', S_2', \dots, S_p') = e_1^{n_1} e_2^{n_2} \dots e_m^{n_m} g_n(S_1, S_2, \dots, S_p) = e_1^{n_1} e_2^{n_2} \dots e_m^{n_m},$$
$$n_i \in \{0,1\},\ \ i = 1, 2, \dots, m,\ \ n = 1, 2, \dots, s$$

Если некоторые из элементов n_i равны единице, произведение соответствующих антитождеств является членом группы G', следовательно она не может быть типа M^m. Поэтому безусловно будем:

$$e_1^{n_1} e_2^{n_2} \dots e_m^{n_m} = E, \quad \text{т.е.} \quad g_n(S_1', S_2', \dots, S_p') = E, \quad n = 1, 2, \dots, s$$

(б) *Если некоторые из антитождеств различных родов, напр. e_1 и e_j неотделимы, тогда имметсяя возможность замены: $e^* = e_i e_j (e^{*2} = E)$ и полученная группа не типа M^m при фиксированном m, а более низкого ранга антисимметрии.*

Наоборот, если соблюдаются отношения: $g_n(S_1', S_2', \dots S_p') = E$, $n = 1, 2, \dots, s$ для группы G', изоморфной G, и учитывая отделимость всех m антитождеств, она – типа M^m при фиксированном m.

Проблема устранения одинаковых групп типа M^m при фиксированном m решается согласно Определению 1. Выявление одинаковых групп типа M^m при фиксированном m сводится к обнаружению всех изоморфизмов групп типа M^m, в которых корреспондируют эквивалентные в смысле симметрии и антисимметрии преобразования.

Определение 2. Пусть составлены все произведения образующих группы G, в которых каждая из образующих участвует не более чем один раз, и потом выделены подмножества преобразований, эквивалентных в смысле симметрии. Полученную систему назовем антисимметрической характеристикой группы G.

Например, в случае группы pmm, образуемой переносом X и отражениями R, R_1, заданной представлением: $\{X, R, R_1\}$, $R^2 = R_1^2 = (R_1X)^2 = E$, $XR = RX$, $RR_1 = R_1R$ все произведения образующих, формированные соответственно Определению 2, можно разделить на следующие классы преобразований, эквивалентных преобразований): перенос X; отражение R, параллельное оси X; скольэящее отражение XR; отражения R_1, XR_1, перпендикулярные к оси X и центральные симметрии RR_1, XRR_1; следовательно, антисиммеческая характеристика группы pmm– $\{X\}\{R\}\{XR\}\{R_1, R_1X\}\{RR_1XRR_1\}$, редуцированная форма которой–$\{R\}$ $\{R_1, R_1X\}$.

Теорема 2. *Две группы простой или кратной антисимметрии G_1' и G_2' типа M^m при фиксированном m, с одной и мой же порождающей группой G, адиноковы могда и только могда, если обладаюм одинаковыми антисимметрическими характеристиками.*

Формирование всех произведений образующих группы G и распределение эквивалентных в смысле симметрии преобразований по классам, дают возможность преобразований. Однако, учитывая отношения (2), для обнаружения удовлетворяющих Определению 1 изоморфизмов, достаточно наблюдать классы всех симметрически эквивалентных преобразований, выраженных произведениями образующих, в котором каждаяа из образующих участвует не более, чем один раз.

Кроме указанных, для вывода групп простой и кратной антисимметрии применяются следующие утверждения:

Теорема 3. *Группы типа M^1 выведены из групп симетрии G. Все группы типа M^m при фиксированном m образуются в одном и том же семействе из групп типа $M^{m-1}2 \leq m \leq l$.*

Теорема 4. *Группы симметрии, обладающие изоморфными антисимметрическими характеристиками, порождают одинаковое число групп типа M^m при каждом m, $1 \leq m \leq l$.*

Следствие 1. *Вывод групп простой и кратной антисимметрии типа M^m возможно свести к выводу всех групп типа M^m, порождаемых груп-*

пами симетрии, обладающими неизоморфными антисимметрическими характеристиками.

2. Вывод групп простой и кратной антисимметрии бордюров

Группы простой и кратной антисимметрии бордюров подробно рассмотрены в статье [8].

Символика типа $0-1$, которая будет использована нами, соответвует символике, испольованной в статье [8], при замене знака $'$ индексом $_1$ (напр. $m' = m_1$), знака * индексом $_{10}$ (напр. $^*m = m_{10}$) и знака$\hat{}$индексом $_{100}$ (напр. $\hat{m} = m_{100}$) и при замене композиции знаков $'$, *, $\hat{}$ сответствующими индексами (напр. $*\hat{m} = m_{110}$, $\hat{m}' = m_{101}$ и т.п.).

Перечень групп симметрии бордюров в E^2, заданных множеством образующих и представлений, причем для каждой из них приведена антисимметрическая характеристика, гласит:

1) $p1$, образуемая переносом X: $\{X\}$ с антисимметрической характеристикой $\{X\}$

2) pg, образуемая скольэящим отражением P: $\{P\}$ с антисимметрической характеристикой $\{P\}$

3) $p2$, образуемая переносом X и центральной симметрией T: $\{X, T\}$, $T^2 = (TX)^2 = E$ с антисимметрической характеристикой $\{T, TX\}$[1]

$p2$, образуемая центральными симметриями T и T_1: $\{T, T_1\}$, $T^2 = T_1^2 = E$ с антисимметрической характеристикой: $\{T, T_1\}$.

4) $p1m$, образуемая переносом X и отражением R: $\{X, R\}$, $R^2 = E$, $XR = RX$ с антисимметрической характеристикой $\{X\}\{R\}$.

5) pm, образуемая переносом X и отражением R_1: $\{X, R_1\}$, $R_1^2 = (R_1X)^2 = E$ с антисимметрической характеристикой $\{R_1, R_1X\}$.

pm, образуемая отражениями R_1, R_2: $\{R_1, R_2\}$, $R_1^2 = R_2^2 = E$ с антисимметрической характеристикой $\{R_1, R_2\}$.

6) pgm, образуемая скольэящим отражением P и отражением R_1: $\{P, R_1\}$, $R_1^2 = (R_1P)^2 = E$ с антисимметрической характеристикой $\{P\}\{R_1\}$.

pgm, образуемая отражением R_1 и центральной симметрией T: $\{R_1, T\}$, $R_1^2 = T^2 = E$ с антисимметрической характеристикой $\{R_1\}\{T\}$.

7) pmm, образуемая переносом X и отражениями R и R_1: $\{X, R, R_1\}$, $R^2 = R_1^2 = (R_1X)^2 = E$, $XR = RX$, $RR_1 = R_1R$ с антисимметрической характеристикой $\{R\}\{R_1, R_1X\}$.

pmm, образуемая отражениями R, R_1, R_2: $\{R, R_1, R_2\}$, $RR_1 = R_1R$, $RR_2 = R_2R$, $R^2 = R_1^2 = R_2^2 = E$ с антисимметрической характеристикой $\{R\}\{R_1, R_2\}$.

---

[1]Вместо полной антисимметрической характеристики возможно использовать ее редуцированный эквивалент. Такой способ применен во всех позволяющих это случаях

Ввиду того, что все отношения, определяющие группы симметрии бордюров, остаются удовлетворенными после замены образующих антиобразующими, критерий существования порождения групп простой и кратной антисимметрии бордюров типа M^m сводится к условю отделимости всех антитождеств m независимых родов.

Сообразно Следствию 1 процесс порождения достаточно реализовать для групп $p1$, $p2$, pgm и pmm, обладающих неизоморфными антисимметрическими характеристиками.

Самый способ вывода иллюстрирован на примере группы симметрии бордюров $p2$:

$p2$	$\{X, T\}$	$\{T, TX\}$	
	Для $l = 1$ группы типа M^1:		
(1)	$\{e_1X, T\}$	$\{e_1X, e_1T\}$	$\{E, e_1\}$[2]
(2)	$\{X, e_1T\}$		$\{e_1, e_1\}$
	Для $l = 2$ группы типа M^2:		
	$\{e_1X, T\}$		
(1)	$\{e_1X, e_2T\}$		$\{e_2, e_1e_2\}$
(2)	$\{e_1e_2X, e_2T\}$		$\{e_1, e_2\}$
	$\{X, e_1T\}$		
(3)	$\{e_2X, e_1T\}$	$\{e_2X, e_1, e_2T\}$	$\{e_1, e_1e_2\}$

При $l \geq 3$ группа $p2$, сообразно критерию существования (Теорема 1 (б)), не порождает групп кратной антисимметрии типа M^m, $m \geq 3$.

3. Каталог групп простой и крантной антисимметрии бордюров типа M^m

Для обозначения простой и кратной антисимметрии бордюров типа M^m в настоящей работе использован 0–1 вариант Международной символики. Присутствие антитождеств i-го рода ($1 \leq i \leq m$) в рамках антиобразующих обозначали числом 1 на i-той позиции, если смотреть с правой стороны.

В результате вывода получены следующие группы простой и кратной антисимметрии бордюров типа M^m:

(а) группы типа M^1:

1. p_11	6. $p1m_1$	10. pg_1m	14. pmm_1
2. p_12	7. $p11m_1$	11. pgm_1	15. pm_1m
3. $p2_1$	8. $p1m$	12. pg_1m_1	16. p_1mm_1
4. pg_1	9. pm_1	13. p_1mm	17. pm_1m_1
5. p_11m			

[2] С целью более сокращенного обозначения, в рамках антисимметрических характеристик приведены только антитождества, соответствующие антиобразующим.

(б) группы типа M^2:

1. $p_1 2_{10}$
2. $p_{11} 2_{10}$
3. $p_{10} 2_1$
4. $p_1 1 m_{10}$
5. $p_{11} 1 m_{10}$
6. $p_{10} 1 m_1$
7. $p_{10} 1 m_{11}$
8. $p_{11} 1 m_1$
9. $p_1 1 m_{11}$
10. $p_1 m_{10}$
11. $p_{11} m_{10}$
12. $p_{10} m_1$
13. $pg_1 m_{10}$
14. $pg_{11} m_{10}$
15. $pg_{10} m_1$
16. $pg_{10} m_{11}$
17. $pg_{11} m_1$
18. $pg_1 m_{11}$
19. $p_1 m m_{10}$
20. $p_1 m_{10} m$
21. $p_{11} m m_{10}$
22. $p_{11} m_{10} m$
23. $p_1 m_{10} m_{10}$
24. $p_{11} m_{10} m_{10}$
25. $p_{10} m m_1$
26. $p m_{10} m_1$
27. $p_{10} m m_{11}$
28. $p m_{10} m_{11}$
29. $p_{10} m_1 m$
30. $p m_1 m_{10}$
31. $p_{10} m_1 m_{10}$
32. $p m_{11} m_{10}$
33. $p_{11} m m_1$
34. $p_1 m m_{11}$
35. $p_1 m_{10} m_1$
36. $p_{11} m_{10} m_1$
37. $p_1 m_{10} m_{11}$
38. $p_{11} m_{10} m_{11}$
39. $p_{10} m_1 m_1$
40. $p m_1 m_{11}$
41. $p m_{11} m_1$
42. $p_{10} m_1 m_{11}$

(в) группы типа M^3:

1. $p_1 m_{100} m_{10}$
2. $p_{101} m_{100} m_{10}$
3. $p_1 m_{100} m_{110}$
4. $p_{101} m_{100} m_{110}$
5. $p_1 m_{10} m_{100}$
6. $p_{101} m_{10} m_{100}$
7. $p_1 m_{110} m_{100}$
8. $p_{101} m_{110} m_{100}$
9. $p_{11} m_{100} m_{10}$
10. $p_{111} m_{100} m_{10}$
11. $p_{11} m_{100} m_{110}$
12. $p_{111} m_{100} m_{110}$
13. $p_{11} m_{10} m_{100}$
14. $p_{111} m_{10} m_{100}$
15. $p_{11} m_{110} m_{100}$
16. $p_{111} m_{110} m_{100}$
17. $p_1 m_{10} m_{110}$
18. $p_1 m_{110} m_{10}$
19. $p_{101} m_{10} m_{110}$
20. $p_{101} m_{110} m_{10}$
21. $p_{11} m_{10} m_{110}$
22. $p_{11} m_{110} m_{10}$
23. $p_{111} m_{10} m_{110}$
24. $p_{111} m_{110} m_{10}$
25. $p_{10} m_{100} m_1$
26. $p_{110} m_{100} m_1$
27. $p_{10} m_{100} m_{101}$
28. $p_{110} m_{100} m_{101}$
29. $p_{100} m_{10} m_1$
30. $p_{100} m_{10} m_{101}$
31. $p_{10} m_{100} m_{11}$
32. $p_{110} m_{100} m_{11}$
33. $p_{10} m_{100} m_{111}$
34. $p_{110} m_{100} m_{111}$
35. $p_{100} m_{10} m_{11}$
36. $p_{100} m_{10} m_{111}$
37. $p_{10} m_1 m_{100}$
38. $p_{110} m_1 m_{100}$
39. $p_{10} m_{101} m_{100}$
40. $p_{110} m_{101} m_{100}$
41. $p_{100} m_1 m_{10}$
42. $p_{100} m_1 m_{110}$
43. $p_{110} m_1 m_{10}$
44. $p_{10} m_1 m_{110}$
45. $p_{110} m_{101} m_{10}$
46. $p_{10} m_{101} m_{110}$
47. $p_{100} m_{11} m_{10}$
48. $p_{100} m_{11} m_{110}$
49. $p_{11} m_{100} m_1$
50. $p_{111} m_{100} m_1$
51. $p_{11} m_{100} m_{101}$
52. $p_{111} m_{100} m_{101}$
53. $p_1 m_{100} m_{11}$
54. $p_{101} m_{100} m_{11}$
55. $p_1 m_{100} m_{111}$
56. $p_{101} m_{100} m_{111}$
57. $p_{101} m_{10} m_1$
58. $p_1 m_{10} m_{101}$
59. $p_{101} m_{110} m_1$
60. $p_1 m_{110} m_{101}$

61\. $p_{111} m_{10} m_1$

61\. $p_{11} m_{10} m_{101}$

63\. $p_{11} m_{110} m_1$

64\. $p_{111} m_{110} m_{101}$

65\. $p_{101} m_{10} m_{11}$

66\. $p_1 m_{10} m_{111}$

67\. $p_1 m_{110} m_{11}$

68\. $p_{101} m_{110} m_{111}$

69\. $p_{111} m_{10} m_{11}$

70\. $p_{11} m_{10} m_{111}$

71\. $p_{111} m_{110} m_{11}$

72\. $p_{11} m_{110} m_{111}$

73\. $p_{10} m_1 m_{101}$

74\. $p_{10} m_{101} m_1$

75\. $p_{110} m_1 m_{101}$

76\. $p_{110} m_{101} m_1$

77\. $p_{100} m_1 m_{11}$

78\. $p_{100} m_1 m_{111}$

79\. $p_{100} m_{11} m_1$

80\. $p_{100} m_{11} m_{101}$

81\. $p_{110} m_1 m_{11}$

82\. $p_{10} m_1 m_{111}$

83\. $p_{10} m_{101} m_{11}$

84\. $p_{110} m_{101} m_{111}$

Если $l \geq 4$, группы симметри бордюров, сагласно критерию существования (Теорема 1 (б), не прождают групп кратной симметрии типа M^m, $m \geq 4$.

4. Мозаики групп простой и кратной антисимметрии бордюров типа M^m

Введенная символика групп простой и кратной антисимметрии типа M^m одновременно позволяет введение высокоэффективного метода визуализации приведеных групп мозаиками, применяя перевод обозначений антиобразующих с дуальной в десятичную систему, с учетом следствий отношений (2).

На мозаиках групп симметри типа M^1 числом 0 обозначены части мозаики со знаком $+$, а числом 1-части мозаики со знаком $-$. Смысл чисел 0, 1, 2, 3 в рамках мозаик типа M^2 проявлятся из схемы [11]. (Рис. 1)

Рис. 1

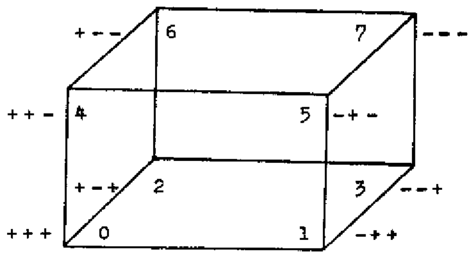

Рис. 2

Смысл чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 в рамках мозаик групп типа M^3 удобно обнаруживается из схемы[3] (Рис. 2)

Представленные в этом виде мозаики групп простой и кратной антисимметрии бордюров типа получают следующую форму:

(a) мозаики групп типа M^1:

1. $\begin{array}{c} /\ /\ /\ /\ /\ /\ /\ /\ / \\ |0|1|0|1|0|1|0|1| \end{array}$

2. $\dfrac{/0/1/0/1/0/1/0/1/}{/0/1/0/1/0/1/0/1/}$

3. $\dfrac{/0/0/0/0/0/0/0/0/}{/1/1/1/1/1/1/1/1/}$

4. $\dfrac{/0/0/0/0/0/0/0/0/}{\backslash 1 \backslash 1 \backslash 1 \backslash 1 \backslash 1 \backslash 1 \backslash 1 \backslash 1 \backslash}$

5. $\dfrac{/0/1/0/1/0/1/0/1/}{\backslash 0 \backslash 1 \backslash 0 \backslash 1 \backslash 0 \backslash 1 \backslash 0 \backslash 1 \backslash}$

6. $\dfrac{/0/0/0/0/0/0/0/0/}{\backslash 1 \backslash 1 \backslash 1 \backslash 1 \backslash 1 \backslash 1 \backslash 1 \backslash 1 \backslash}$

7. $\dfrac{/0/1/0/1/0/1/0/1/}{\backslash 1 \backslash 0 \backslash 1 \backslash 0 \backslash 1 \backslash 0 \backslash 1 \backslash 0 \backslash}$

8. $\uparrow 0 | 0 \uparrow 1 | 1 \uparrow 0 | 0 \uparrow 1 | 1 \uparrow$

9. $\uparrow 0 | 1 \uparrow 0 | 1 \uparrow 0 | 1 \uparrow 0 | 1 \uparrow$

10. $/0|0 \backslash 1|1/0|0 \backslash$

11. $/0|1 \backslash 0|1/0|1 \backslash$

12. $/0|1 \backslash 1|0/0|1 \backslash$

13. $\dfrac{\uparrow 0 | 0 \uparrow 1 | 1 \uparrow 0 | 0 \uparrow 1 | 1 \uparrow}{\downarrow 0 | 0 \downarrow 1 | 1 \downarrow 0 | 0 \downarrow 1 | 1 \downarrow}$

14. $\dfrac{\uparrow 0 | 0 \uparrow 0 | 0 \uparrow 0 | 0 \uparrow 0 | 0 \uparrow}{\downarrow 1 | 1 \downarrow 1 | 1 \downarrow 1 | 1 \downarrow 1 | 1 \downarrow}$

15. $\dfrac{\uparrow 0 | 1 \uparrow 0 | 1 \uparrow 0 | 1 \uparrow 0 | 1 \uparrow}{\downarrow 0 | 1 \downarrow 0 | 1 \downarrow 0 | 1 \downarrow 0 | 1 \downarrow}$

16. $\dfrac{\uparrow 0 | 0 \uparrow 1 | 1 \uparrow 0 | 0 \uparrow 1 | 1 \uparrow}{\downarrow 1 | 1 \downarrow 0 | 0 \downarrow 1 | 1 \downarrow 0 | 0 \downarrow}$

17. $\dfrac{\uparrow 0 | 1 \uparrow 0 | 1 \uparrow 0 | 1 \uparrow 0 | 1 \uparrow}{\downarrow 1 | 0 \downarrow 1 | 0 \downarrow 1 | 0 \downarrow 1 | 0 \downarrow}$

[3] По идее А. Ф. Палистранта

(б) мозаики групп типа M^2:

1. $\dfrac{/0/1/0/1/0/1/0/1/}{/2/3/2/3/2/3/2/3/}$
2. $\dfrac{/0/3/0/3/0/3/0/3/}{/2/1/2/1/2/1/2/1/}$
3. $\dfrac{/0/2/0/2/0/2/0/2/}{/1/3/1/3/1/3/1/3/}$
4. $\dfrac{/0/1/0/1/0/1/0/1/}{/2/3/2/3/2/3/2/3/}$
5. $\dfrac{/0/3/0/3/0/3/0/3/}{/2/1/2/1/2/1/2/1/}$
6. $\dfrac{/0/2/0/2/0/2/0/2/}{/1/3/1/3/1/3/1/3/}$
7. $\dfrac{/0/2/0/2/0/2/0/2/}{/3/1/3/1/3/1/3/1/}$
8. $\dfrac{/0/3/0/3/0/3/0/3/}{/1/2/1/2/1/2/1/2/}$
9. $\dfrac{/0/1/0/1/0/1/0/1/}{/3/2/3/2/3/2/3/2/}$
10. $\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow$
11. $\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow$
12. $\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow$
13. $/0 \mid 2 \backslash 1 \mid 3/0 \mid 2 \backslash 1 \mid 3/0 \mid 2 \backslash$
14. $/0 \mid 2 \backslash 3 \mid 1/0 \mid 2 \backslash 3 \mid 1/0 \mid 2 \backslash$
15. $/0 \mid 1 \backslash 2 \mid 3/0 \mid 1 \backslash 2 \mid 3/0 \mid 1 \backslash$
16. $/0 \mid 3 \backslash 2 \mid 1/0 \mid 3 \backslash 2 \mid 1/0 \mid 3 \backslash$
17. $/0 \mid 1 \backslash 3 \mid 2/0 \mid 1 \backslash 3 \mid 2/0 \mid 1 \backslash$
18. $/0 \mid 3 \backslash 1 \mid 2/0 \mid 3 \backslash 1 \mid 2/0 \mid 3 \backslash$
19. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 0 \uparrow 1 \mid 1 \uparrow 0 \mid 0 \uparrow 1 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 2 \downarrow 3 \mid 3 \downarrow 2 \mid 2 \downarrow 3 \mid 3 \downarrow}$
20. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 0 \mid 2 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow 0 \mid 2 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow}$
21. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 0 \uparrow 3 \mid 3 \uparrow 0 \mid 0 \uparrow 3 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 2 \downarrow 1 \mid 1 \downarrow 2 \mid 2 \downarrow 1 \mid 1 \downarrow}$
22. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 0 \mid 2 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow 0 \mid 2 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow}$
23. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 0 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow 2 \mid 0 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow}$
24. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 0 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow 2 \mid 0 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow}$
25. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 0 \uparrow 2 \mid 2 \uparrow 0 \mid 0 \uparrow 2 \mid 2 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 1 \downarrow 3 \mid 3 \downarrow 1 \mid 1 \downarrow 3 \mid 3 \downarrow}$
26. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 3 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow}$
27. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 0 \uparrow 2 \mid 2 \uparrow 0 \mid 0 \uparrow 2 \mid 2 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 1 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow}$
28. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 1 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow}$
29. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 0 \mid 1 \downarrow 2 \mid 3 \downarrow 0 \mid 1 \downarrow 2 \mid 3 \downarrow}$
30. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 3 \downarrow 2 \mid 3 \downarrow 2 \mid 3 \downarrow 2 \mid 3 \downarrow}$
31. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 3 \downarrow 0 \mid 1 \downarrow 2 \mid 3 \downarrow 0 \mid 1 \downarrow}$

36. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 3 \downarrow 2 \mid 0 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow 2 \mid 0 \downarrow}$
37. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 1 \downarrow 2 \mid 0 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow 2 \mid 0 \downarrow}$
38. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 1 \downarrow 0 \mid 2 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow 0 \mid 2 \downarrow}$

32. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 3 \uparrow 0 \mid 3 \uparrow 0 \mid 3 \uparrow 0 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 1 \downarrow 2 \mid 1 \downarrow 2 \mid 1 \downarrow 2 \mid 1 \downarrow}$

33. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 0 \uparrow 3 \mid 3 \uparrow 0 \mid 0 \uparrow 3 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 1 \downarrow 2 \mid 2 \downarrow 1 \mid 1 \downarrow 2 \mid 2 \downarrow}$

34. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 0 \uparrow 1 \mid 1 \uparrow 0 \mid 0 \uparrow 1 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 3 \downarrow 2 \mid 2 \downarrow 3 \mid 3 \downarrow 2 \mid 2 \downarrow}$

35. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 3 \downarrow 0 \mid 2 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow 0 \mid 2 \downarrow}$

39. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 0 \downarrow 3 \mid 2 \downarrow 1 \mid 0 \downarrow 3 \mid 2 \downarrow}$

40. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 2 \downarrow 3 \mid 2 \downarrow 3 \mid 2 \downarrow 3 \mid 2 \downarrow}$

41. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 3 \uparrow 0 \mid 3 \uparrow 0 \mid 3 \uparrow 0 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 2 \downarrow 1 \mid 2 \downarrow 1 \mid 2 \downarrow 1 \mid 2 \downarrow}$

42. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 2 \downarrow 1 \mid 0 \downarrow 3 \mid 2 \downarrow 1 \mid 0 \downarrow}$

(в) мозаики групп типа M^3:

1. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 1 \mid 5 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 1 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 6 \downarrow 3 \mid 7 \downarrow 2 \mid 6 \downarrow 3 \mid 7 \downarrow}$

2. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 5 \mid 1 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 5 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 6 \downarrow 7 \mid 3 \downarrow 2 \mid 6 \downarrow 7 \mid 3 \downarrow}$

3. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 1 \mid 5 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 1 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 6 \mid 2 \downarrow 7 \mid 3 \downarrow 6 \mid 2 \downarrow 7 \mid 3 \downarrow}$

4. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 5 \mid 1 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 5 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 6 \mid 2 \downarrow 3 \mid 7 \downarrow 6 \mid 2 \downarrow 3 \mid 7 \downarrow}$

5. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 4 \mid 6 \downarrow 5 \mid 7 \downarrow 4 \mid 6 \downarrow 5 \mid 7 \downarrow}$

6. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 5 \mid 7 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 5 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 4 \mid 6 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow 4 \mid 6 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow}$

7. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 6 \uparrow 1 \mid 7 \uparrow 0 \mid 6 \uparrow 1 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 4 \mid 2 \downarrow 5 \mid 3 \downarrow 4 \mid 2 \downarrow 5 \mid 3 \downarrow}$

9. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 3 \mid 7 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 3 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 6 \downarrow 1 \mid 5 \downarrow 2 \mid 6 \downarrow 1 \mid 5 \downarrow}$

10. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 7 \mid 3 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 7 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 6 \downarrow 5 \mid 1 \downarrow 2 \mid 6 \downarrow 5 \mid 1 \downarrow}$

11. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 3 \mid 7 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 3 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 6 \mid 2 \downarrow 5 \mid 1 \downarrow 6 \mid 2 \downarrow 5 \mid 1 \downarrow}$

12. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 7 \mid 3 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 7 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 6 \mid 2 \downarrow 1 \mid 5 \downarrow 6 \mid 2 \downarrow 1 \mid 5 \downarrow}$

13. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 4 \mid 6 \downarrow 7 \mid 5 \downarrow 4 \mid 6 \downarrow 7 \mid 5 \downarrow}$

14. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 7 \mid 5 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 7 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 4 \mid 6 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow 4 \mid 6 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow}$

15. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 6 \uparrow 3 \mid 5 \uparrow 0 \mid 6 \uparrow 3 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 4 \mid 2 \downarrow 7 \mid 1 \downarrow 4 \mid 2 \downarrow 7 \mid 1 \downarrow}$

16. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 6 \uparrow 7 \mid 1 \uparrow 0 \mid 6 \uparrow 7 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 4 \mid 2 \downarrow 3 \mid 5 \downarrow 4 \mid 2 \downarrow 3 \mid 5 \downarrow}$

17. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 6 \mid 4 \downarrow 7 \mid 5 \downarrow 6 \mid 4 \downarrow 7 \mid 5 \downarrow}$

18. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 6 \uparrow 1 \mid 7 \uparrow 0 \mid 6 \uparrow 1 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 4 \downarrow 3 \mid 5 \downarrow 2 \mid 4 \downarrow 3 \mid 5 \downarrow}$

19. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 5 \mid 7 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 5 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 6 \mid 4 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow 6 \mid 4 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow}$

21. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 6 \mid 4 \downarrow 5 \mid 7 \downarrow 6 \mid 4 \downarrow 5 \mid 7 \downarrow}$

22. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 6 \uparrow 3 \mid 5 \uparrow 0 \mid 6 \uparrow 3 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 4 \downarrow 1 \mid 7 \downarrow 2 \mid 4 \downarrow 1 \mid 7 \downarrow}$

23. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 7 \mid 5 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 7 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 6 \mid 4 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow 6 \mid 4 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow}$

24. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 6 \uparrow 7 \mid 1 \uparrow 0 \mid 6 \uparrow 7 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 4 \downarrow 5 \mid 3 \downarrow 2 \mid 4 \downarrow 5 \mid 3 \downarrow}$

25. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 2 \mid 6 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 2 \mid 6 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 5 \downarrow 3 \mid 7 \downarrow 1 \mid 5 \downarrow 3 \mid 7 \downarrow}$

26. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 6 \mid 2 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 6 \mid 2 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 5 \downarrow 7 \mid 3 \downarrow 1 \mid 5 \downarrow 7 \mid 3 \downarrow}$

44. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 6 \mid 7 \downarrow 4 \mid 5 \downarrow 6 \mid 7 \downarrow 4 \mid 5 \downarrow}$

45. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 5 \uparrow 6 \mid 3 \uparrow 0 \mid 5 \uparrow 6 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 7 \downarrow 4 \mid 1 \downarrow 2 \mid 7 \downarrow 4 \mid 1 \downarrow}$

27. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 2 \mid 6 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 2 \mid 6 \uparrow}{\downarrow 5 \mid 1 \downarrow 7 \mid 3 \downarrow 5 \mid 1 \downarrow 7 \mid 3 \downarrow}$

28. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 6 \mid 2 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 6 \mid 2 \uparrow}{\downarrow 5 \mid 1 \downarrow 3 \mid 7 \downarrow 5 \mid 1 \downarrow 3 \mid 7 \downarrow}$

29. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 4 \mid 6 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 4 \mid 6 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 3 \downarrow 5 \mid 7 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow 5 \mid 7 \downarrow}$

30. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 4 \mid 6 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 4 \mid 6 \uparrow}{\downarrow 5 \mid 7 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow 5 \mid 7 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow}$

31. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 2 \mid 6 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 2 \mid 6 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 7 \downarrow 1 \mid 5 \downarrow 3 \mid 7 \downarrow 1 \mid 5 \downarrow}$

32. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 6 \mid 2 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 6 \mid 2 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 7 \downarrow 5 \mid 1 \downarrow 3 \mid 7 \downarrow 5 \mid 1 \downarrow}$

33. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 2 \mid 6 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 2 \mid 6 \uparrow}{\downarrow 7 \mid 3 \downarrow 5 \mid 1 \downarrow 7 \mid 3 \downarrow 5 \mid 1 \downarrow}$

34. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 6 \mid 2 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 6 \mid 2 \uparrow}{\downarrow 7 \mid 3 \downarrow 1 \mid 5 \downarrow 7 \mid 3 \downarrow 1 \mid 5 \downarrow}$

35. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 4 \mid 6 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 4 \mid 6 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 1 \downarrow 7 \mid 5 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow 7 \mid 5 \downarrow}$

36. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 4 \mid 6 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 4 \mid 6 \uparrow}{\downarrow 7 \mid 5 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow 7 \mid 5 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow}$

37. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 4 \mid 5 \downarrow 6 \mid 7 \downarrow 4 \mid 5 \downarrow 6 \mid 7 \downarrow}$

38. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 6 \mid 7 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 6 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 4 \mid 5 \downarrow 2 \mid 3 \downarrow 4 \mid 5 \downarrow 2 \mid 3 \downarrow}$

39. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 5 \uparrow 2 \mid 7 \uparrow 0 \mid 5 \uparrow 2 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 4 \mid 1 \downarrow 6 \mid 3 \downarrow 4 \mid 1 \downarrow 6 \mid 3 \downarrow}$

40. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 5 \uparrow 6 \mid 3 \uparrow 0 \mid 5 \uparrow 6 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 4 \mid 1 \downarrow 2 \mid 7 \downarrow 4 \mid 1 \downarrow 2 \mid 7 \downarrow}$

41. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 4 \mid 5 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 4 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 3 \downarrow 6 \mid 7 \downarrow 2 \mid 3 \downarrow 6 \mid 7 \downarrow}$

42. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 6 \mid 2 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 6 \mid 2 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 5 \downarrow 7 \mid 3 \downarrow 1 \mid 5 \downarrow 7 \mid 3 \downarrow}$

43. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 6 \mid 7 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 6 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 3 \downarrow 4 \mid 5 \downarrow 2 \mid 3 \downarrow 4 \mid 5 \downarrow}$

46. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 5 \uparrow 2 \mid 7 \uparrow 0 \mid 5 \uparrow 2 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 6 \mid 3 \downarrow 4 \mid 1 \downarrow 6 \mid 3 \downarrow 4 \mid 1 \downarrow}$

47. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 3 \uparrow 4 \mid 7 \uparrow 0 \mid 3 \uparrow 4 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 2 \mid 1 \downarrow 6 \mid 5 \downarrow 2 \mid 1 \downarrow 6 \mid 5 \downarrow}$

48. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 3 \uparrow 4 \mid 7 \uparrow 0 \mid 3 \uparrow 4 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 6 \mid 5 \downarrow 2 \mid 1 \downarrow 6 \mid 5 \downarrow 2 \mid 1 \downarrow}$

49. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 3 \mid 7 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 3 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 5 \downarrow 2 \mid 6 \downarrow 1 \mid 5 \downarrow 2 \mid 6 \downarrow}$

50. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 7 \mid 3 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 7 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 5 \downarrow 6 \mid 2 \downarrow 1 \mid 5 \downarrow 6 \mid 2 \downarrow}$

51. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 3 \mid 7 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 3 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 5 \mid 1 \downarrow 6 \mid 2 \downarrow 5 \mid 1 \downarrow 6 \mid 2 \downarrow}$

52. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 7 \mid 3 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 7 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 5 \mid 1 \downarrow 2 \mid 6 \downarrow 5 \mid 1 \downarrow 2 \mid 6 \downarrow}$

53. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 1 \mid 5 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 1 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 7 \downarrow 2 \mid 6 \downarrow 3 \mid 7 \downarrow 2 \mid 6 \downarrow}$

54. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 5 \mid 1 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 5 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 7 \downarrow 6 \mid 2 \downarrow 3 \mid 7 \downarrow 6 \mid 2 \downarrow}$

55. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 1 \mid 5 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 1 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 7 \mid 3 \downarrow 6 \mid 2 \downarrow 7 \mid 3 \downarrow 6 \mid 2 \downarrow}$

56. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 4 \uparrow 5 \mid 1 \uparrow 0 \mid 4 \uparrow 5 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 7 \mid 3 \downarrow 2 \mid 6 \downarrow 7 \mid 3 \downarrow 2 \mid 6 \downarrow}$

57. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 5 \mid 7 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 5 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 3 \downarrow 4 \mid 6 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow 4 \mid 6 \downarrow}$

58. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 5 \mid 7 \downarrow 4 \mid 6 \downarrow 5 \mid 7 \downarrow 4 \mid 6 \downarrow}$

59. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 6 \uparrow 5 \mid 3 \uparrow 0 \mid 6 \uparrow 5 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 7 \downarrow 4 \mid 2 \downarrow 1 \mid 7 \downarrow 4 \mid 2 \downarrow}$

60. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 6 \uparrow 1 \mid 7 \uparrow 0 \mid 6 \uparrow 1 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 5 \mid 3 \downarrow 4 \mid 2 \downarrow 5 \mid 3 \downarrow 4 \mid 2 \downarrow}$

61. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 7 \mid 5 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 7 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 3 \downarrow 6 \mid 4 \downarrow 1 \mid 3 \downarrow 6 \mid 4 \downarrow}$

62. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 5 \mid 7 \downarrow 6 \mid 4 \downarrow 5 \mid 7 \downarrow 6 \mid 4 \downarrow}$

63. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 6 \uparrow 3 \mid 5 \uparrow 0 \mid 6 \uparrow 3 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 7 \downarrow 2 \mid 4 \downarrow 1 \mid 7 \downarrow 2 \mid 4 \downarrow}$

74. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 5 \uparrow 2 \mid 7 \uparrow 0 \mid 5 \uparrow 2 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 4 \downarrow 3 \mid 6 \downarrow 1 \mid 4 \downarrow 3 \mid 6 \downarrow}$

64. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 6 \uparrow 7 \mid 1 \uparrow 0 \mid 6 \uparrow 7 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 5 \mid 3 \downarrow 2 \mid 4 \downarrow 5 \mid 3 \downarrow 2 \mid 4 \downarrow}$

65. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 5 \mid 7 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 5 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 1 \downarrow 6 \mid 4 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow 6 \mid 4 \downarrow}$

66. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 1 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 7 \mid 5 \downarrow 6 \mid 4 \downarrow 7 \mid 5 \downarrow 6 \mid 4 \downarrow}$

67. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 6 \uparrow 1 \mid 7 \uparrow 0 \mid 6 \uparrow 1 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 5 \downarrow 2 \mid 4 \downarrow 3 \mid 5 \downarrow 2 \mid 4 \downarrow}$

68. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 6 \uparrow 5 \mid 3 \uparrow 0 \mid 6 \uparrow 5 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 7 \mid 1 \downarrow 2 \mid 4 \downarrow 7 \mid 1 \downarrow 2 \mid 4 \downarrow}$

69. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 7 \mid 5 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 7 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 1 \downarrow 4 \mid 6 \downarrow 3 \mid 1 \downarrow 4 \mid 6 \downarrow}$

70. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow 0 \mid 2 \uparrow 3 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 7 \mid 5 \downarrow 4 \mid 6 \downarrow 7 \mid 5 \downarrow 4 \mid 6 \downarrow}$

71. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 6 \uparrow 7 \mid 1 \uparrow 0 \mid 6 \uparrow 7 \mid 1 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 5 \downarrow 4 \mid 2 \downarrow 3 \mid 5 \downarrow 4 \mid 2 \downarrow}$

72. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 6 \uparrow 3 \mid 5 \uparrow 0 \mid 6 \uparrow 3 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 7 \mid 1 \downarrow 4 \mid 2 \downarrow 7 \mid 1 \downarrow 4 \mid 2 \downarrow}$

73. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 5 \mid 4 \downarrow 7 \mid 6 \downarrow 5 \mid 4 \downarrow 7 \mid 6 \downarrow}$

75. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 6 \mid 7 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 6 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 5 \mid 4 \downarrow 3 \mid 2 \downarrow 5 \mid 4 \downarrow 3 \mid 2 \downarrow}$

76. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 5 \uparrow 6 \mid 3 \uparrow 0 \mid 5 \uparrow 6 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 4 \downarrow 7 \mid 2 \downarrow 1 \mid 4 \downarrow 7 \mid 2 \downarrow}$

77. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 4 \mid 5 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 4 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 2 \downarrow 7 \mid 6 \downarrow 3 \mid 2 \downarrow 7 \mid 6 \downarrow}$

78. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 4 \mid 5 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 4 \mid 5 \uparrow}{\downarrow 7 \mid 6 \downarrow 3 \mid 2 \downarrow 7 \mid 6 \downarrow 3 \mid 2 \downarrow}$

79. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 3 \uparrow 4 \mid 7 \uparrow 0 \mid 3 \uparrow 4 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 1 \mid 2 \downarrow 5 \mid 6 \downarrow 1 \mid 2 \downarrow 5 \mid 6 \downarrow}$

80. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 3 \uparrow 4 \mid 7 \uparrow 0 \mid 3 \uparrow 4 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 5 \mid 6 \downarrow 1 \mid 2 \downarrow 5 \mid 6 \downarrow 1 \mid 2 \downarrow}$

81. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 6 \mid 7 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 6 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 2 \downarrow 5 \mid 4 \downarrow 3 \mid 2 \downarrow 5 \mid 4 \downarrow}$

82. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow 0 \mid 1 \uparrow 2 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 7 \mid 6 \downarrow 5 \mid 4 \downarrow 7 \mid 6 \downarrow 5 \mid 4 \downarrow}$

83. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 5 \uparrow 2 \mid 7 \uparrow 0 \mid 5 \uparrow 2 \mid 7 \uparrow}{\downarrow 3 \mid 6 \downarrow 1 \mid 4 \downarrow 3 \mid 6 \downarrow 1 \mid 4 \downarrow}$

84. $\dfrac{\uparrow 0 \mid 5 \uparrow 6 \mid 3 \uparrow 0 \mid 5 \uparrow 6 \mid 3 \uparrow}{\downarrow 7 \mid 2 \downarrow 1 \mid 4 \downarrow 7 \mid 2 \downarrow 1 \mid 4 \downarrow}$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н.В. Белов, Т.З. Кунцевич, Н.Н. Неронова, *Шубниковские группы (антисимметрии) для бесконечных лент*, Кристаллогрфия **7.5** (1962), 805–808.

[2] H.S.M. Coxeter, W.O.J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[3] A. Pabst, *The 179 two-sided, two colored, band groups and their relations*, Zeitschrift für Kristallographic **117** (1962), 128–134.

[4] A.V. Shubnikow, N.V. Belov et all, *Colored Symmetry*, Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris, 1964.

[5] А.М. Заморзаев, Э.И. Галярский, А.Ф. Палистрант, *Цветная симетрия, ее обобщения и приложения*, Штиинца, Кишенев, 1978.

[6] А.М. Заморзаев, А.Ф. Палистрант, *Мозаики для 167 двымерных шубниковских групп (младших трех робов)*, Кристаллография **6.2** (1961), 163–176.

[7] А.М. Заморзаев, *О группах симметрии и различного роба антисимметрии*, Кристаллографиия **8.3** (1963), 307–312.

[8] А.М. Заморзаев, *Теория простой и кратнои антисимметрии*, Штинца, Кишенев, 1976.

[9] А.Ф. Палистрант, А.В. Заморзаев, *Группы симметрии и различного рода антисиметрии бордюров и лент*, Кристаллография **9.2** (1964), 155–161.

[10] А.В. Шубников, В.А. Копцик, *Симметрия в науке и искусстве*, Наука, Москва, 1972.

[11] А.В. Шубников, *Черно-белые группы бесконечных лент*, Кристаллография **7.2** (1962), 186–191.

Математички институт
Кнез Михаилова 35
11000 Београд
Југославија

(Поступила 20 06 1983)