PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 37 (51), 1985, pp. 73–80

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

Йозеф Диблик

Резюме. Даны достаточные условя для разрешимости сингулярной задачи Коши для систем дифференциальных уравнений не разрешенных относительно производных и для одного уравнения n-го порядта, не разрешенного относительно старшей производной. Приведны неравенства которым удовлетворяют решения сингулярной задачи Коши.

1. **Введение**.

Вопросам существования решений сингулярной задачи Коши для систем дифференциальных уравнений разрешенных относитело производных посвящены, например, работы [**1**—**5**]. Аналогичные вопросы для неразрешенных систем изучались, например, в работах [**6**—**15**]. В работах [10—12] предложен для выделения одной ветви исходной неявной системы метод вспомогательных подстановек, своих как для неизвестных функций, так и для их производных. Такой поход был использован, например, в работах [**13**—**14**]. Частный случай таких вспомогательных замен был применен также в работе [**15**]. В несингулярном случае существование решений задачи Коши для систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных изучалось, например, в работах [**16**—**19**].

В настоящей статье исследуется наличие решений сингулярной системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных вида

$$F(x,y,y')=0, \tag{1}$$

где $F=(F_1,\dots,F_n)$, $y_1^{(i)},\dots,y_1^{(i)}$, $i=0,1$ и в правой стороне находится n-мерный нуль вектор, уделетворяющих начальному условию

$$y(+0)=0 \tag{1}$$

AMS Subject Classification (1980): Primary 34 E 05; Secondary 34 A 10, 34 A 08.

Изучается также асимптотическое поведение решений системы (1) при $a \to +0$ и существование решений сингулярной задачи

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \tag{3}$$

$$y^{(i)}(+0) = 0, \quad i = 0, \dots, n-1. \tag{4}$$

При этом для выделения одной ветви исходной системы используется подход, отличный от применяемого в работах [**10**—**15**] приема введения вспомогательных подстановок.

2. Применяемые обозначения и сокращения

Определение. Будем считать, что две n-мерные вектор-функции

$$(\varphi(x),\ \psi(x)) \in \mathcal{D},\ \text{ если }\ 0 < \varphi_i(x) \in C(0, x_0],$$
$$0 < \psi_i(x) \in C(0, x_0],\ 0 < x_0 = \text{const.},\ \ \varphi_i(+0) = 0$$

и $\int_{+0}^{x} \psi_i(t)dt \le \varphi_i(x)$ при $x \in (0, x_0],\ i = 1, \dots, n$.

Определение. Будем считат, что $(n+1)$-мерная вектор-функция

$$\delta(x) \in \mathcal{D}_{n+1},\ \text{ если }\ 0 < \delta_i(x) \in C(0, x_0],$$
$$i = 1, \dots, n+1,\ \delta_i(+0) = 0,\ i = 1, \dots, n\ \text{ и }\ \int_{+0}^{x} \delta_k(t)dt \le \delta_{k-1}(x)$$

при $x \in (0, x_0],\ k = 2, \dots, n+1$.

Определение. Простым произведением (делением) n-мерных векторов a, c назовем вектор $ac = (a_1c_1, \dots, a_nc_n)(a/c = (a_1/c_1, \dots, a_n/c_n)$, если $c_i \ne 0,\ i = 1, \dots, n)$.

Определение. n-мерную вектор-функцию $\mu^n(x)$ назовем весовым вектором, если $\mu_i^n(x) \in C(0, x_0]$ и $\mu_i^n(x) \ne 0$ на $(0, x_0],\ i = 1, \dots, n$.

Введем в рассмотрение области

$$\mathcal{D}_{\bar{y}\bar{w}}[0 < x \le x_0, \mid y_i \mid \le \varphi_i(x), \mid w_i \mid \le \psi_i(x)],\ \text{ где }\ (\varphi(x),\ \psi(x)) \in \mathcal{D},\ i = 1, \dots, n;$$
$$\mathcal{D}_{\bar{y}w}[0 < x \le x_0, \mid y_i \mid \le \delta_i(x), \mid w \mid \le \delta_{n+1}(x)],\ \text{ где }\ \delta(x) \in \mathcal{D}_{n+1},\ i = 1, \dots, n;$$
$$\mathcal{D}_{yw}^{\pi}\left[0 < x \le x_0,\ \left| \frac{y_i - \pi_i(x)}{\pi_i(x)} \right| \le \varphi_i(x),\ \ \left| \frac{w_i\pi_i(x) - y_i\pi_i'(x)}{\pi_i^2(x)} \right| \le \psi_i(x)\right],$$

где $(\varphi(x), \psi(x)) \in \mathcal{D},\ \pi_i(x) \in C^1(0, x_0]$ (производые в граничных точках интервала считам везде в этой работе односторонними),

$$\pi_i(x) \ne\ \text{ на }\ (0, x_0],\ \ i = 1, \dots, n.$$

Введем в рассмотрение вспомогательные n-мерные вектор-функции $g(x,y,w) \equiv w + \mu^n(x)F(x,y,w)$, где $\mu^n(x)$–весовой вектор и F_i, $i = 1,\dots,n$ левые стороны системы (1),

$$g^0(x,y,w) \equiv \frac{1}{\pi(x)}\left[w + \mu^n(x)F(x,y,w) - y\frac{\pi'(x)}{\pi(x)}\right],$$

где $\mu^n(x)$—весовой вектор, $\pi(x) =)\pi_1(x),\dots,\pi_n(x))$, функции $\pi_i(x)$, $i = 1,\dots,n$ удовлетворяют тем же требованиям, что и в определении области $\mathcal{D}^{\pi}_{yw}$, $\pi'(x) = (\pi'_1(x),\dots,\pi'_n(x))$, и одномерную функцию

$$g(x,y_1,y_2,\dots,y_n,w) \equiv w + \mu^1(x)f(x,y_1,y_2,\dots,y_n,w),$$

где $\mu^1(x)$–одномерый весовой вектор и f–левая сторона уравнения (3). Соответствующие произведения (деления) векторов здесь понимаются в простом смиысле в соответствии с введенным определением.

3. Формулировки и доказателъства резулътатов

Теорема 1. *Пусть удается подобрать такой весовой вектор $\mu^n(x)$ что для функции $g(x,y,w)$ в области $\mathcal{D}_{\bar{y}\bar{w}}$ српаведливо:*

$$(\alpha)\ \ g(x,y,w) \in C; \quad (\beta)\ \ | g_i(x,y,w) | < \psi_i(x),\ \ i = 1,\dots,n.$$

Тогда система (1) имеем по крайней мере одно решение $y = y(x) \in C^1(0,x_0]$ задачи (2) и справедливо $y(x) \in \mathcal{D}_{\bar{y}\bar{y}'}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что в области $\mathcal{D}_{\bar{y}\bar{y}'}$ система (1) эквивалентна системе

$$y' = g(x,y,y') \tag{5}$$

и задача (1), (2) задаче (5), (2). Покажем. что система неявных уравнений

$$G(x,y,w) \equiv w - g(x,y,w) = 0 \tag{6}$$

определят в области $K_1[0 < x \le x_0,\ | y_i | \le \varphi_i(x),\ i = 1,\dots,n]$ по крайней море одно решение $w = g_1(x,y)$ такое, что здесь справедливо:

$$(\alpha_1) g_1(x,y) \in C; \quad (\beta_1)\ \ | g_{1i}(x,y) | < \psi_i(x), \quad i = 1,\dots,n.$$

На множестве $\mathcal{D}_{\bar{y}\bar{w}}$ справедливо $G \in C$. Дальше, на множествах

$$K^p_{yw}[0 < x \le x_0,\ | y_i | \le \varphi_i(x),\ w_j = (-1)^p\psi_j(x),\ | w_m | \le \psi_m(x),\\ j \ne m,\ i,j,m = 1,\dots,n]$$

где $p = 0,1$ и $(\varphi(x),\ \psi(x)) \in \mathcal{D}$ справедливо: $G/_{K^0_{yw}} > 0$, $G/_{K^1_{yw}} < 0$.

Таким образом, если соединить любую точку множества K^0_{yw} с любой точкой множества K^1_{yw} непрерывной кривой без самопересечений l, то можно заключить, что на ней найдется ходя бы одна точка $(x^*, y^*, z^*) \in l$, где $| z^*_j |< \psi_j(x^*)$, $j = 1, \dots, n$, такая, что $G(x^*, y^*, z^*) = 0$. Поступая дальше аналогичным образом как в доказательствах теорем о неявных функциях (напр. [20]), можно убедится в том, что в силу условия (α) теоремы существует хотя бы одно решение $w = g_1(x, y)$ системы (6), определенное на множестве K_1 удовлетворяющее там условиям $(\alpha_1), (\beta_1)$. Теперь можно вместо системы (5) рассматривать систему

$$y' = g_1(x, y) \tag{7}$$

и вместо задачи (5), (2) исследовать задачу (7), (2). Исходя из (7) введем оператор $T[u(x)] = (T_1[u(x)], \dots, T_n[u(x)])$ следующим образом:

$$T[u(x0] = \int_{+0}^{x} g_1(t, u(t))dt.$$

Областью определения оператора $T[u(x)]$ будем считат множенство n-мерных вектор-функцийй $u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$

$$u[u(x) \mid u_i(x) \in C[0, x_0], \quad | u_i(x) |\le \varphi_i(x), \quad i = 1, \dots, n].$$

Множество U является замкнутым и выпуклым. Будем дальше использовать норму $\|a\| = \max \ | a_i |$, где $a = (a_1, \dots, a_n)$. Нетрудно показать, что множество функций U является ограниченным. Проверим, что оператор $T[u(x)]$ отображает множество U в себя. Действительно, для любой координаты оператора $T[u(x)]$ справедливо

$$| T_i[u(x)] |= \left| \int_{+0}^{x} g_{1i}(t, u(t))dt \right| < \int_{+0}^{x} \psi_i(t)dt \le \varphi_i(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Проверим компактность множества $T[u(x)]$. Равномерная ограниченность этого множества следует из того, что $\varphi_i(x) < L$ для $x \in (0, x_0]$, где $L = \text{const.}$, $0 < L$, ибо $\varphi_i(x) \in C(0, x_0]$ и $\varphi_i(+0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Покажем равностепенную непрерывность. Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу свойств функций $\varphi_i(x)$ найдется такое значение $0 < \delta_1 = \text{const.}$, $\delta_1 < x_0$, что при $x \in [0, \delta_1]$ верно $\varphi_i(x) < \varepsilon/2$, $i = 1, \dots, n$. Если $x_i \in [0, \delta_1]$, $i = 1, 2$, то

$$\|T[u(x_1)] - T[u(x_2)]\| \le \left\| \int_{+0}^{x_1} g_1(t, u(t))dt \right\| +$$
$$+ \left\| \int_{+0}^{x_2} g_1(t, u(t))dt \right\| < \|\varphi(x_1)\| + \|\varphi(x_2\| < \varepsilon.$$

Обозначим $R = \max\limits_{\substack{x \in [\delta_1/2, x_0] \\ i=1,\dots,n}} \psi_i(x)$, $\delta = \min\{\delta_1/2, \varepsilon/R\}$, Если

$$x_i \in [\delta_1/2, x_0], \ \ i = 1, 2 \ \text{ и } \ | x_1 - x_2 |< \delta, \quad \text{то}$$

$$\|T[u(x_1)] - T[u(x_2)]\| = \left\| \int_{x_2}^{x_1} g_1(t, u(t))dt \right\| \le R \mid x_1 - x_2 |< \varepsilon.$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если

$$| x_1 - x_2 |< \delta, \quad x_i \in (0, x_0], \quad i = 1, 2,$$

то $\|T[u(x_1)] - T[u(x_2)]\| < \varepsilon$. Компактность множества $T[u(x)]$ проверена.

Покажем непрерывность оператора T на множестве U. Пусть вектор-функции $u_m(x) \in U$, $m = 1, \ldots$ равномерно сходяця к вектор-функции $u(x) \in U$ и пусть задано $\varepsilon > 0$. Аналогично тому как это сделано выше, найдем что существует такое значение $0 < \delta_1 = \text{const.}, \delta_1 < x_0$, что при $x \in [0, \delta_1]$ справедливо $\varphi_i(x) < \varepsilon/4$, $i = 1, \ldots, n$. Далее, из условия (α_1) следует, что для $x \in [\delta_2, x_0]$, $0 < \delta_2 \leq \delta_1$ при достаточно больших m будет выполнятьря неравенство $\|g_1(x, u_m(x)) - g_1(x, u(x))\| < \varepsilon/(2x_0)$. Если $x \in [0, \delta_1]$, то

$$\|T[u_m(x)] - T[u(x)]\| \leq \|T[u_m(x)\| + \|T[u(x)]\| \leq 2\|\varphi(x)\| < \varepsilon.$$

Пусть $x \in [\delta_1, x_0]$. Тогда будем иметь

$$\|T[u_m(x)] - T[u(x)]\| \leq \left\| \int_{+0}^{\delta_2} g_1(t, u_m(t))dt \right\| + \left\| \int_{+0}^{\delta_2} g_1(t, u(t))dt \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{\delta_2}^{x} \big(g_1(t, u_m(t)) - g_1(t, u(t))\big)dt \right\| < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon x_0/(2x_0) = \varepsilon$$

Таким образом, при $x \in [0, x_0]$, начиная ц некторого номера t справедливо $\|T[u_m(x)] - T[u(x)]\| < \varepsilon$. Непрерывность оператора T доказана. В результате можно применить известный принцип Шаудера (напр. [**21**]). Тогда имеется по крайней мере одна неподвижная точка $y = y(x) \equiv u_0(x) \in U$ оператора T. Функция $y = y(x)$ является решением задачи (7), (2) и по построению и решением задачи (1), (2), находящимся в $\mathcal{D}_{\bar{y}\bar{y}'}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в области $\mathcal{D}_{\bar{y}\bar{w}}$ справедливы условия $(\alpha), (\beta)$ теоремы* 1 *и, кроме того, здесь справедливо*
(8)

$$\left| g_i(x, \overline{y}, \overline{w}) - g_i(x, \overline{\overline{y}}, \overline{\overline{w}} \right| \Big| \leq M \sum_{j=1}^{n} \left| \overline{y}_j - \overline{\overline{y}}_j \right| + N \sum_{j=1}^{n} \left| \overline{w}_j - \overline{\overline{w}}_j \right| \Big|, \ \ i = 1, \ldots, n,$$

где $0 \leq M, \ \ 0 \leq n \cdot N < 1, \ \ M = \text{const.}, \ \ N = \text{const.}$. *Тогда задача* (1), (2) *имеет единственное решение $y = y(x) \in C^1(0, xx_0]$, находящееся в области $\mathcal{D}_{\bar{y}\bar{y}'}$*

Доказательство. Предположим, что система (1) имеет в области $\mathcal{D}_{\bar{y}\bar{y}'}$ не тождественно равные решения $y(x), z(x)$ задачи (2). В силу эквивалентности задач (1), (2) и (5), (2), используя неравенства (8) здесь получаем

$$\left| y_i'(x) - z_i'(x) \right| \leq M \sum_{j=1}^{n} \left| y_j(x) - z_j(x) \right| + N \sum_{j=1}^{n} \left| y_j'(x) - z_j'(x) \right|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

откуда, складывая эти неравенства, нетрудно получить неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\Big|\,y_i'(x)-z_i'(x)\,\Big| \le \frac{nM}{1-nN}\sum_{i=1}^{n}\Big|\,y_i(x)-z_i(x)\,\Big|.$$

Дальше справедливо

$$\Big|\,y_i(x)-z_i(x)\,\Big| \le \int_{+0}^{x}\Big|\,g_i(t,y(t),y'(t))-g_i(t,z(t),z'(t))\,\Big|\,dt \le$$

$$\le \int_{+0}^{x}\Big(M\sum_{j=1}^{n}\Big|\,y_j(t)-z_j(t)\,\Big| + N\sum_{j=1}^{n}\Big|\,y_j'(t)-z_j'(t)\,\Big|\Big)dt, \quad i=1,\dots,n,$$

откуда, складывая эти неравенства и используя предыдущее неравенство, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\Big|\,y_i(x)-z_i(x)\,\Big| \le \frac{nM}{1-nN}\int_{+0}^{x}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big|\,y_i(t)-z_i(t)\,\Big|\Big)dt,$$

В силу известной леммы Гроноулла-Беллмана отсюда вытекает, что

$$y(x)\equiv z(x).$$

Следующие теоремы получаются в результате примения теорем 1, 2.

Теорема 3. *Пусть удается подобрать такой одмереный весовой вектор $\mu^1(x)$, что для функции $g(x,y_1,y_2,\dots,y_n,w)$ в области $\mathcal{D}_{\bar{y}w}$ справедливо $(\alpha) g(x,y_1,y_2,\dots,y_n,w)\in C$, (β) $\mid g(x,y_1,y_2,\dots,y_n,w)\mid < \delta_{n+1}(x)$.*

Тогда задача (3), (4) *имеем по крайней мере одно решение*

$$y=y(x)\in C^n(0,x_0],$$

неходящееся в области $\mathcal{D}_{\bar{y}y}(n)$.

Если, кроме указанных условий в области $\mathcal{D}_{\bar{y}w}$ справедливо

$$\Big|\,g(x,\overline{y}_1,\overline{y}_2,\dots,\overline{y}_n,\overline{w})-g(x,\overline{\overline{y}}_1,\overline{\overline{y}}_2,\dots,\overline{\overline{y}}_n,\overline{\overline{w}}) \le$$

$$\le M\sum_{k=1}^{n}\Big|\,\overline{y}_k-\overline{\overline{y}}_k\,\Big| + N\Big|\,\overline{w}-\overline{\overline{w}}\,\Big|,$$

где $0\le M,\ 0\le N<1,\ M=\mathrm{const.},\ N=\mathrm{const.}$, *то такое решение единственно.*

Доказательство теоремы сводится к применению теорем 1, 2, если ввести в уравнение (3) новые переменные по формулам $y_{i+1}\equiv y^{(i)}$, $i=0,\dots,n-1$, весовой вектор взять в виде $\mu^n(x)=(-1,-1,\dots,-1,\mu^1(x))$ и вектор-функции $\varphi(x),\psi(x)$ в виде

$$\varphi(x)=(\delta_1(x),\dots,\delta_n(x)), \quad \psi(x)=(\delta_2(x),\dots,\delta_{n+1}(x)).$$

Теорема 4. *Пусть удается подобрать такой весовой вектор* $\mu^n(x)$, *что для функции* $g^0(x,y,w)$ *в области* $\mathcal{D}^{\pi}_{yw}$ *справедливо*

$$(\alpha)\, g^0(x,y,w) \in C; \quad (\beta)\ \mid g^0_i(x,y,w) \mid < \psi_i(x), \quad i=1,\dots,n.$$

Тогда система уравнений (1) *имеет по крайней мере одно решение* $y=y(x)\in C^1(0,x_0]$, *находящееся в области* $\mathcal{D}^{\pi}_{yy'}$. *При этом выполняются неравенства*

$$(9_i) \qquad \mid y_i(x)-\pi_i(x) \mid \le \varphi_i(x) \mid \pi_i(x) \mid,$$

$$(10_i) \qquad \mid y'_i(x)-\pi'_i(x) \mid \le \varphi_i(x) \mid \pi'_i(x) \mid + \psi_i(x) \mid \pi_i(x) \mid, \quad i=1,\dots,n.$$

Если, кроме указанных условий в области $\mathcal{D}^{\pi}_{yw}$ *имеют место неравенства*

$$\Big| g^0_i(x,\overline{x},\overline{w}) - g^0_i(x,\overline{\overline{y}},\overline{\overline{w}}) \Big| \le M \sum_{j=1}^{n} \Big| \overline{y_j} - \overline{\overline{y_j}} \Big| + N \sum_{j=1}^{n} \Big| \overline{w_j} - \overline{\overline{w_j}} \Big|, \quad i=1,\dots,n$$

где $0\le M,\ \ 0\le nN<1,\ M=\text{const.},\ N=\text{const.}$, *то такое решение является единственным.*

Доказательство. Совершим в (1) замену $y_i=\pi_i(x)(1+Y_i)$, где $Y_i,\ i=1,\dots,n$—новые независимые переменные, после чего полушаем систему

$$(11) \qquad Y' = g^0\bigg(x, \pi(x)(1+Y), \quad (\pi(x)(1+Y))'\bigg) \equiv g^{00}.$$

В силу условий теоремы вектор-функция g^{00} удовлетворяет в области $\mathcal{D}_{\bar Y \bar W}$ всем условиям теорем 1,2, сформулированным для вектор-функции $g(x,y,w)$. Поэтому относительно задачи $Y(+0)=0$ для системы (11) можно сделать заключение о существовании хотя бы одного, или единственного решения, находящегося в области $\mathcal{D}_{\bar Y \bar Y'}$ и, следовательно бывод о существовании хотя бы одного, или единственного решения системы (1) в области $\mathcal{D}^{\pi}_{yy'}$. Наравенства (9_i), $i=1,\dots,n$ получаюця ис вида области $\mathcal{D}^{\pi}_{yy'}$. Неравенства (10_i) получаются ис вида области $\mathcal{D}^{\pi}_{yy'}$, причем использованы неравенства (9_i), $i=1,\dots,n$.

Замечание. Если в формулировке теоремы 4 справедливо для компонент вектор-функции $\varphi(x)$ также: $\varphi_i(x)\in C^1(0,x_0]$ и на $(0,x_0]\,\varphi'_i(x)\equiv\psi_i(x)$, то неравенства (10_i) можно получить формальньим дифференцированием неравенств (9_i), $i=1,\dots,n$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Чечик, *Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью*, Труды, Москов. мат. общ. **8** (1959), 155–198.

[2] И. Т. Кигурадзе, *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Тбилисск. унив. 1975.

[3] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнения*, Мир, Москва, 1968.

[4] Й. Диблик, *Асимптотические формулы для частных решений линейного дифференциального уравнения первого порядка*, Мат. весник, **6** (19) (34) (1982), 357–363.

[5] Ю. С. Шаталов, *К вопросу о существовании решений систем сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра*, Дифференциальные уравнения **3** (1967), 264–272.

[6] А. Е. Зернов, *О решениях одной системы сингулярных дифференциальных уравнений, частично разрешенной относительно производных*, Мат. заметки **24** (1978), 349–357.

[7] J. Diblik, *Existnece and uniqueness of solution of the Cauchy problem for singular systems of differential equations, not solved with respect to derivatives*, ICM-82, Short communication, vol 10, Section 12 ordinary differential equations and dynamical sustem, p. 42, Warsawa 1983.

[8] A. Diamadescu, *On the asymptotic bahaviour of solutions of certain ordinary differential equations*, Mat. Vesnik **23** (1978), 261–264.

[9] А. В. Пхакадзе, А. А. Шестаков, *О класификации особых точек дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного отностельно производной*, Мат. сборник **49**, (1959), 3–12.

[10] Р. Г. Грабовская, Й. Диблик, “Об асимптотических свойствах решений системы уравнений первого порядка, не разрешенной относительно производной,“ *Сборник: функционалный анализ и некторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений*, Саранск, 1976, 73–75.

[11] Р. Г. Грабовская, Й. Диблик, *Асимптотика систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных*, Деп. в. ВИНИТИ, 1786–78 Деп., 48с., РЖ Мат. 10Б249, 1978.

[12] Й Диблик, *Асимптотические свойства решений системы уравнений первого порядка и уравнений n—го порядка, не разрешенных относительно старшей производной*, Канд. дисертация, Одесса, 1979, 127 ц.

[13] Й Диблик, *Асимптотика решений ондого дифференциального уравнеия, частично разрешенного относительно производой*, Сибирск, мат. ж. **5** (1982), 80–91.

[14] Р. Г. Грабовская, Г. Е. Самкова, *Экспоненциальные асиптотические представления решений систем диффереициальных уравнений 1-го порядка, не разрешеных относительно производных*, Деп. в ВИНИТИ, 3591–81 Деп, 46ц., РЖ Мат. 1Б362Деп, 1982.

[15] Л. Г. Просенюк, А. А. Яценко, *Асимптотическое поведение ре шений и их производхых комплексного диффереииалного уравнения первого порядка*, Украин. мат. ж **35** (1983), 182–186.

[16] R. Conti, *Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, dx/dt) = 0$*, Ann. Mat. Pura Appl. **48** (1959), 97–102.

[17] G. Pulviereneti, *Equazioni differenzialli in forma implicita in uno spazio di Banach*, Ann. Mat. Pura Appl. **56** (1961), 177–191.

[18] S. Abian, A. B. Brown, *A note o the solution of the differential equation of the type* $f(x, y, y') = 0$, Amer. Math. Monthly **66** (1959), 192–199.

[19] В. П. Рудаков, *О существовании и единственности решений системы дифференциальных уравнений, частично разрешенных относительно производных*, Изв. вузов.Математика **9** (1971), 79–84.

[20] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, I, Наука, Москва, 1966.

[21] V. A. Trenogin, *Функциональный анализ, Наука, Москва, 1980.*

Katedra matematiky
Fakulty elektrotechnické VUT
60200 Brno
ČSSR

(Поступила 18 10 1983)