PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 60 (74), 1996, 27–30

UNE CONDITION DE FINITUDE POUR LES SEMI-GROUPES

Cornelia Gutan

Communicated by Žarko Mijajlović

Abstract. Let S be a finitely generated semigroup. Using the minimal factorisation of every element of S we give necessary and sufficient conditions for the finiteness of S. The main result improves, makes more precisely and simplifies a previous result of Migliorini and Szép [**4**].

1. Définitions. Etant donné un *alphabet* A, on désignera par A^* le *monoïde libre* engendré par A, i.e. l'ensemble des *mots* écrits à l'aide de cet alphabet, y compris le mot vide, muni de la concaténation comme loi de composition, de sorte que A^* est un semi-groupe avec un élément unité qui est le mot vide. Pour chaque mot $u \in A^*$, on désigne par $|u|$ sa *longueur.* On désigne par A^+ le *semigroupe libre* engendré par A, i.e. le sous-semi-groupe de A^* formé de tous les mots à l'exception du mot vide.

Lorsque l'alphabet A est *totalement ordonné*, on munit A^* de l'ordre *lexicolongique* $\preceq$, où $u \prec v$ veut dire

$$\begin{cases} \text{ou bien } |u| < |v| \\ \text{ou bien } |u| = |v| \text{ et } u \text{ précède strictement } v \text{ dans l'ordre lexicologique} \end{cases}$$

Lorsque l'ordre sur A est un *bon ordre* (lorsque A est, en particulier, *fini*) l'ensemble A^* est lui-même *bien ordonné* par l'ordre lexicolongique, i.e. toute partie X non vide de A^* possède un plus petit élément: c'est, parmi tous les mots les plus courts de X, le premier dans l'ordre lexicologique.

2. Une première remarque. Soient x, y des mots de A^+ tels qu'il existe $z \in A^*$ pour lequel $xz = zy$. Il existe alors des mots u et v de A^* et un entier

AMS Subject Classification (1991): Primary 20M99
Key Words and Phrases: monoïde libre, ordre lexicolonguique

$m \geq 0$ tels que $x = uv, y = vu, z = x^m u$ et $\mid u \mid < \mid x \mid$. En effet, on écrit $xz = zy$ et on considère la plus forte puissance $x^m, m \geq 0$, par laquelle z commence. Ainsi $z = x^m u$, où le mot u ne commence pas par x. On a donc $x^{m+1}u = xz = zy = x^m uy$, d'où $xu = uy$. Comme u ne commence pas par x, c'est x qui commence par u, i.e. il existe un mot $v \in A^*$ tel que $x = uv$ et $\mid u \mid < \mid x \mid$ et, enfin, $uvu = uy$, donc $y = vu$.

3. Semi-groupes engendrés par un ensemble fini. Soit S un semi-groupe engendré par un ensemble *fini* Γ de générateurs. On munit Γ d'un ordre total (alphabétique) quelconque et on considère le semi-groupe Γ^+ muni de l'ordre lexicolongique correspondant.

On considère aussi l'homomorphisme canonique surjectif $\varphi : \Gamma^+ \longrightarrow S$. Pour chaque élément $s \in S$, l'ensemble $\varphi^{-1}(s)$ est non vide et renferme donc un plus petit élément $w(s)$ que l'on appellera le *représentant canonique* de s, i.e. $w(s)$ est le premier mot dans l'ordre lexicolongique pour lequel $\varphi(w(s)) = s$.

On appellera *rang* de s la longueur $|w(s)|$ de son représentant canonique. (Bien entendu, ce rang ne dépend pas que du semi-groupe S; il dépend aussi du choix du système générateur Γ et de l'ordre alphabétique choisi dans Γ).

Pour chaque entier $n \geq 1$, on pose alors

$$\begin{aligned} B_n &= \{s \in S \mid s \text{ est de rang } n\} \\ A_n &= \{w(s) \in \Gamma^+ \mid s \in B_n \\ C = C(S) &= \bigcup_{n \geq 1} A_n. \end{aligned}$$

On a ainsi:

1) $S = \bigcup_{n \geq 1} B_n$, $B_n = \varphi(A_n)$, $A_n = w(B_n)$.
2) Chacune des applications réciproques induites $\varphi : A_n \to B_n$ et $w : B_n \to A_n$ est bijective.
3) Les ensembles C et S sont en correspondance bijective par: $\varphi : C \longrightarrow S$ et $w : S \longrightarrow C$. Ainsi la partie $C = C(S)$ se présente comme un *calque* du semi-groupe S dans l'ensemble Γ^+ des mots non vides sur Γ.
4) On observera enfin que tout *facteur* u d'un mot w de C appartient lui-même à C, i.e. si $w = tuv \in C$, où t et v sont dans Γ^*, alors $u \in C$.

4. Un lemme technique. Voici, à présent, le résultat-clé qui constitue le pivot des considérations à suivre.

LEMME. *Soit S un semi-groupe engendré par un ensemble fini Γ de générateurs. On associe à (S, Γ) les suites canoniques $(A_n)_{n \geq 1}$, $(B_n)_{n \geq 1}$ définies ci-dessus. On suppose qu'il existe deux entiers $n \geq k > 1$ tels que* Card $B_n < k$ *et* $B_{n+k-1} \neq \emptyset$.

1. *Il existe alors des entiers $r < k$ et $q > n/r$ et un mot $x \in A_r$ tels que $x^q \in A_{rq}$.*

2. *Il existe au moins un élément $s \in S$ de rang $r < k$ dont l'ordre est strictement supérieur à n/r. (On rappelle que l'ordre de s est* $\mathrm{ord}(s) = \mathrm{Card}\,\{s^m | m \geq 1\}$).

Démonstration: Puisque B_{n+k-1} n'est pas vide, il existe un mot $w = g_1 \dots g_n \dots g_{n+k-1}$, au moins, appartenant à A_{n+k-1}, où les g_i sont dans Γ. Ainsi les k mots suivants de longueur n appartiennent tous à A_n:

$$\begin{aligned}
w_1 &= g_1 \dots g_n \\
w_2 &= \quad g_2 \dots g_{n+1} \\
&\vdots \\
w_i &= \qquad g_i \dots g_{n+i-1} \\
&\vdots \\
w_k &= \qquad\quad g_k \dots g_{n+k-1}.
\end{aligned}$$

Or $\mathrm{Card}\, A_n = \mathrm{Card}\, B_n < k$. Donc deux au moins de ces k mots sont identiques, i.e. il existe $1 \leq i < j \leq k$ tels que l'on ait $w_i = w_j$. On pose alors

$$x = g_i \dots g_{j-1}, \quad z = g_j \dots g_{n+i-1}, \quad y = g_{n+i} \dots g_{n+j-1}$$

où l'on a $j \leq n + i - 1$ car $j - i \leq k - 1 \leq n - 1$. Ainsi $xz = w_i = w_j = zy$.

D'après §2, on a donc $x = uv$, $y = vu$, $z = x^m u$, $|u| < |x|$, où u et v sont des mots de Γ^* et m est un entier tel que $m \geq 0$.

Ainsi, d'une part on a $n = |w_i| = |xz| = |x^{m+1}u| < (m+2)|x|$. D'autre part, on a $xzy = g_i \dots g_{n+j-1}$ qui est un facteur de w et

$$xzy = x^{m+1}uvu = x^{m+2}u.$$

Donc x^{m+2} et x sont des facteurs de w et appartiennent ainsi au calque $C(S)$. De plus, on a $|x| = j - i < k$ et $m + 2 > n/|x|$.

1. Ainsi $x \in A_r$, où $r = j - i < k$ et $x^q \in A_{rq}$, où $q = m + 2 > n/r$.
2. L'élément $s = \varphi(x) \in S$ est bien de rang $r < k$ et son ordre est supérieur ou égál à q, où $q > n/r$. ■

5. Nouvelles remarques. Tout semi-groupe fini est, bien évidemment, périodique et engendré par un ensemble fini.

Soit S un semi-groupe engendré par l'ensemble fini Γ de générateurs et soient $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ les suites que l'on a associées à (S, Γ) précédemment.

1° Pour chaque $n \geq 1$, l'ensemble B_n est fini, bien entendu.

2° Ainsi S *est fini si et seulement s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $B_n = \emptyset$.*

3° Supposons que, pour un entier donné $n \geq 1$, on ait $\mathrm{Card}\, A_n = 1$ et $A_{n+1} \neq \emptyset$. Alors, d'après le lemme précédent, où l'on fait $k = 2$, il existe un générateur $g \in \Gamma = A_1$ tel que $g^{n+1} \in A_{n+1}$. Donc le facteur g^n de g^{n+1} est l'unique élément de A_n. Si donc $w = g_1 \dots g_n g_{n+1} \in A_{n+1}$, on aura, à la fois, $g_1 \dots g_n = g^n$ et $g_2 \dots g_{n+1} = g^n$. Donc $w = g^{n+1}$.

En résumé: si $\operatorname{Card} A_n = 1$ et $A_{n+1} \neq \emptyset$, il existe un générateur $g \in \Gamma$ tel que $A_n = \{g^n\}$ et $A_{n+1} = \{g^{n+1}\}$.

4° On a aussi le résultat suivant.

Si le semi-groupe S (engendré par un ensemble fini) est périodique et si, pour un entier $n \geq 1$, on a $\operatorname{Card} B_n \leq 1$ alors S est fini.

En effet, d'après 5.3° on remarque que g étant d'ordre fini, on a nécessairement $A_m = \emptyset$, pour un entier $m \geq n$.

5° Par contre, quel que soit l'entier $m \geq 2$, il existe un semi-groupe S engendré par un ensemble fini Γ pour lequel $\operatorname{Card} A_2 \geq C_m^2$ et $A_3 = \emptyset$. C'est, en particulier, le cas pour le semi-groupe *bande rectangulaire* $S = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, m\}$, où l'opération est définie par $(i,j)(l,k) = (i,k)$, avec comme ensemble générateur $\Gamma = \{g_1, \dots, g_m\}$, où $g_i = (i,i)$. On a bien ici: $A_1 = \Gamma$, $A_2 = \{g_i g_j \mid i \neq j\}$, $A_3 = \emptyset$.

6. Critères de finitude. Le théorème suivant améliore, précise et simplifie des résultats antérieurs de Migliorini et Szép [**4**]. On observera que dans la condition (3) de ce théorème la périodicité n'intervient pas.

THÉORÈME. *Soit S un semi-groupe engendré par un ensemble fini Γ et soient $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ les suites canoniques associées à sa présentation (S, Γ). Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *Le semi-groupe S est fini.*

(2) *Le semi-groupe S est périodique et il existe un entier $n \geq 1$ pour lequel* $\operatorname{Card} B_n \leq 1$.

(3) *Il existe deux entiers $n \geq k \geq 1$ tels que* $\operatorname{Card} B_n < k$ *et tout élément $s \in S$ de rang $r < k$ est d'ordre inférieur ou égal à n/r.*

Démonstration: L'équivalence des conditions (1) et (2) est déjà contenue dans les remarques données dans §5. L'équivalence des conditions (1) et (3) découle du lemme précédent.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Gutan, *A finiteness condition on semigroups*, Proceedings of the Conference on Algebra, Univ. Babes-Bolyai, Cluj-Napoca, 1992, 31–36.
2. *Propriétés des semi-groupes. Applications à l'étude des hyperstructures très fines,* Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II, 1994.
3. J.M. Howie, *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press, 1976.
3. f. Migliorini, J. Szep, *Finitely generated semigroups and the problem of Burnside*, Pure Math. Appl. Ser. A **1** (1990), 29–32.

Laboratoire de Mathématiques Pures
Université Blaise Pascal
63177, Aubière Cedex, France
gutan@ucfma.univ-bpclermont.fr

(Reçu le 07 11 1995)