PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 72(86) (2002), 11–22

ЛЕВЫЕ ФАКТОРИАЛЫ, ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ И ГИПОТЕЗА КУРЕПЫ

В. С. Владимиров

Посвящается светлой памяти
выдающегося математика профессора Джуро Курепы

Резюме. Устанавливается связь левых факториалов с числами Бернулли. В терминах p-адических чисел и чисел Бернулли получены новые критерии, эквивалентные гипотезе Курепы.

1. Введение

Левым факториалом $!n$ натурального числа n называется арифметическая функция

$$!n = \sum_{k=0}^{n-1} k!, \quad n = 1, 2. \dots .$$

Понятие левого факториала было введено в 1971 году выдающимся сербским математиком Джуро Курепой [1] в связи с его теоретико-числовой гипотезой (ГК): общий наибольший делитель чисел $!n$ и $n!$ равен 2,

$$(!n, n!) = 2, \quad n = 2, 3, \dots .$$

В той же работе [1] Курепа показал, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых ГК верна. Она проверена на ЭВМ вплоть до $n < 2^{23}$ [2]. Однако до сих пор ГК не доказана для всех n.

В работах сербских математиков установлено большое число утверждений, эквивалентных ГК (см. обзор [3,4]). Одним из таких утверждений является следующее: для простых p

$$!p \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad p = 3, 5, \dots . \tag{1.1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11A05.

В этой заметке доказывается следующее сравнение:

$$(1.2)\qquad !p\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^k\frac{B_k}{k!}\equiv\sum_{m=1}^{(p-3)/2}\frac{B_{2m}}{(2m)!}[!(2m)-1]\pmod p,\quad p=3,5,\dots,$$

связывающие левые факториалы с числами Бернулли B_k. Приведены и другие равенства и сравнения, содержащие левые факториалы. В терминах p-адических чисел получены новые критерии, эквивалентные ГК.

Знак $\Box$ обозначает конец доказательства.

2. ГК в терминах p-адичеких чисел

О поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ см. [5–8].

a) *ГК эквивалентна равенству*

$$|!p|_p=1,\quad p=3,5,\dots,$$

где $|\cdot|_p$ — p-адическая норма.

Вытекает из (1.1). $\Box$

b) *ГК эквивалентна равенству*

$$|!\infty|_p=1,\quad p=3,5,\dots,$$

где $!\infty$ обозначает p-адическое число $!\infty=\sum\limits_{k=0}^{\infty}k!\in\mathbb{Q}_p$.

Вытекает из критерия a) и из представления $!\infty=!p+pN_p$, $N_p\in\mathbb{Z}_p$; здесь $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел. $\Box$

Введём последовательность полиномов

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}k!x^k,\quad f_n(1)=!n,\quad n=1,2,\dots.$$

Известно, что (см. [13, стр. 16])

$$(2.1)\qquad f_n'(1)=\sum_{k=1}^{n-1}kk!=-1+n!.$$

c) *ГК эквивалентна утверждению: уравнение*

$$(2.2)\qquad f_p(x)=0,\quad x\in\mathbb{Q}_p,\quad p=3,5,\dots$$

не имеет решений вида

$$(2.3)\qquad x_0=1+p\epsilon,\quad \epsilon\in\mathbb{Z}_p.$$

Действительно, если ГК неверна, то в силу (1.1) $f_p(1) = !p \equiv 0 \pmod p$. Далее, в силу (2.1) $f_p'(1) \not\equiv 0 \pmod p$. По лемме Хензеля (см. [7,8]) существует решение $x_0 \in \mathbb{Z}_p$ уравнения (2.2) вида (2.3). Обратно, если уравнение (2.2) имеет решение вида (2.3), то и $0 = f_p(1 + p\epsilon) \equiv f_p(1) = !p \pmod p$, так что в силу (1.1) ГК неверна. $\square$

Введём аналитическую в диске $|x|_p \leqslant 1$ функцию

$$f_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k!x^k, \quad f_\infty(1) = !\infty.$$

Из (2.1) следует равенство

$$f_\infty'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} kk! = -1. \tag{2.4}$$

d) *ГК эквивалентна утверждению: уравнение*

$$f_\infty(x) = 0, \quad x \in \mathbb{Q}_p, \quad p = 3, 5, \ldots$$

не имеет решений вида (2.3).

Доказательство аналогично c). Используется аналог леммы Хензеля для аналитических функций p-адического аргумента с целыми p-адическими коэффициентами (см. [5, стр. 80]): если $|f_\infty(1)|_p \leqslant p^{-1}$ (и всегда в силу (2.4) $|f_\infty'(1)|_p = 1$), то существует число x_0 вида (2.3) такое, что $f_\infty(x_0) = 0$. $\square$

3. Одно тождество для сумм левых факториалов

Докажем тождество (см. также [3])

$$\sum_{k=2}^{n} !k = !(n-1)n, \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{3.1}$$

Доказательство. В силу (2.1) функция $f_n(x) - n!$ имеет простой корень $x = 1$. Поэтому

$$f_n(x) - n! = (x-1)(b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0), \tag{3.2}$$

где $b_k = b_{k-1} - k!$, $k = 1, 2, \ldots, n-3$, $b_0 = !n - 1$, $b_{n-2} = (n-1)!$. Отсюда выводим равенства $b_k = !n - !(k+1)$, $k = 0, 1, \ldots, n-3$, $b_{n-2} = (n-1)!$.

Дифференцируя равенство (3.2) по x и полагая $x = 1$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1} kk! = \sum_{k=0}^{n-2} b_k = \sum_{k=0}^{n-2} !(k+1) + !n(n-1),$$

откуда, принимая во внимание равенство (2.1), выводим тождество (3.1)

$$n! - 1 = !n(n-1) - \sum_{k=1}^{n-1} !k,$$

поскольку $!n(n-1) + !n - n! = !(n-1)n$. □

Из тождества (3.1) и из критерия (1.1) следует.

e) *ГК эквивалентна несравнению*

$$\sum_{k=2}^{p-1} !k \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad p = 3, 5, \dots .$$

4. Связь левых факториалов с числами Бернулли

Нам понадобится следующее обобщённое сравнение Вильсона

$$q!(p-q-1)! \equiv (-1)^{q+1} \pmod{p}, \quad 0 \leqslant q \leqslant p-1, \quad p = 2, 3, \dots , \tag{4.1}$$

вытекающее из сравнения Вильсона (см. [9]).

Из сравнения (4.1) следует сравнение

$$!p \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}, \quad p = 3, 5, \dots . \tag{4.2}$$

Введём обозначения

$$V_p = \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k \frac{B_k}{k!}, \quad \bar{V}_p = \sum_{k=0}^{p-2} \frac{B_k}{k!}, \tag{4.3}$$

где B_k, $k = 0, 1, \dots$ — числа Бернулли. Они определяются рекуррентным соотношением (см. [7])

$$nB_{n-1} + 1 + \sum_{k=1}^{n-2} B_k C_k^n = 0, \quad B_0 = 1, \quad n = 2, 3, \dots , \tag{4.4}$$

так что $B_1 = -1/2$, $B_3 = B_5 = \dots = 0$.

Докажем сравнение (1.2):

$$!pV_p \equiv \sum_{m=1}^{(p-3)/2} \frac{B_{2m}}{(2m)!} [!(2m) - 1] \pmod{p}, \quad p = 3, 5, \dots . \tag{4.5}$$

Доказательство. Воспользуемся обобщённым сравнением Вильсона (4.1) и сравнением (4.2). Умножая равенства (4.4) на $\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ и суммируя по n от 2 до $p-1$, получим

$$\sum_{n=2}^{p-1}(-1)^{n+1}\frac{B_{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=2}^{p-1}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}+\sum_{n=2}^{p-1}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{B_k(-1)^{n+1}}{k!(n-k)!}=0,$$

откуда выводим сравнение

$$\sum_{k=1}^{p-2}(-1)^k\frac{B_k}{k!}+!p+\sum_{k=1}^{p-3}\frac{B_k}{k!}\sum_{n=k+2}^{p-1}\frac{(-1)^{n+1}}{(n-k)!}\equiv 0 \pmod p,\quad p=3,5,\dots. \tag{4.6}$$

Далее, следующая цепочка равенств и сравнений имеет место

$$\begin{aligned}\sum_{n=k+2}^{p-1}\frac{(-1)^{n+1}}{(n-k)!}&\equiv\sum_{n=k+2}^{p-1}(-1)^k(p-n+k-1)!\\&=(-1)^k\sum_{q=k}^{p-3}q!=(-1)^k[!(p-2)-!k]=(-1)^k(!p-!k) \pmod p,\\&\qquad k=1,2,\dots,p-3.\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.6) следует сравнение (4.5)

$$\sum_{k=1}^{p-2}(-1)^k\frac{B_k}{k!}+!p+\sum_{k=1}^{p-3}(-1)^k\frac{B_k}{k!}(!p-!k)\equiv 0 \pmod p,$$

если учесть, что

$$\sum_{k=1}^{p-3}(-1)^k\frac{B_k}{k!}(!k-1)=\sum_{m=1}^{(p-3)/2}\frac{B_{2m}}{(2m)!}[!(2m)-1],\quad p=3,5,\dots. \qquad\square$$

Из сравнения (4.5) и критерия (1.1) следует такое достаточное условие справедливости ГК.

f) *Если*

$$\sum_{m=1}^{(p-3)/2}\frac{B_{2m}}{(2m)!}[!(2m)-1]\not\equiv 0 \pmod p,\quad p=5,7,\dots, \tag{4.7}$$

то ГК верна и справедливо несравнение

$$V_p\not\equiv 0 \pmod p,\quad p=5,7,\dots. \tag{4.8}$$

Если же справедливо несравнение (4.8), *то ГК эквивалентна несравнению* (4.7).

5. Исследование сумм V_p и $\bar{V}_p$

Если ввести сумму

$$V'_p = \sum_{m=1}^{(p-3)/2} \frac{B_{2m}}{(2m)!}, p = 3, 5, \dots, \quad V'_3 = 0, \quad V'_5 = 1/12,$$

то суммы V_p и $\bar{V}_p$ примут вид

$$V_p = 3/2 + V'_p, \quad \bar{V}_p = 1/2 + V'_p. \tag{5.1}$$

Воспользуемся известной формулой (см. [7])

$$B_{2m} = 2(-1)^{m-1}\frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m}}\zeta(2m), \quad m = 1, 2, \dots, \tag{5.2}$$

где ζ — дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p=2}^{\infty}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

(о дзета-функции Римана см. [12]). В силу (5.2) выражение для V'_p примет вид

$$\begin{aligned} V'_p &= 2\sum_{m=1}^{(p-3)/2}(-1)^{m-1}\frac{\zeta(2m)}{(2\pi)^{2m}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{(p-3)/2}\frac{(-1)^{m-1}}{(2\pi n)^{2m}} \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi n)^{-2} + (-1)^{(p-1)/2}(2\pi n)^{1-p}}{1+(2\pi n)^{-2}}, \end{aligned}$$

то-есть

$$V'_p = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 + (-1)^{(p-1)/2}(2\pi n)^{3-p}}{1+(2\pi n)^2}. \tag{5.3}$$

Но (см. [7])

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(2\pi n)^2} = \frac{1}{e-1} - 1 + 1/2 = \frac{3-e}{2(e-1)} \approx 0,08197\dots.$$

Перепишем равенство (5.3) в виде

$$V'_p = \frac{3-e}{2(e-1)} + (-1)^{(p-1)/2}\epsilon_p, \tag{5.4}$$

где

$$\epsilon_p = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^{p-3}(1+4\pi^2 n^2)}.$$

Оценим ϵ_p $(p = 5, 7, \dots)$:

$$\epsilon_p < 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^{p-1}} = 2\frac{\zeta(p-1)}{(2\pi)^{p-1}} = \frac{|B_{p-1}|}{(p-1)!} \leqslant 2\frac{\zeta(4)}{(2\pi)^{p-1}},$$

$$\epsilon_p > 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi^2}{(2\pi n)^{p-1}(1+4\pi^2)} = 2\frac{4\pi^2}{1+4\pi^2}\frac{\zeta(p-1)}{(2\pi)^{p-1}} > \frac{8\pi^2}{(1+4\pi^2)(2\pi)^{p-1}},$$

то-есть

$$1,95(2\pi)^{1-p} < \epsilon_p < 2,22(2\pi)^{1-p}, \quad p = 5, 7, \dots. \tag{5.5}$$

Из оценок (5.5) и из равенства (5.4) следует, что p-целые числа $V_p > 0$, $\bar{V}_p > 0$ и $V'_p > 0$ $(V'_3 = 0)$ и при $p \to \infty$

$$V_p \to \frac{e}{e-1}, \quad \bar{V}_p \to \frac{1}{e-1}, \quad V'_p \to \frac{3-e}{2(e-1)}.$$

6. Голоморфные функции с p-целыми коэффициентами Тейлора

Пусть p–простое число. Рациональное число x называется *p-целым*, если оно может быть представлено в виде $x = a/b$, где a и b — целые числа и $b \not\equiv 0 \pmod p$. Множество p-целых чисел образует кольцо.

Лемма 1. *Если $p \geqslant 3$ и функция*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$$

голоморфна в круге $|z| < a$ и непрерывна в $|z| \leqslant a$, причем коэффициенты a_k, $k = 0, 1, \dots, p-q$, p-целые, то

$$\begin{aligned} J_q &= \sum_{k=0}^{p-q} \frac{a_k}{k!} \\ &\equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a} \frac{f(z)}{z}\Big[\Big(1-\frac{1}{z}\Big)^{p-1} - \frac{1}{z^{p-1}} - \frac{1}{z^{p-2}} - \dots - \frac{1}{z^{p+1-q}}\Big]\,dz \pmod p, \\ &\qquad q = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Доказательство. По теореме о вычетах справедливо равенство

$$\frac{a_k}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a} \frac{f(z)}{z^{k+1}}dz, \quad k = 0, 1, \dots,$$

откуда выводим

$$J_q = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a} f(z)\sum_{k=0}^{p-q}\frac{dz}{z^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a} f(z)\frac{z^{p-q+1}-1}{z^{p-q+1}(z-1)}dz. \tag{6.2}$$

Пусть $q=1$. Продолжая равенства (6.2), получим сравнение (6.1)

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a} f(z)\frac{[1+(z-1)]^p-1}{z^p(z-1)}dz \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a} f(z)\frac{(z-1)^{p-1}}{z^p}\,dz \pmod p,$$

поскольку $C_k^p \equiv 0 \pmod p$, если $k\neq 0$ или $k\neq p$.

Пусть $q\geqslant 2$. Продолжая равенства (6.2), аналогично получим сравнение (6.1)

$$\begin{aligned} J_q &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a} f(z)\frac{z^p-z^{q-1}}{z^p(z-1)}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a} f(z)\frac{[1+(z-1)]^p-z^{q-1}}{z^p(z-1)}dz \\ &\equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a} f(z)\frac{(z-1)^{p-1}+\frac{1-z^{q-1}}{z-1}}{z^p}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a} \frac{f(z)}{z}\Big[\frac{(z-1)^{p-1}}{z^{p-1}} - \frac{1+z+\ldots+z^{q-2}}{z^{p-1}}\Big]dz. \qquad \square \end{aligned}$$

Пусть все коэффициенты a_k функции f вещественны, то-есть $f(\bar z)=\bar f(z)$. Сравнение (6.1) при $a=1$ и $q=1,2$ примет вид

$$J_1 \equiv \frac{1}{\pi}(-1)^{(p-1)/2}\int_0^\pi \mathrm{Re}\Big[f(e^{i\theta})e^{-\theta(p-1)/2}\Big]\sin^{p-1}\theta/2\,d\theta \pmod p, \qquad p=3,5,\ldots, \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} J_2 &\equiv \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_0^\pi f(e^{i\theta})e^{-i\theta(p-1)/2}\Big[(-1)^{(p-1)/2}\sin^{p-1}\theta/2 - e^{-i\theta(p-1)/2}\Big]\,d\theta \pmod p \\ &\equiv J_1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{Re}\Big[f(e^{i\theta})e^{-i\theta(p-1)/2}\Big]\,d\theta \pmod p, \quad p=3,5,\ldots. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Действительно, если $f\in L_1(S^1)$ и $\bar f(z) = f(\bar z)$, то справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{Re}\,f(e^{i\theta})d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\,f\big(\frac{i-x}{i+x}\big)\frac{dx}{1+x^2}.$$

Отсюда и из формулы (6.1) при $q=1$ следует формула (6.3)

$$\begin{aligned} J_1 &\equiv \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_0^\pi f(e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})^{p-1}d\theta \\ &= \frac{2^{p-1}}{\pi}(-1)^{(p-1)/2}\int_0^\pi \mathrm{Re}\Big[f(e^{i\theta})e^{-i\theta(p-1)/2}\Big]\sin^{p-1}\theta/2d\theta, \pmod p \end{aligned}$$

так как по теореме Ферма $2^{p-1}\equiv 2 \pmod p$ при $p\geqslant 3$. Аналогично выводится и сравнение (6.4). $\square$

7. Примеры

Применим полученные в п.6 результаты к вычислению сравнений чисел e_p, $!p$, V_p и $\bar{V}_p$ (см. пп. 3 и 4).

Пример 1. Числа $e_p = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!}$, $p = 3, 5, \ldots$. Для них $f(z) = e^z$, $a = 1$, $a_k = 1$, $q = 1$, так что в силу (6.3)

$$e_p \equiv \frac{1}{\pi}(-1)^{(p-1)/2} \int_0^\pi e^{\cos\theta} \cos\bigl[\sin\theta - \theta(p-1)/2\bigr] \sin^{p-1}\theta/2\, d\theta \pmod p.$$

Пример 2. Числа $!p$, $p = 3, 5, \ldots$. Для них $f(z) = -e^{-z}$, $a = 1$, $a_k = (-1)^{k+1}$, $q = 1$, так что в силу (6.3)

$$!p \equiv \frac{1}{\pi}(-1)^{(p+1)/2} \int_0^\pi e^{-\cos\theta} \cos\bigl[\sin\theta + \theta(p-1)/2\bigr] \sin^{p-1}\theta/2\, d\theta \pmod p.$$

Пример 3. Числа V_p, $p = 3, 5, \ldots$. Для них $f(z) = -z(e^{-z} - 1)^{-1}$, $a = 1$, $a_k = (-1)^k B_k$, $q = 2$ (см. [7]), так что в силу (6.4)

$$V_p \equiv \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\pi \Bigl(e^{-e^{i\theta}} - 1\Bigr)^{-1} e^{-i\theta(p-1)/2} \times \Bigl[(-1)^{(p+1)/2} \sin^{p-1}\theta/2 + e^{-i\theta(p-1)/2}\Bigr]\, d\theta \pmod p.$$

Пример 4. Числа $\bar{V}_p$, $p = 3, 5\ldots$. Для них $f(z) = z(e^z - 1)^{-1}$, $a = 1$, $a_k = B_k$, $q = 2$ (см. [7]), так что в силу (6.4)

$$\bar{V}_p \equiv \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\pi \Bigl(e^{e^{i\theta}} - 1\Bigr)^{-1} e^{-i\theta(p-1)/2} \times \Bigl[(-1)^{(p-1)/2} \sin^{p-1}\theta/2 - e^{-i\theta(p-1)/2}\Bigr]\, d\theta \pmod p.$$

8. Применение Главной теоремы Рамануджана

В 1913 году великий индийский математик Сринаваза Рамануджан открыл замечательную теорему, названную им Ramanujan's Master Theorem (RMT) (см. [10]): если в окрестности точки $x = 0$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k!}(-x)^k, \tag{8.1}$$

то существует "естественное" непрерывное продолжение коэффициентов $\varphi(k)$, $k = -1, -2, \ldots$ такое, что

$$\int_0^\infty x^{k-1} F(x) dx = (k-1)!\varphi(-k), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{8.2}$$

Он указал ряд необходимых условий, однако не указал достаточных условий на функцию F, при которых RMT верна, а в конкретных случаях проверял её справедливость.

ПРОБЛЕМА. *Найти необходимые и достаточные условия справедливости* RMT.

(По этому поводу см. Харди [11], а также [10, стр. 299].)
Рассмотрим два примера на применение RMT.

ПРИМЕР 5. При $F(x) = e^{-x}$, $\varphi(k) = 1$, $k \in Z$ RMT верна и формула (8.2) даёт

$$\int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx = (k-1)!. \tag{8.3}$$

Докажем теперь известное сравнение [3]

$$!p \equiv \int_0^\infty (x-1)^{p-1} e^{-x} dx \pmod p. \tag{8.4}$$

Действительно, в силу формулы (8.3)

$$\begin{aligned} !p &= \sum_{k=0}^{p-1} k! = \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^\infty x^k e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} \sum_{k=0}^{p-1} x^k dx \\ &= \int_0^\infty \frac{x^p - 1}{x-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty \frac{[(x-1)+1]^p - 1}{x-1} e^{-x} dx, \end{aligned}$$

откуда и вытекает сравнение (8.4), так как $C_k^p \equiv 0 \pmod p$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$. □

ПРИМЕР 6. Положим

$$F(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{B_k}{k!} (-x)^k,$$

так что

$$\varphi(k) = (-1)^k B_k = B_k, \quad k = 2, 3, \dots . \tag{8.5}$$

Как известно (см. [7, 12]),

$$B_k = -k\zeta(1-k), \quad k = 2, 3, \dots \tag{8.6}$$

есть аналитическая интерполяция чисел Бернулли B_k, $k = 2, 3, \dots$.
Далее, справедливо равенство [8]

$$\int_0^\infty x^s \frac{dx}{e^x - 1} = \Gamma(s+1)\zeta(s+1), \quad \operatorname{Re} s > 0, \tag{8.7}$$

так что RMT верна.

Теперь, пользуясь формулой (5.2), при $s = 2k-1$ из (8.7) выводим

$$\int_0^\infty x^{2k-1}\frac{dx}{e^x-1} = (2k-1)!\zeta(2k) = \frac{|B_{2k}|}{4k}(2\pi)^{2k}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Поэтому

$$\frac{|B_{2k}|}{2k} = 2\int_0^\infty \frac{y^{2k-1}dy}{e^{2\pi y}-1}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{8.8}$$

и стало быть

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{(p-3)/2}\frac{|B_{2k}|}{2k} &= 2\int_0^\infty (e^{2\pi y}-1)^{-1}\sum_{k=1}^{(p-3)/2} y^{2k-1}dy\\ &= 2\int_0^\infty \frac{y^{p-2}-y}{(y^2-1)(e^{2\pi y}-1)}dy = 2\int_0^\infty \frac{[(y-1)+1]^{p-2}-y}{(y^2-1)(e^{2\pi y}-1)}dy\\ &= 2\int_0^\infty \frac{(y-1)^{p-3}-1+\sum_{k=1}^{p-3}(y-1)^{k-1}C_k^{p-2}}{(y+1)(e^{2\pi y}-1)}dy.\end{aligned} \tag{8.9}$$

Докажем сравнение

$$\sum_{k=1}^{(p-3)/2}\frac{|B_{2k}|}{2k} \equiv 2\int_0^\infty \frac{(y-1)^{p-1}-y^2-y-1}{y^2(y+1)(e^{2\pi y}-1)}\,dy \pmod p, \qquad p = 5, 7, \dots . \tag{8.10}$$

Предварительно введём следующее

Определение. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — полиномы с p-целыми коэффициентами. Будем говорить, что $f(x) \equiv g(x) \pmod p$, если соответствующие коэффициенты этих полиномов сравнимы по модулю p.

Лемма 2.

$$\sum_{k=1}^{p-3} x^{k-1}C_k^{p-2} \equiv -\frac{2x^{p-2}+x^{p-3}+x+2}{(1+x)^2} \pmod p. \tag{8.11}$$

Доказательство. Пользуясь обобщённым сравнением Вильсона (4.1), получим следующую цепочку равенств и сравнений, эквивалентную сравнению (8.11)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p-3} x^{k-1}C_k^{p-2} &= \sum_{k=1}^{p-3} x^{k-1}\frac{(p-2)!}{k!(p-2-k)!} \equiv \sum_{k=1}^{p-3} x^{k-1}(-1)^{k+1}(p-k-1)\\ &\equiv \sum_{k=1}^{p-3} x^{k-1}(-1)^k(k+1) = \sum_{k=2}^{p-2} x^{k-2}(-1)^{k+1}k = -\frac{1}{x}\sum_{k=2}^{p-2} x^{k-1}(-1)^k k\\ &= -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\sum_{k=2}^{p-2}(-x)^k = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{x^{p-1}-x^2}{x+1}\\ &= \frac{(p-2)x^{p-2}+(p-1)x^{p-3}-x-2}{(x+1)^2} \equiv -\frac{2x^{p-2}+x^{p-3}+x+2}{(x+1)^2} \pmod p. \quad \square\end{aligned}$$

Применим лемму к интегралу (8.9) при $x = y - 1$. (Эта операция законна, так как подынтегральное выражение в (8.9) за исключением множителя $\left(e^{2\pi e} - 1\right)^{-1}$ есть полином по y по модулю p с p-целыми коэффициентами в силу (8.8).) В результате получим сравнение (8.10):

$$\sum_{k=1}^{(p-3)/2} \frac{|B_{2k}|}{2k} \equiv 2\int_0^\infty \frac{y^2(y-1)^{p-3} - 2(y-1)^{p-2} - (y-1)^{p-3} - y^2 - y - 1}{y^2(y+1)(e^{2\pi y} - 1)}\,dy \pmod p, \quad p = 5, 7, \dots .$$

Действуя подобным образом и исходя из формулы (см. [8])

$$\int_0^\infty x^s \frac{dx}{e^x + 1} = \Gamma(s+1)\zeta(s+1)(1 - 2^{-s}), \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

получим сравнение

$$\sum_{k=1}^{(p-3)/2} \frac{|B_{2k}|}{2k}(1 - 2^{1-2k}) \equiv 2\int_0^\infty \frac{(y-1)^{p-1} - y^2 - y - 1}{y^2(y+1)(e^{2\pi y} + 1)}\,dy \pmod p, \quad p = 5, 7, \dots .$$

Благодарности. Благодарю Фонд поддержки ведущих научных школ (проект 00-15-96073) за частичную финансовую поддержку. Благодарю профессора А. А. Карацубу за плодотворные обсуждения.

Литература

1. Đ. Kurepa, *On the left factorial function $n!$*, Math. Balkan. 1 (1971), 147–153.
2. M. Živković, *The number of primes $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}i!$ is finite*, Math. Comput. 68 (1999), 403–409
3. A. Ivić and Ž. Mijajlović, *On Kurepa's Problems in Number Theory*, Publ. Inst. Math. 71 (1995), 19–28.
4. B. Dragović, *On some finite summs with factorials*, Facta Univ., Ser. Math. Inf. 14 (1999), 1–10.
5. W. H. Schickhof, *Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis*, Cambridge University Press, 1984.
6. V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p-Adic analysis and mathematical physics*, World Scientific, Singapore, 1994.
7. Z. I. Borevich and I. R. Schafarevich, *Number Theory*, Academic Press, 1966.
8. N. Koblitz, *p-adic numbers, p-adic analysis and zeta-functions*, Springer-Velag, 1977.
9. И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, Физматгиз, Москва, 1952.
10. Bruce C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part I*, Springer-Verlag, 1985.
11. G. H. Hardy, *Ramanujan, 3-rd ed.*, Chelsea, New York, 1978.
12. А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Физматлит, Москва, 1983.
13. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, Москва, 1963.

Steklov Mathematical Institute
Gubkina Str. 8
117966 GSP-1
Moscow, Russia

(Поступила 10 09 2002)