PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 75(89) (2004), 25–52

КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ

В. А. Зорич

М. А. Лаврентьеву, Б. В. Шабату, П. П. Белинскому
с благодарной памятью

Резюме. В статье-обзоре рассказано о некоторых вопросах и результатах теории квазиконформных отображений (в основном пространственной теории и в основном в геометрическом аспекте). Прослежено развитие идей от первоисточников до их современной реализации и указан ряд новых задач, естественно выросших из найденных решений старых.

Содержание

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 30C65; Secondary 30F10, 53C20, 53A30.

Этот обзор является обновленным вариантом одноименной статьи автора в Успехах Матем. Наук 57:3, (2002). Он печатается с любезного разрешения автора и редколлегии журнала УМН.

В статье рассказано о некоторых задачах и результатах близкой мне части математики. Каждый, кто упомянут в посвящении, внес в эту область свой, возможно, разный по масштабам, но запоминающийся этапный вклад, стимулировавший дальнейшие, в том числе и мои, исследования. Изложение будет по-возможности в хронологической последовательности. Это позволит проследить, как решение одних проблем порождает много новых (занятия наукой — дело продуктивное).

1. Квазиконформное отображение

Образом шара при невырожденном линейном отображении $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является эллипсоид, который сам является шаром в точности тогда, когда L — конформное (сохраняющее углы) отображение. Значит, отношение $k_L := \lambda_n/\lambda_1$ наибольшей полуоси эллипсоида-образа к его наименьшей полуоси (или, скорее, $\log k_L$) может служить мерой отклонения отображения от конформности. Величина k_L называется *коэффициентом квазиконформности отображения* L. (Заметим, и это нам будет полезно ниже, что на языке теории операторов $k_L = \|L\| \cdot \|L^{-1}\|$.)

Если теперь f — диффеоморфизм области $D \subset \mathbb{R}^n$ на область $f(D) \subset \mathbb{R}^n$, то, рассмотрев в каждой точке $x \in D$ касательное отображение $f'(x)$, можно подсчитать величину $k_f(x) := k_{f'(x)}$, называемую *коэффициентом квазиконформности отображения* f *в точке* $x \in D$. Верхняя грань этой величины в области D называется *коэффициентом квазиконформности отображения* f *в области* D и обозначается k_f. Если $k_f < \infty$, то говорят, что f — *отображение с ограниченным искажением* или *квазиконформное отображение*. Если $k_f \leqslant k$, то говорят, что f — k-квазиконформное отображение. Например, 1-квазиконформное отображение — конформно.

Ясно, что коэффициент квазиконформности отображения f в точке и все дальнейшее можно было определить, минуя f', используя лишь метрики исходного пространства и пространства, куда идет отображение:

$$k_f(x) := \limsup_{\delta \to +0} \frac{\sup\{d_Y(f(\xi), f(x)) \mid d_X(\xi, x) = \delta\}}{\inf\{d_Y(f(\xi), f(x)) \mid d_X(\xi, x) = \delta\}}.$$

Ясно также, что данное определение применимо и к неоднолистным отображениям, например, к локальным диффеоморфизмам.

Наконец, видно, что введенные величины и понятия инвариантны относительно любых зависящих только от точки, но не от направления, изменений масштабов (что физики относят к разряду калибровочных преобразований, а геометры называют конформной заменой метрики).

Квазиконформные отображения появились в конце 20-х – начале 30-х годов минувшего столетия в работах Грёча [1, 2] и Лаврентьева [3, 4] (хотя неявно присутствовали уже у Гаусса и Бельтрами в связи с введением изотермических, т.е. конформно-евклидовых, координат на двумерной поверхности). Было обнаружено [1, 4], что многие, даже сравнительно тонкие факты комплексного анализа (например, теорема Пикара) верны вовсе не только для голоморфных функций (подобно тому, как "основная теорема алгебры" о существования корня коплексного полинома есть очень важный и очень специальный случай теоремы об индексе отображения). Это обстоятельство нашло свое далекое развитие в исследованиях Альфорса 30-х годов, построившего геометрический аналог теории Неванлинны распределения значений голоморфных функций [5]. За исследования по комплексному анализу он стал в 1936 году (наряду с Дугласом, награжденным за результаты по проблеме Плато) одним из двух первых лауреатов премии Филдса. Именно у Альфорса[5], по-видимому, и появился сам термин *квазиконформное отображение*.

В конце 30-х – начале 40-х годов квазиконформные отображения оказываются в центре программы Тейхмюллера [6-9] исследования *проблемы модулей* римановых поверхностей, идущей от Абеля и Римана. На одной и той же топологической поверхности, например, *на компактной поверхности рода g могут быть реализованы разные конформные структуры.* Сколькими параметрами (модулями) определяется это разнообразие конформных структур и как ввести эти параметры (желательно с комплексной структурой на них) — вот, содержание проблемы модулей. В упрощенном виде это вопрос о том, сколько конформно различных римановых поверхностей данного рода g бывает. Ответ: при $g > 1$ их разнообразие определяют $6g - 6$ вещественных или $3g - 3$ комплексных параметров. Тейхмюллер ввел расстояние (*метрику Тейхмюллера*) между различными римановыми поверхностями данного рода (т.е. между конформными структурами или точками пространства параметров) следующим образом. Если рассматриваемые поверхности одного рода g не эквивалентны конформно, то во всяком случае они диффеоморфны. Всякий диффеоморфизм компакта является квазиконформным отображением. Пусть k — коэффициент квазиконформности экстремального квазиконформного отображения, наименее уклоняющегося от конформности. Тогда $\log k$ примем за рассматриваемое расстояние. Так (с некоторыми опущенными здесь уточнениями) возникает *пространство Тейхмюллера* римановых поверхностей.

Стоит отметить, что первая задача об отыскании наименее неконформного отображения между конформно различными объектами (играющая в этих вопросах роль, подобную роли вездесущей леммы Шварца в классической теории аналитических функций) была рассмотрена уже Грёчем [2], носит его имя и состоит в следующем. На плоскости даны два прямоугольника. Среди всех отображений этих прямоугольников с соответствием вершин найти наименее неконформное. Грёч (кстати, ученик Кёбе) доказал, что *во всех разумных смыслах экстремальным оказывается соответствующее линейное отображение.*

Программа Тейхмюллера (погибшего во время второй мировой войны) в значительной степени была реанимирована и реализована трудами Альфорса и Берса [10]. В пространстве Тейхмюллера была введена также комплексная структура.

В последнее время пространство Тейхмюллера стало атрибутом физиков-теоретиков, занимающихся квантовой теорией поля и так называемой теорией струн.

Важным и часто используемым инструментом теории квазиконформных отображений в вещественно двумерном случае является *теорема о возможности отобразить одну область плоскости на другую решениями уравнения Бельтрами* $f_{\bar z} = \mu(z) f_z$, где $|\mu|(z) \leqslant q < 1$. При $\mu(z) \equiv 0$ это уравнение (система) Бельтрами сводится к уравнению (системе) Коши-Римана $f_{\bar z} = 0$, а сама теорема — к классической теореме Римана о конформном отображении областей плоскости. Заметим, что вопрос о конформном отображении двумерной поверхности, например, графика функции, на плоскую область (а значит, и вопрос о конформно-евклидовых, изотермических, координатах на поверхности) немедленно приводится именно к уравнению Бельтрами. Действительно, бесконечно малые круги в точках (точнее, в касательных плоскостях) изогнутой поверхности при ортогональном проектировании ее в плоскость превратятся в распределенное по плоской области семейство бесконечно малых эллипсов. Мы хотим теперь трансформировать полученную в проекции область посредством вспомогательного отображения $w = f(z)$ так, чтобы касательное отображение $dw = f_z dz + f_{\bar z} d\bar z$ в любой точке переводило соответстующий эллипс в круг. А это и означает, что искомое отображение плоской области удовлетворяет уравнению Бельтрами, в котором функция $\mu(z) = f_{\bar z}/f_z$ отвечает данному распределению. Добавим, что если в уравнении Бельтрами коэффициент Бельтрами $\mu_\zeta(z)$ голоморфно зависит от комплексного параметра ζ, то и соответствующим образом нормированное *решение уравнения также голоморфно зависит от этого параметра* [11]. (Развитие и варианты доказательства этой важной теоремы существования можно проследить по работам [4, 8, 12–16]. Кстати, здесь особенно отчетливо видно, что М. А. Лаврентьев воспринимал квазиконформность широко, как подчиненность некоторой весьма общей системе уравнений или соотношений, а отображения, квазиконформные в нынешнем понимании, называл *отображениями с ограниченным искажением* [13].)

Коэффициент Бельтрами, как легко видеть, связан с коэффициентом квазиконформности отображения в точке простым соотношением

$$k_f(z) = \frac{1+|\mu|(z)}{1-|\mu|(z)}.$$

Квазиконформные отображения оказались тесно связанными и с *комплексной динамикой* [17]. Пусть E — множество на комплексной плоскости и f_ζ — голоморфно зависящее от параметра $\zeta, |\zeta| < \delta < 1$ семейство инъективных отображений множества E в эту же плоскость (голоморфная эволюция), причем f_0 — тождественное отображение. (Голоморфная зависимость от параметра ζ подразумевает, что при любом $z \in E$ комплексная величина $f_\zeta(z)$ есть голоморфная функция параметра ζ.) Оказывается всякая такая эволюция множества $E \subset C$ продолжается до голоморфного движения всей плоскости, причем можно считать, что областью изменения параметра является единичный круг. В каждый момент ζ отображение f_ζ удовлетворяет некоторому уравнению Бельтрами, в котором коэффициент Бельтрами голоморфно зависит от параметра ζ. При этом $|\mu_\zeta|(z) < 1$ и по условию $\mu_0(z) \equiv 0$. Тогда по лемме Шварца $|\mu_\zeta|(z) < |\zeta|$ при любом $z \in C$ и любом $|\zeta| < 1$. Таким образом, *голоморфная эволюция происходит квазиконформно*, причем коэффициент квазиконформности отображения f_ζ оценивается сверху величиной $(1+|\zeta|)/(1-|\zeta|)$. Это позволяет теперь использовать свойства квазиконформных отображений при изучении голоморфной динамики. (См. [17] и цитируемую там литературу).

2. Квазиконформные отображения в многомерном случае

Все, о чем шла речь выше, за исключением самого определения квазиконформного отображения, относилось к вещественно думерному или комплексно одномерному случаю. Подобно тому, как теория функций многих комплексных переменных наполнена специфически многомерными явлениями (они-то и представляют основной интерес), теория квазиконформных отображений в пространстве сталкивается с эффектами, которые не наблюдаются в плоском случае.

Первые специфически многомерные эффекты теории квазиконформных отображений (если не считать классической теоремы Лиувилля о конформных отображениях), повидимому, были отмечены в статье [18] М. А. Лаврентьевым. Это исследование не получило непосредственного развития и сформулированные в нем утверждения еще долгое время оставались недоказанными (хотя отдельные работы общего теоретико-функционального плана, относившиеся и к многомерной ситуации, появлялись [19, 20]).

Систематическое изучение пространственных квазиконформных отображений началось в конце 50-х — начале 60-х годов в основном в России (Лаврентьев [21–23], Шабат [24, 25], Решетняк [26, 27], Белинский [28]), Финляндии

(Вяйсала [29, 30]) и США (Геринг [31, 32]). (Отметим еще отдельные работы [33–35], стимулировавшие ряд последующих исследований.)

Из личных впечатлений тех времен помню, что в 1960 году, оканчивая механико-математический факультет МГУ, я писал дипломную работу по теме, полученной от моего научного руководителя, Б. В. Шабата, который был прямым учеником М. А. Лаврентьева. Одним из основных результатов работы было доказательство того, что *любой квазиконформный автоморфизм открытого шара продолжается на границу.*

(В двумерном случае это было установлено Мори [36] и затем доведено до полного описания возникающего автоморфизма граничной окружности Бёрлингом и Альфорсом [37] — знаменитое M-условие.)

Первые многомерные результаты на этот счет появились в работах [25, 30, 32, 38]. Геринг [32] отметил что *продолженное отображение квазиконформно на граничной сфере.*

Это обстоятельство позднее было с успехом использовано Мостовым в его красивой работе [39] о жесткости пространственных гиперболических форм (см. также [40]). Мостов, в частности, показал, что *если два компактных римановых многообразия одинаковой постоянной отрицательной кривизны диффеоморфны, а их размерность больше двух, то они изометричны.*

Вспоминая теорему униформизации Клейна–Пуанкаре–Кёбе и модель Пуанкаре планиметрии Лобачевского в круге, нетрудно понять, что это находится в полном контрасте с существованием модулей конформных структур на двумерных поверхностях.

Теорема Мостова имела большой резонанс и развивалась во многих направлениях (в работах Маргулиса, Салливана, Тукиа, самого Мостова и других).

Однако первое наблюдение о конформной жесткости пространства было сделано еще в середине XIX-го века, когда почти одновременно, Риман [41] установил (1851 г.) свою теорему о богатстве конформных отображений областей размерности $n = 2$, а Лиувилль [42] установил (1850 г.) конформную жесткость областей пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, доказав следующее:

Каждое конформное отображение (класса гладкости $C^{(4)}$) области пространства $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$ является композицией инверсий.

Таким образом, в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$ конформные отображения сводятся к группе Мёбиуса, т.е. к тому, что в плоском случае называют дробно-линейными преобразованиями.

Природа явления связана с переопределенностью системы уравнений, отвечающей условию конформности отображения, когда $n > 2$. Эта система есть система Коши–Римана, когда $n = 2$.

Проявления конформной жесткости пространства наблюдаются и в свойствах пространственных квазиконформных отображений, о чем еще будет сказано ниже.

Большое количество современных работ было посвящено как доказательству теоремы Лиувилля при минимальных условиях регулярности отображения, так и устойчивости в этой теореме относительно разных норм (см. [21, 26–28, 43–51] и цитированную там литературу).

Вернемся теперь еще к граничным свойствам квазиконформных отображений. Продолжая ими заниматься в аспирантские годы (1960–1963), я, в выполненной под руководством Шабата кандидатской диссертации, в частности, описал соответствие границ, возникающее при квазиконформных отображениях шара в евклидово пространство той же размерности. Тем самым был построен пространственный аналог теории Каратеодори соответствия границ.

Суть теории Каратеодори, как известно, состоит в следующем. По теореме Римана любую односвязную область, отличную от всей плоскости, можно конформно отобразить на круг. Граница области может быть сложной и тогда точкам окружности (границы круга) на границе области не обязаны отвечать одноточечные множества. Что же соответствует точке? Конечно, имея само конформное отображение, можно было бы перенести метрику из круга в область и провести пополнение области по этой метрике. Каратеодори придумал, как все сделать, не зная отображения, а глядя только на данную область. Он определил граничные элементы (*простые концы*) любой односвязной области плоскости, которые в случае жордановой границы, конечно, сводятся к геометрическим точкам. По-видимому, это была первая нетривиальная топологическая компактификация односвязных областей плоскости, делающая из любой такой области объект, гомеоморфный замкнутому кругу. (Каратеодори коснулся многих областей математики, и не только математики. Ниже мы вскользь скажем о метрике Карно–Каратеодори, порожденной работой Каратеодори по термодинамике. Кстати, по оценке Лаврентьева [52] — большого знатока конформных отображений, Каратеодори принадлежит первое исчерпывающее доказательство теоремы Римана, полученное им в 1913 году, включающее описание граничного поведения отображения.)

Упомянутое выше распространение теории Каратеодори на случай квазиконформных отображений шара [38, 53] в качестве попутного продукта имело некоторые следствия, относящиеся, с одной стороны, к исходной классической теории и, с другой стороны, к гипотезе Лаврентьева (из работы [18]) об особенностях граничного поведения квазиконформных отображений шара в пространстве. А именно, был указан максимальный класс отображений (разумеется, включающий конформные и казиконформные отображения), для которого соответствие границ осуществляется по простым концам Каратеодори [53–55], т.е. были очерчены максимальные рамки действия классической теории. С другой стороны, и это относится уже к многомерному случаю, появилась возможность предъявлять различные области, гомеоморфные шару и не допускающие квазиконформное отображение на шар (см. в этой связи также работы [25, 30, 56]). Например, на плоскости круг с выброшенным радиусом можно конформно отобразить на круг, а шар с выброшенным радиусом нельзя отобразить на шар даже квазиконформно (что укладывается в гипотезу Лаврентьева). Однако, если из шара удалить не радиус, а площадку, примыкающую к граничной сфере, то получится область квазиконформно эквивалентная шару (что противоречит гипотезе Лаврентьева и одновременно указывает на то, как ее формулировку следует подправить).

Однако, главным из двух утверждений Лаврентьева, высказанных им в работе [18], было другое, и оно оказалось абсолютно правильным (так сложилось, что его доказательство стало предметом моей докторской диссертации, защищенной на мех-мате МГУ в 1969 году).

3. Теорема о глобальном гомеоморфизме

Теорема о глобальном гомеоморфизме для квазиконформных отображений описывает следующее специфически многомерное явление (сформулировано в [18] для $n = 3$; доказано позднее в [57]):

Локально обратимое квазиконформное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *при* $n > 2$ *обратимо глобально.*

(Отметим, что вопрос о глобальной обратимости локально обратимых полиномиальных отображений $\mathbb{C}^n$, так называемая *проблема якобиана*, остается открытым. Голоморфность и квазиконформность в высших размерностях — почти ортогональные свойства.)

Отображение $z \mapsto \exp\frac{1}{z}$ показывает, что условие $n \geqslant 3$ здесь, конечно, существенно.

Существенно также и то, что f локально гомеоморфно. Это уже требует некоторой работы и демонстрируется примером отображения $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ с ограниченным искажением, построенного в работе [57]. (Я с благодарностью вспоминаю по этому поводу один полезный совет П. П. Белинского.) Это двоякопериодическое отображение напоминает $\exp(z)$, но, в отличие от $\exp(z)$, оно имеет ветвления вдоль двоякопериодической системы параллельных прямых. Построенное отображение, как и $\exp(z)$, имеет пару выпускаемых значений (0 и ∞). В этой связи в работе [57] был поставлен вопрос о справедливости теоремы Пикара для целых (определенных во всем пространстве $\mathbb{R}^n$) отображений с ограниченным искажением. Неожиданный ответ был получен Риккманом [58], который показал, что число выпускаемых значений всегда конечно и ограничено величиной, зависящей только от коэффициента квазиконформности k_f отображения f; но, в отличие от двумерного случая, это число может неограниченно расти вместе с ростом коэффициента квазиконформности отображения [59, 60].

Теорема о глобальном гомеоморфизме имеет ряд нетривиальных обобщений уже в рамках $\mathbb{R}^n$ (см. обзор [61]). Упомянем два.

Асимптотика допустимого роста коэффициента квазиконформности. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ($n \geqslant 3$) произвольное локально гомеоморфное отображение, и пусть $k(r)$ — его коэффициент квазиконформности в шаре $B^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leqslant r\}$. Если отображение f квазиконформно, то функция $k(r)$ ограничена, но в общем случае она может расти. Оказывается (см. [62]), если $\int^{\infty} \frac{dr}{rk(r)} = \infty$, то отобажение f глобально обратимо, причем эта асимптотика допустимого роста $k(r)$ точна в том смысле, что для любой функции $k(r)$ (неотрицательной и неубывающей), для которой указанный интеграл сходится, можно построить такое отображение всего пространства $\mathbb{R}^n$ на единичный шар, у которого коэффициент квазиконформности не больше, чем $k(r)$.

Кстати, вторая часть сформулированной теоремы (пример) действует во всех размерностях $n \geqslant 2$, как и то, что инъективное квазиконформное отображение $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ в себя всегда сюръективно. Если принять во внимание конформно-евклидову модель Пуанкаре гиперболического пространства Лобачевского в шаре (круге), то можно понять, что теорема дает количественное представление о степени конформного различия пространств Евклида и Лобачевского в целом.

Выше мы упомянули остающуюся пока открытой проблему якобиана. Можно было бы попробовать применить к ней эту теорему. Однако коэффициент квазиконформности полиномиального отображения растет, как правило, полиномиально, а не логарифмически, поэтому для доказательства глобальной обратимости полиномиального отображения необходимо привлекать дополнительные соображения, связанные с его спецификой.

Радиус инъективности. Мартио, Риккман и Вяйсала [63] нашли следующее красивое развитие теоремы о глобальном гомеоморфизме, обобщающее заодно на случай квазиконформных отображений близкий результат Джона [64], относящийся к квазиизометриям. Пусть Q_k — класс локально гомеоморфных отображений $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ единичного шара в $\mathbb{R}^n$ с коэффициентом квазиконформности $k_f < k$. Пусть r_f — радиус наибольшего концентрического с B^n шара, в котором f еще инъективно. Утверждение: *если $n \geqslant 3$, то $r(n,k) := \inf_{f\in Q_k} r_f > 0$.*

Итак, каждое такое отображение инъективно в шаре радиуса $r(n,k)$, называемого *радиусом инъективности.* Радиус инъективности зависит только от коэффициента квазиконформности отображения и от размерности пространства.

Радиус инъективности, очевидно, меняется пропорционально радиусу исходного шара, поэтому, заменяя здесь шар B^n всем пространством $\mathbb{R}^n$, мы вновь получаем теорему о глобальном гомеоморфизме (формально получаем только инъективность, но это здесь главное, дальнейшее просто).

4. Переход к римановым многообразиям

Новиков (который, наряду с Витушкиным и Маркушевичем, был официальным оппонентом в упомянутой выше защите моей докторской диссертации) поставил следующий общий вопрос. Рассмотрим квазиконформное погружение (иммерсию) $f : M^n \to N^n$ одного риманова многообразия в другое риманово многообразие той же размерности $n \geqslant 3$. Для каких M^n и N^n справедлива теорема о глобальном гомеоморфизме? Полного ответа на этот вопрос я не знаю и сейчас, хотя кое-что свежее и содержательное будет приведено ниже.

Громов [65, 66] распространил теорему о глобальном гомеоморфизме на квазиконформные погружения римановых многообразий и частично ответил на этот вопрос:

Если $f : M^n \to N^n$ локально гомеоморфное квазиконформное отображение полного риманова многообразия M^n конечного объема в односвязное ри-

маново многообразие N^n, то при $n \geqslant 3$ отображение инъективно и хаусдорфова размерность множества $N^n \setminus f(M^n)$ равна нулю.

Класс квазиконформных отображений инвариантен относительно конформных замен римановой метрики, поэтому сопоставление исходной теоремы о глобальном гомеоморфизме с этим ее обобщением на римановы многообразия приводит к следующему чисто геометрическому вопросу.

Рассмотрим некомпактное риманово многообразие (M^n, g) и класс метрик $\tilde{g} = \lambda^2 g$ на нем, конформно эквивалентных его исходной метрике. Когда этот класс содержит полную метрику конечного объема?

Ответ на сформулированный вопрос (и на ряд других, как выясняется, близких вопросов) ведет к разделению некомпактных многообразий на два класса: *конформно-параболические* и *конформно-гиперболические.*

После такого замечания ответ угадывается не более чем с одной попытки. Правильный ответ: *это можно сделать тогда и только тогда, когда (M^n, g) — многообразие конформно-параболического типа.* (Например, как $\mathbb{R}^n$ в исходной теореме о глобальном гомеоморфизме.)

Это (теперь почти очевидное) наблюдение было сформулировано в докладе [67] и работе [61, стр. 140], где пояснено, что его можно рассматривать как геометрическую интерпретацию одного хорошо известного свойства модулей семейств кривых (или вообще семейств мер: [33, стр. 179]).

Чтобы определить и обсудить понятие конформного типа риманова многообразия, напомним определения двух взаимосвязанных конформных инвариантов.

5. Конформные инварианты

Конформная ёмкость. *Конформной ёмкостью* конденсатора $R(C_0, C_1)$ называется величина

$$\operatorname{cap} R(C_0, C_1) := \inf \int_{M^n} |\nabla U|^n dv,$$

где нижняя грань берется по всем неотрицательным функциям (потенциалам) $U : M^n \to R_+$ с обобщенными производными, таким что $U|_{C_0} = 0$, $U|_{C_1} = 1$.

Например, конформная ёмкость конденсатора $R_{r_0}^{r_1} \subset \mathbb{R}^n$, ограниченного сферами $C_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r_0\}$, $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r_1\}$, где $0 < r_0 < r_1$, равна

$$\operatorname{cap} R_{r_0}^{r_1} = \omega_{n-1} \ln^{1-n}(r_1/r_0),$$

где ω_{n-1} — это $(n-1)$-мера (площадь) единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

(При $n = 2$ это классическая ёмкость, связанная с интегралом Дирихле, оператором Лапласа и ньютоновским потенциалом; конформная ёмкость при $n > 2$, повидимому, появилась в работе [34]).

Модуль. Конформная ёмкость конденсатора может быть описана несколько иначе, в терминах модуля (или экстремальной длины [68, 69, 33, 24, 70]) семейства кривых (или мер). Порой такая форма предпочтительна.

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ — семейство кривых на n-мерном римановом многообразии (M^n, g). Измеримая по Борелю неотрицательная функция $\rho : M^n \to R_+$ называется *допустимой* для Γ, если $\int_\gamma \rho ds \geqslant 1$ для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. *Конформным модулем семейства кривых* Γ называется величина

$$\operatorname{mod}\Gamma := \inf \int_{M^n} \rho^n \, dv,$$

где нижняя грань берется по всем допустимым для Γ функциям.

Взаимосвязь ёмкости и модуля конденсатора. Если Γ — семейство всех кривых в $R(C_0, C_1)$, соединяющих граничные компоненты C_0, C_1 конденсатора $R(C_0, C_1)$, то $\operatorname{mod}(\Gamma) = \operatorname{cap} R(C_0, C_1)$. Доказательство см., например, в [71, 72]. Процесс осреднения (свертка с регулярным ядром) позволяет при вычислении ёмкости конденсатора и модуля соответствующего семейства кривых ограничиться функциями порядка гладкости самого многообразия.

Множества нулевой ёмкости. В определении конденсатора и его ёмкости в качестве C_0 и C_1 можно брать и достаточно произвольные множества, не обязательно континуумы. Если множество $E := C_1$ таково, что $\operatorname{cap} R(C_0, E) = 0$ для некоторого (а тогда и для любого) невырожденного и не пересекающего E континуума C_0, то говорят, что множество E имеет нулевую конформную ёмкость или, полнее, что E есть *множество конформной ёмкости нуль.*

Это равносильно тому, что модуль семейства всех кривых, пересекающих E, равен нулю. Метрическая (хаусдорфова) размерность такого множества E тоже равна нулю (см., например, [33]).

(Кстати, если из любого семейства кривых выбросить кривые бесконечной длины, то конформный модуль семейства не изменится. Поэтому конформный модуль сродни электрической проводимости системы проводов и порой его правильно называют *конформной проводимостью.* Это сразу порождает безошибочную интуицию в интерпретации свойств этой величины (например, ясно что происходит, если кривые семейства удлиняются, укорачиваются или к ним добавляется еще какое-то семейство кривых). Неспрямляемых кривых среди всех кривых, конечно, больше, чем спрямляемых, но для проводимости они бесполезны и она их игнорирует так же, как вычислительная процедура игнорирует иррациональные числа — красу и гордость нашей “пополненной” вещественной прямой.)

Конформная инвариантность ёмкости и модуля. Локальное в λ-раз изменение элемента длины $d\tilde{s} = \lambda(x)ds$ на римановом многообразии (M^n, g), т.е. переход к *конформно эквивалентной метрике* $\tilde{g} = \lambda^2 g$, (что на физическом языке означает калибровочное преобразование, связанное с произволом в выборе местных масштабов) приводит к изменению в λ^n раз численной величины элемента объема и в λ^{-1} раз градиента функции, поэтому форма $|\nabla U|^n dv$, а вместе с ней и конформная ёмкость, инвариантны относительно конформного изменения метрики.

Аналогично, если в соответствии с изменением в λ раз элемента длины на (M^n, g), заменить ρ новой допустимой функцией $\lambda^{-1}\rho$, то можно увидеть, что модуль семейства кривых — тоже конформный инвариант.

Нетрудно также проверить, что конформная ёмкость и конформный модуль квазиинвариантны (меняются не более чем в k^{n-1} раз) при k-квазиконформном отображении.

Это, в частности, влечет инвариантность по отношению к любым квазиконформным отображениям свойства объекта иметь ёмкость нуль или модуль нуль, что будет неоднократно использовано ниже.

6. Конформный тип риманова многообразия

Приведенная выше формула для конформной ёмкости сферического конденсатора $R_{r_0}^{r_1}$ в $\mathbb{R}^n$ показывает, что $\operatorname{cap} R_{r_0}^{r_1} \to 0$ при $r_1 \to \infty$ независимо от величины r_0. По этой причине говорят, что ёмкость $\mathbb{R}^n$ в бесконечности или конформная ёмкость бесконечности пространства $\mathbb{R}^n$ (т.е. ёмкость любого конденсатора $R(C_0, C_1)$, когда C_1 компонента уведена на абсолют) равна нулю. После конформной стереографической проекции пространство $\mathbb{R}^n$ можно интерпретировать как проколотую сферу $S^n \setminus p$, а точку $p \in S^n$ как реализацию бесконечности, абсолюта или, как еще говорят, идеальной границы пространства.

Метрика Пуанкаре в модели Пуанкаре гиперболического пространства Лобачевского H^n в единичном шаре $B^n \subset \mathbb{R}^n$ конформно-евклидова. Значит, конформные ёмкости гиперболических объектов можно вычислять непосредственно в евклидовой метрике. Бесконечность пространства H^n совпадает в модели Пуанкаре с граничной сферой ∂B^n и, в соответствии с формулой для конформной ёмкости сферического конденсатора $R_{r_0}^{r_1}$, имеем $\operatorname{cap} R_{r_0}^{1} > 0$ при любом $r_0 \in]0, 1[$. Таким образом, в случае пространства H^n ёмкость его бесконечности (абсолюта, идеальной границы) положительна.

В классической теории римановых поверхностей, когда любая односвязная поверхность (возникающая там обычно как универсальная накрывающая римановой поверхности) конформно отображается на $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ или на $H^2 \sim B^2$, эти два случая различают как *параболический* и *гиперболический конформный тип поверхности* соответственно.

В высших размерностях конформных отображений на канонические области принципиально нет (в отличие от двумерного случая и в отличие от просто конформных замен метрики g на $\lambda^2 g$). Рассмотренные выше конформные инварианты позволяют, однако, дать внутреннее, конформно-инвариантное определение конформного типа риманова многообразия, не прибегая к конформным отображениям на канонические области.

Подобно пространствам Евклида и Лобачевского, произвольные некомпактные римановы (и даже субримановы) многообразия теперь можно конформно-инвариантно разделить на два класса в соответствии с тем, какова конформная ёмкость абсолюта (бесконечности) этого многоообразия (см. [73, 74]).

Некомпактное риманово многообразие (M^n, g) будем называть многообразием *конформно-параболического типа*, если конформная ёмкость его абсолюта равна нулю, (условно cap $R(C, \partial M^n_\infty) = 0$ для любого отличного от точки континуума $C \subset M^n$); если же эта ёмкость положительна, то будем называть (M^n, g) многообразием *конформно-гиперболического типа.* Такое разделение многообразий по указанным конформным типам, очевидно, инвариантно относительно конформных замен римановой метрики многообразия.

Конформный тип многообразия определяется лишь геометрией многообразия "на бесконечности" или, как говорят, *асимптотической геометрией* многообразия.

Конформная параболичность или гиперболичность многообразия (в соответствии с изложенным выше) на другом языке означает, что модуль семейства всех кривых на многообразии, выходящих на бесконечность (т.е. покидающих любую его компактную часть) равен нулю или положителен соответственно.

Заканчивая обсуждение понятия конформного типа риманова многообразия, отметим, что термины *параболический* и *гиперболический* ходят по всей математике и в разных ее отделах часто имеют разное содержание. Не следует, например, думать, что римановы многообразия конформно-гиперболического типа имеют отрицательную кривизну. Кривизна вообще не является конформным инвариантом. Например, метрика пространства Лобачевского постоянной отрицательной кривизны в модели Пуанкаре конформна евклидовой плоской метрике. Последняя, в свою очередь, после стереографической проекции становится метрикой постоянной положительной кривизны.

Наконец, отметим, что в теории римановых поверхностей тип поверхности определяется как конформный тип ее универсальной накрывающей. Например, крендель с проколом — это некомпактная поверхность, универсальная накрывающая которой имеет конформно-гиперболический тип, хотя сама поверхность в нашей терминологии имеет конформно-параболический тип. В высших размерностях этого разногласия нет, а в двумерном случае его избегают, говоря, что риманова поверхность имеет нулевую или ненулевую границу (не путать с пустым и непустым множеством). В нашем примере крендель с проколом имеет нулевую границу (точнее, идеальную границу нулевой конформной ёмкости).

7. Асимптотическая геометрия и конформный тип многообразия

Выше было дано формальное определение конформного типа риманова многообразия (или, скорее, вообще типа конформной структуры на нем). Вопрос о том, как по геометрии многообразия узнавать его конформный тип принято (в соответствии с традицией, идущей от двумерного случая и теории римановых поверхностей) называть *проблемой типа.* Много работ разных периодов времени посвящено этой теме (см., например, [3, 75–79], но до конца она так и не исчерпана (например, Милнор отмечает, что мы даже не всегда умеем по функции определить конформный тип двумерной поверхности, являющейся графиком этой функции над всей плоскостью.)

Мы остановимся здесь на двух критериях конформного типа риманова многообразия, которые можно рассматривать как развитие идей Альфорса, относящихся к проблеме типа римановых поверхностей. Заодно будет сформулирован и решен еще один чисто геометрический вопрос, на сей раз касающийся изопериметрического неравенства на римановом многообразии.

(Интересно, что близкие идеи и в тот же отрезок времени, что и у Альфорса, проявляются также в работе Лаврентьева [3], где проблема типа затрагивается в качестве одного примера приложений основного результата работы [3] — обобщенной теоремы Римана.)

Изопериметрическое неравенство. — Это соотношение вида

$$P(V(D)) \leqslant S(\partial D) \qquad (\star)$$

между объемом $V(D)$ области D и площадью $S(\partial D)$ ее границы, где P — функция, называемая *изопериметрической функцией* пространства. Конечно, интерес представляет только нетривиальная, а чаще всего, даже максимальная изопериметрическая функция. Например, для евклидова n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ таковой, с точностью до множителя, является функция $P(x) = x^{\frac{n-1}{n}}$, а для пространства Лобачевского H^n — линейная функция $P(x) = x$.

Далее в качестве пространства выступает произвольное n-мерное некомпактное и без края риманово многообразие M с некоторой исходной метрикой g. При переходе от метрики g к конформной ей метрике $\tilde{g} = \lambda^2 g$ (где λ — некоторая положительная регулярная функция на M) одноименные геометрические объекты будут наделяться тильдой.

Будем считать метрику g полной, а объем в ней всего многообразия бесконечным; этого, очевидно, всегда можно добиться, переходя, если надо, к конформно эквивалентной метрике.

Введем следующие обозначения: $B(r)$ — геодезический в метрике g шар радиуса r с фиксированным центром $x_0 \in M$; $V(r)$ — его объем (n-мера); $S(r)$ — площадь ($(n-1)$-мера) его граничной сферы $\partial B(r)$; $R_{r_0}^{r}$ — кольцевая область $B(r) \setminus \bar{B}(r_0)$, которую мы будем называть геодезическим кольцом или просто кольцом.

Двусторонняя оценка конформной ёмкости конденсатора и признаки конформного типа многообразия. Связь того, что уже сказано о проблеме типа, с тем, что мы собираемся изложить, в значительной степени осуществляют и проясняют следующие соотношения (см. [80–82] или [73, 74]):

$$\left(\int_{V(r_0)}^{V(r_1)} P^{\frac{n}{1-n}}\right)^{1-n} \leqslant \operatorname{cap} R_{r_0}^{r_1} \leqslant \left(\int_{r_0}^{r_1} S^{\frac{1}{1-n}}\right)^{1-n}. \qquad (\star\star)$$

Эти неравенства дают следующие геометрические достаточные (необходимые) признаки конформного типа риманова многообразия.

Для конформной гиперболичности (параболичности) n-мерного риманова многообразия (M, g) достаточно (необходимо), чтобы сходился (расходился) интеграл $\int^{\bullet} P^{\frac{n}{1-n}}$.

Для конформной параболичности (гиперболичности) n-мерного риманова многообразия (M, g) достаточно (необходимо), чтобы расходился (сходился) интеграл $\int^{\bullet} S^{\frac{1}{1-n}}$.

В обоих случаях здесь имеется в виду сходимость интеграла на верхнем пределе.

Полезно заметить, что если метрика g сферически симметрична относительно центра x_0, т.е. если g зависит только от расстояния r до x_0 (как в $\mathbb{R}^n$ и H^n), то последний из двух указанных признаков конформного типа становится критерием.

О критериях мы еще скажем ниже, а здесь отметим, что обобщая результаты Кобаяси и Неванлинны, Альфорс в [75] (см. также [5]) показал, что расходимость интеграла $\int^{\bullet} S^{-1}$ является достаточным признаком параболичности односвязной открытой поверхности в классическом смысле теории униформизации, т.е. в смысле возможности ее конформного отображения на всю комплексную плоскость.

Альфорс отметил также, что в конформном классе метрики поверхности параболического типа всегда найдется такая метрика, в которой этот интеграл расходится (такую метрику в случае конформного отображения поверхности на плоскость можно снять прямо с плоскости).

Это красивое наблюдение может служить некоторым основанием для трансформации получаемого таким образом критерия параболичности в определение конформной параболичности любого n-мерного риманова многообразия, как это сделано в [83], где затем доказана эквивалентность такого определения приведенному выше определению в терминах конформной ёмкости.

Итак, справедлив следующий критерий Альфорса конформной параболичности риманова многообразия:

Риманово многообразие (M, g) размерности n конформно-параболично тогда и только тогда, когда существует такая конформная g метрика $\tilde{g}$, в которой многообразие $(M, \tilde{g})$ полно и $\int^{\infty} \tilde{S}^{\frac{1}{1-n}} = \infty$.

Отметим, что Альфорс [5], по-видимому, был первым, кто привлек к проблеме типа и теории распределения значений изопериметрическое неравенство (см., однако, и приведенное выше замечание о работе Лаврентьева [3]) и для $n = 2$ установил указанную взаимосвязь между крайними членами соотношения ($\star\star$). Более того, он заметил, что слева вместо функции P можно поставить любую функцию $\tilde{P}$, изопериметрическую относительно метрики, конформной исходной метрике многообразия (пределами интегрирования должны теперь быть $\tilde{g}$-объемы прежних областей). Это утверждение часто называют леммой Альфорса или, применительно к случаю произвольной размерности n, — леммой Альфорса–Громова.

Ёмкость появилась между крайними членами соотношения ($\star\star$) позже. Заметим, что как конформный инвариант, в облике конформного модуля семейства кривых на плоскости, она родилась у Бёрлинга и Альфорса [68] и оформилась в метод экстремальных длин, который, в свою очередь, выкристаллизовался из приемов Грёча. (См. по этому поводу исторический комментарий

Альфорса к главе 4 в книге [69], а также в двухтомном собрании его сочинений. Метод экстремальных длин или модулей и сам этот конформный инвариант успешно используется как в геометрической теории функций, так и за ее пределами. Вспомним, например, его применение к исследованию граничного поведения конформных и квазиконформных отображений [84, 25, 56] или к качественным вопросам магнитной гидродинамики и теории зацеплений [85, 86].)

Приведем теперь развернутую формулировку сравнительно недавней теоремы [73], содержащей критерии конформной параболичности римановых многообразий и устанавливающей их взаимосвязь.

Условимся говорить, что некоторое свойство или соотношение *реализуемо в каком-то классе метрик*, если оно реализуется, т.е. выполнено для некоторой метрики этого класса.

Например, любое риманово многообразие (M, g) в конформном классе его метрики реализуемо как полное риманово многообразие (т.е. класс полных конформных g метрик не пуст).

Теперь мы можем сформулировать теорему.

Риманово многообразие (M, g) размерности n имеет конформно-параболический тип тогда и только тогда, когда в классе полных, конформных g метрик реализуемы следующие эквивалентные между собой условия:

$$\begin{aligned}
&(i) && \operatorname{vol}(M) < \infty, \\
&(ii) && \int^{\infty} S^{1/(1-n)}(r)\, dr = \infty, \\
&(iii) && \int^{\infty} \Big(\frac{r}{V(r)}\Big)^{1/(n-1)} dr = \infty, \\
&(iv) && \liminf_{r\to\infty} \frac{V(r)}{r^n} < \infty.
\end{aligned}$$

Здесь, как и прежде, $V(r)$ и $S(r)$ — объем и площадь соответственно геодезического шара радиуса r и его границы, а $\operatorname{vol} M$ — объем всего многообразия по отношению к метрике, существование которой утверждается в теореме.

Отметим, что в каждой индивидуальной метрике справедливы импликации

$$(i) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii).$$

Обратных импликаций в индивидуальной метрике может не быть. Теорема, однако, утверждает, что в рамках всего класса конформных метрик многообразия, все эти соотношения (свойства) эквивалентны.

Приведение к линейному виду изопериметрической функции на многообразии конформно-гиперболического типа. Все, что присутствует в последней теореме, связано только с одним правым неравенством соотношения $(\star\star)$. В отличие от площадей и объемов, однозначно определяемых метрикой, изопериметрическая функция P многообразия в левой части $(\star\star)$ имеет произвол. Разумеется, интерес представляет возможно большая (максимальная) изопериметрическая функция. Чтобы дать критерий конформного типа многообразия в терминах изопериметрической функции, желательно решить представляющий самостоятельный интерес вопрос о том, к какому стандартному виду можно привести изопериметрическую функцию многообразия в пределах конформного класса его метрики.

Оказалось [87], что на любом римановом многообразии конформно-гиперболического типа конформной заменой метрики изопериметрическую функцию можно привести к тому же линейному виду, какой она имеет в каноническом гиперболическом пространстве Лобачевского.

Учитывая левое неравенство в ($\star\star$), получаем следующий критерий.

Некомпактное риманово многообразие имеет конформно-гиперболический тип тогда и только тогда, когда конформной заменой метрики на нем можно реализовать такое же линейное изопериметрическое неравенство $V(D) \leqslant S(\partial D)$, как и в каноническом гиперболическом пространстве Лобачевского.

Здесь, как всегда, $V(D)$ — объем области D на многообразии, а $S(\partial D)$ — площадь ее границы.

Есть рабочая гипотеза [87], что на n-мерном многообразии конформно-параболического типа всегда найдется такая полная метрика, конформно эквивалентная исходной метрике многообразия, по отношению к которой изопериметрическое неравенство имеет тот же вид, какой оно имеет в n-мерном пространстве Евклида.

Отметим, что все перечисленные результаты о конформном типе после соответствующей модификации переносятся и на субримановы многообразия (с неголономной структурой) [74, 88].

Мы не останавливаемся здесь более на асимптотической геометрии и геометрических признаках типа (в частности, на различных понятиях параболичности и гиперболичности) многообразия. Скажем лишь, что они представляют серьезный интерес в вопросах глобального анализа (римановы поверхности, свойства решений уравнений на многообразиях, спектры, динамика, диффузия, броуновское движение,...). Помимо уже указанных работ, относившихся к проблеме конформного типа, см., например, обзор [81] и обширную библиографию в нем.

8. Конформно-инвариантная форма теоремы о глобальном гомеоморфизме.

Теперь от конформной геометрии можно вновь вернуться к теореме о глобальном гомеоморфизме и придать ей форму, включающую как исходную теорему, так и ее обобщение, предложенное Громовым.

Если $f : M^n \to N^n$ — квазиконформное погружение (иммерсия или локально гомеоморфное отображение) многообразия M^n конформно-параболического типа в односвязное риманово многообразие N^n, той же размерности n, то при $n \geqslant 3$ отображение является вложением (инъективно) и хаусдорфова размерность множества $N^n \setminus f(M^n)$ равна нулю.

Чтобы полностью включить сюда и исходную теорему, утверждающую в случае $M^n = N^n = \mathbb{R}^n$, что $f(M^n) = N^n$ (тогда как в общем случае это не так) сделаем следующее замечание.

Пользуясь тем, что конформная ёмкость (модуль) является конформным инвариантом, который, к тому же, есть квазиинвариант квазиконформных отображений, можно ввести на многообразии (или вне некоторой его компактной части) такую конформно-инвариантную метрику, по отношению к которой квазиконформные отображения $f : M^n \to N^n$ многообразий становятся квазиизометриями [61]. Если теперь пополнить многообразия по такой метрике, то отображение $f : M^n \to N^n$ естественно продолжится до отображения $\bar{f} : \bar{M}^n \to \bar{N}^n$ пополнененных пространств.

Значит, предыдущую формулировку теоремы можно (или следует) дополнить, сказав, что полученное *вложение* $f : M^n \to N^n$ *продолжается до гомеоморфизма* $\bar{f} : \bar{M}^n \to \bar{N}^n$.

В случае, когда $M^n = N^n = \mathbb{R}^n$, как это было в исходной теореме о глобальном гомеоморфизме, пространство $\mathbb{R}^n$ пополняется одной точкой ($\bar{R}^n = S^n$), неподвижной при отображении $\bar{f} : S^n \to S^n$. Только это обстоятельство и позволяет утверждать, что $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. В общем случае множество $N^n \setminus f(M^n)$ выпускаемых значений непусто (взять хотя бы тождественное отображение проколотой сферы на эту же сферу без прокола).

Изолированная особенность. Теперь уместно обратить внимание на еще одну сторону дела. Из общих топологических соображений, связанных с индексом, вытекает, что если локально гомеоморфное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (или $f : \dot{S}^n \to \dot{S}^n$) гомеоморфно в окрестности бесконечности, то оно гомеоморфно в целом. Поэтому представляет интерес поведение квазиконформного погружения в окрестности изолированной особой точки. На этот счет имеется следующий свежий результат [89], который, ввиду сказанного выше, тоже можно рассматривать как обобщение теоремы о глобальном гомеоморфизме для квазиконформных погружений.

Пусть M^n и N^n — римановы многообразия размерности n, o — точка на M^n и $\dot{M}^n := M^n \setminus \{o\}$. Пусть $f : \dot{M}^n \to N^n$ — квазиконформное погружение. Если многообразие N^n односвязно, а $n \geqslant 3$, то отображение f инъективно в некоторой проколотой окрестности точки o; при этом особенность либо устраняется непосредственно, либо этого можно добиться, пополняя N^n единственной точкой.

Говоря о погружении или иммерсии, мы как и выше имеем в виду локально инъективное (локально обратимое) отображение. Квазиконформность погружения подразумевает ограниченность его коэффициента квазиконформности. Устранение особенности предполагается в категории квазиконформных погружений.

Ранее это утверждение было известно только в случае $N^n = \mathbb{R}^n$ (см. [90, 91]). В основе доказательства сформулированной теоремы лежит теорема о продолжении ростка квазиконформного погружения из работы [92].

Теорема Пикара. В самом начале статьи, говоря о возникновении теории квазиконформных отображений, мы упомянули о том, что многие даже сравнительно тонкие факты теории голоморфных функций справедливы и для более широкого класса функций и отображений. В частности, это относится и к теореме Пикара. Мы добавим теперь к сказанному несколько общих соображений о природе теорем этого типа и закончим одним конкретным утверждением.

Пространство Лобачевского конформно вкладывается в евклидово пространство, а евклидово пространство в пространство Лобачевского не погружается конформно. Это становится очевидным, если вспомнить соответственно модель Пуанкаре гиперболического пространства и две теоремы Лиувилля (о том, что на плоскости целая ограниченная функция — постоянна и о конформной жесткости областей пространства $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$).

Конформный тип многообразия инвариантен не только при конформных заменах метрики, но и при многих других действиях, в том числе при квазиконформных отображениях. Поскольку конформный тип многообразия определяется только его асимптотической геометрией (поведением на бесконечности), то и от отображений, его сохраняющих, можно требовать, чтобы что-то выполнялось асимптотически (на бесконечности), не заботясь о поведении на компактной части.

Суть многих утверждений типа теоремы Лиувилля (о постоянной) или теоремы Пикара, а также их обобщений, состоит в том, что в рассматриваемом классе преобразований (например, квазиконформных) нельзя параболический объект (с малой идеальной границей) погрузить в объект гиперболического типа (с массивным абсолютом). Малая граница скорее стирается, а не раздувается. Разумеется, на одни и те же вещи по мере появления обобщающих знаний появляется возможность смотреть с новых и даже разных позиций.

Возвращаясь к теореме Пикара, отметим, что на плоскости она верна не только для голоморфных функций и неоднолистных квазиконформных отображений (называемых иногда квазиголоморфными), но, например, и для отображений, коэффициент квазиконформности которых $k(r)$ в круге радиуса r растет не слишком быстро с ростом r, а именно, если $\int^{\infty} \frac{dr}{rk(r)} = \infty$ (см. [4]). Это условие нам уже встречалось выше по близкому поводу и на самом деле оно и отвечает за сохранение параболического типа отображаемого многообразия.

Теорема Пикара–Риккмана (о которой мы уже говорили) относится к размерностям $n > 2$ и отличается двумя особенностями: во-первых, выпускаемых точек может быть больше двух, а во-вторых (и это особенно контрастирует с плоским случаем, описанным выше) количество выпускаемых точек может неограниченно расти с ростом коэффициента квазиконформности отображения.

Разумеется, все такие отображения обязаны иметь ветвления, что следует из теоремы о глобальном гомеоморфизме.

Если же рассматривать локально-гомеоморфные отображения, то можно доказать следующее контрастирующее с теоремой Пикара–Риккмана утверждение [92]:

Квазиконформная иммерсия одного риманова многообразия в другое риманово многообразие той же размерности $n > 2$ около существенно особой точки не имеет выпускаемых значений.

При некоторых дополнительных топологических ограничениях подобное явление наблюдается и в двумерном случае [93, 94]. Я признателен И. Кра, обратившему мое внимание на указанные работы.

9. Некоторые открытые вопросы

Нелинейные операторы. Пусть $f : D \to H$, — вообще говоря, нелинейный гладкий оператор, действующий из области D гильбертова (или даже банахова) пространства H. Пусть касательный оператор $f'(x)$ имеет непрерывный обратный в каждой точке $x \in D$. Это обеспечивает локальную обратимость оператора f.

Вспоминая определение коэффициента квазиконформности, в точке x имеем $k_{f'(x)} := \|f'(x)\| \cdot \|(f'(x))^{-1}\|$, и, значит, понятия квазиконформности и коэффициента квазиконформности действуют и для операторов. Тогда естественно спросить, верны ли в бесконечномерном случае для нелинейных операторов с ограниченным искажением (квазиконформных операторов) следующие теоремы: *о глобальном гомеоморфизме, о радиусе инъективности, об изолированной особенности.* Например, операторный аналог теоремы о глобальном гомеоморфизме давал бы следующий принцип обратимости, или теорему существования и единственности, для нелинейных операторов.

Если оператор $f : H \to H$, действующий в гильбертовом пространстве H, локально обратим и имеет ограниченное искажение, то он глобально обратим.

Значит, в этом случае уравнение $f(x) = y$ разрешимо и единственным образом при любой правой части $y \in H$.

Очень может быть (как это случается в теории операторов), что свойства пространства (гильбертово, банахово) здесь существенны.

Напомним, что Неванлинна [95] доказал теорему Лиувилля о конформных отображениях и в случае гильбертова пространства. Однако, я не знаю больше ни одного результата о собственно квазиконформных (не квазиизометрических) отображениях в бесконечномерном случае.

Асимптотика радиуса инъективности. В связи с поставленными выше вопросами, естественно возникает вопрос, относящийся к классическому конечномерному случаю.

Какова асимптотика функции $r(n, k)$ (радиуса инъективности) по размерности n, или, конкретнее, *верно ли, что $\rho(k) := \inf_n r(n, k) > 0$ и существует универсальный радиус инъективности $\rho(k)$?*

Стирание особенностей. Выше (см. раздел Изолированная особенность) было сказано, что если имеется квазиконформное погружение f проколотой окрестности $U \setminus \{o\}$ точки $o \in M^n$ многообразия M^n размерности $n > 2$ в односвязное многообразие N^n той же размерности, то f является вложением (инъективно) в некоторой меньшей проколотой окрестности этой точки.

Есть основания полагать, что этот результат можно с пользой для дела заметно усилить. Однако, до сих пор не решена поставленная еще в работе [57] следующая модельная задача.

Пусть $M^n = N^n = \mathbb{R}^3$, а вместо $U \setminus \{o\}$ рассматриваем проколотую окрестность $U \setminus \{I\}$ замкнутого отрезка I.

Верно ли, что квазиконформное погружение $f : U \setminus \{I\} \to \mathbb{R}^3$ проколотой окрестности отрезка является вложением (инъективно) в некоторой меньшей проколотой окрестности отрезка I?

И второй (совсем свежий) вопрос касается связи неустранимости изолированной особенности и возможной при этом только очень специальной топологии многообразия образа.

Верно ли, что в размерностях $n > 2$ изолированная существенно особая точка квазиконформного погружения риманова многообразия в другое риманово многообразие той же размерности может возникнуть только если последнее имеет топологический тип $S^{n-1} \times S^1$ (хопфов тор) или $T^k \times R^{n-k}$, где T^k — стандартный k-мерный тор?

Когда мы здесь говорим о существенной особенности, имеется в виду, что отображение не имеет в ней ни конечного, ни бесконечного предела. Бесконечность предела означает, что образ точки многообразия, по мере приближения точки многообразия к особенности, покидает любой компакт на многообразии, куда идет отображение.

Вопрос Новикова. В связи с вопросом Новикова о том, для каких многообразий любое квазиконформное погружение $f : M^n \to N^n$ автоматически оказывается вложением, сделаем следующее замечание.

Мы видели, что если $n > 2$ и N^n односвязно, то коформной параболичности многообразия M^n достаточно, чтобы это было так. Легко понять, что при этом многообразие N^n тоже оказывается многообразием конформно-параболического типа и конформно инвариантные пополнения этих многообразий должны быть квазиконформно неразличимы.

Однако, это достаточное условие еще не является необходимым. Группа Гейзенберга H_m размерности $n = 2m+1$ (к примеру, трехмерная) с инвариантной римановой метрикой на ней имеет конформно-гиперболический тип (см. [96, 74]). Вместе с тем не существует даже неоднолистных квазиконформных отображений ее в себя, выпускающих хотя бы одно значение [97]. Т.е. в этом случае справедливы и теорема Лиувилля, и теорема Пикара.

По-видимому, в этом случае справедлива и теорема о глобальном гомеоморфизме, хотя, например, для пространства Лобачевского она, конечно, не имеет места.

Более того, хотя оба пространства имеют конформно-гиперболический тип, нет никакого непостоянного однолистного или неоднолистного квазиконформного отображения группы Гейзенберга в пространство Лобачевского той же топологической размерности [97], хотя в обратном направлении такое отображение, очевидно, есть.

С этой ситуацией мы уже сталкивались, когда вместо группы Гейзенберга выступало евклидово пространство. Оно имело конформно-параболический тип.

Таким образом, препятствием к отображению служит не только различие конформного типа. Дело в том, что многообразия одного конформного типа в размерностях $n > 2$ могут, тем не менее, иметь (квази)конформно разную структуру идеальной границы (абсолюта).

Например, если из сферы S^3 удалить отрезок (в топологическом смысле) или площадку, то в обоих случаях получатся многообразия конформно-гиперболического типа. Однако, они квазиконформно различны и первое нельзя квазиконформно поместить во второе, грубо говоря, потому, что малым абсолютом (образом отрезка) нельзя отделиться от абсолюта второго многообразия, а совпадать эти абсолюты не могут. С другой стороны, второе многообразие легко квазиконформно вкладывается в первое.

Чтобы пояснить ситуацию с обсуждаемым вопросом, напомним, например, казалось бы много более конкретную, но трансцендентную задачу классификации (описания) квазиконформно различных областей в $\mathbb{R}^n$, гомеоморфных шару. Или задачу описания областей, допускающих квазиконформное отображение на шар. Множество таких областей имеет естественную структуру пространства Тейхмюллера, однако, на сей раз это пространство даже не сепарабельно (см., например, [56]).

Квазиконформная изотопия. Хорошо известно (см., например, [11]) и часто используется то обстоятельство, что любое квазиконформное отображение круга на плоскости можно квазиконформно изотопировать в тождественное отображение, непрерывно уменьшая при этом коэффициент квазиконформности (снятие напряжений).

Верно ли это и в высших размерностях для квазиконформных отображений шара и всего евклидова пространства в себя?

См. в этой связи работы [98, 99], аппарат и результаты которых тут могут быть весьма полезны, а также работы [100, 101], где имеются частичные результаты в нужном направлении.

Отметим, что условие непрерывного уменьшения коэффициента квазиконформности здесь существенно. Иначе можно было бы использовать стандартную гомотопию Александера, которая сохраняет коэффициент квазиконформности, делая его равным единице лишь в последний момент, когда отображение тождественно.

Субримановы многообразия. Наряду с касательным расслоением часто естественным образом выделяются те или иные его подрасслоения. Например, связи в механике или в теории управления вводят ограничения на возможные направления смещения системы из данного состояния. Специальные подрасслоения и связанные с ними объекты повсюду встречаются в многомерном комплексном анализе (комплексные касательные), в симплектической геометрии (лагранжевы многообразия), в термодинамике (адиабатические и другие специальные процессы изменения термодинамического состояния).

Часто подрасслоения возникают как нулевые пространства системы дифференциалных форм. Вопросам интегрируемости таких подрасслоений, как известно, посвящены теоремы Фробениуса.

Пусть в каждой точке пространства $\mathbb{R}^3$ выбрана двумерная плоскость и пусть путь в пространстве считается допустимым, если вектор скорости в каждый момент лежит в соответсвующей выделенной плоскости. Возникает вопрос, всегда ли можно соединить точки пространства допустимым путем?

(В случае термодинамики, которой интересовался Каратеодори, это вопрос о возможности, точнее, невозможности адиабатической связи двух произвольных термодинамических состояний системы. Каратеодори дал оригинальную формулировку второго начала термодинамики, в терминах адиабатической недостижимости некоторых состояний, связав его с теорией Пфаффовых форм, и вообще дал в известном смысле современное математическое изложение классической термодинамики; см. работу [102] и инициированную Планком работу [103].)

Если распределение плоскостей неголономно (неинтегрируемо), то пространство $\mathbb{R}^3$ оказывается в этом смысле связным. Тогда в нем можно ввести новую метрику, измеряя расстояния длиной кратчайшей допустимой кривой, соединяющей рассматриваемые точки. Такую метрику в этом примере и в аналогичной общей ситуации называют (по понятным теперь соображениям и, кажется, с легкой руки Громова [104]) метрикой Карно–Каратеодори (C-C метрикой).

Возьмем теперь в $\mathbb{R}^3$ плоскость $z = 0$ с ее естественной евклидовой метрикой. Будем считать ее подпространством пространства $T_0\mathbb{R}^3$, касательного к $\mathbb{R}^3$ в начале координат. Посмотрим на точки пространства $\mathbb{R}^3$, как на элементы группы Гейзенберга H_1. Разнесем выбранную в начале координат (в единице группы) плоскость по всей группе. Получим неголономное распределение гиперплоскостей в $\mathbb{R}^3$, задающих касательное подрасслоение коразмерности 1. В выделенных подпространствах касательных пространств в каждой точке имеется риманова метрика. Такие объекты в геометрии называют субримановыми многообразиями. На субримановых многообразиях определена длина допустимой кривой и, если пространство связно в смысле допустимых переходов, то в нем определена метрика Карно-Каратеодори, как это действительно имеет место в рассматриваемом случае группы Гейзенберга. Построенная метрика Карно–Каратеодори, очевидно, инвариантна относительно действия группы Гейзенберга. Метрика Карно–Каратеодори позволяет рассматривать хаусдорфовы меры геометрических объектов разной размерности. Заметим, что метрическая размерность полученного пространства уже не 3, а 4. С этим обстоятельством связаны многие особенности группы Гейзенберга как C-C (Карно–Каратеодори)-пространства. В частности, она теперь имеет конформно-параболический тип (подробности см. в [74]). Все описанные конструкции, конечно, можно повторить для группы Гейзенберга высших размерностей.

Место группы Гейзенберга по отношению к субримановым (контактным) многообразиям сопоставимо с местом пространства $\mathbb{R}^n$ по отношению к гладким многообразиям: это их локальная линеаризация.

Определение квазиконформности отображения сохраняет силу и по отношению к C-C метрике на группе Гейзенберга.

Верна ли теорема о глобальном гомеоморфизме на группе Гейзенберга, рассматриваемой как пространство Карно–Каратеодори?

В работе [74] сказано, к какой специальной лемме об оценке конкретного интеграла (отвечающего за ёмкость) можно привести ответ на этот вопрос. В случае еклидова пространстава лемма доказана (см. [92]). Недавний препринт [105] по существу уже содержит положительный ответ на этот вопрос.

10. Заключительные замечания

Мы затронули здесь только фрагмент теории квазиконформных отображений (в основном пространственной теории и в основном в геометрическом аспекте), но постарались, хоть и бегло, проследить развитие идей от первоисточников до их современной реализации и указать ряд новых задач, естественно выросших из найденных решений старых.

Мы не касались теоретико-функциональных вопросов, связанных с дифференциальными свойствами квазиконформных отображений, а также методов нелинейных уравнений эллиптического типа с успехом работающих в этой теории. Они представлены в инициировавших их систематическое использование работах Решетняка и его книге [106]. См. также статью [107] и книгу [108].

Из обзоров, посвященных иным аспектам теории квазиконформных отображений на разных стадиях ее развития, укажем [109–112].

Ряд теоретико-групповых, аналитических и геометрических вопросов, тесно примыкающих к обсуждавшимся здесь вопросам асимптотической геометрии многообразий, можно найти в [66, 104, 113, 114].

Развитие методов и основных результатов работы [87] о приведении изопериметрического неравенства к каноническому виду на многообразиях конформно-гиперболического типа можно найти в недавней статье [115].

Литература

[1] H. Grötzsch, *Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenh ängende Erweiterung des Picardschen Satzes*, Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig, **80** (1928), 503–507.

[2] H. Grötzsch, *Über möglichst konforme Abbildungen von schlichten Bereichen*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, **84** (1932), 114–120.

[3] M. Lavrentieff, *Sur une methode geometrique dans la representation conforme*, Atti Congr. Intern. Mat., Bologna, 1928: Commun. Sez. Bologna: Zanichelli **3** (1930), 241–242.

[4] M. A. Lavrentieff, *Sur une classe de representatations continues*, Matem. sb., **42** (1935), 407–424.

[5] L. Ahlfors, *Zur Theorie der Überlagerungsflächen*, Acta Math. **65** (1935), 157–194.

[6] O. Teichmüller, *Untersuchungen über konforme und quasi-konforme Abbildungen*, Deutsche Math. **3** (1938), 621–678.

[7] O. Teichmüller, *Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale*, Abh. Preuß. Akad. Wiss. Mat.-Nat. Kl. **22** (1940), 1–197.

[8] O. Teichmüller, *Ein Verschiebungssatz der quasi-konformen Abbildungen*, Deutsche Math. **7** (1944), 336–343.

[9] O. Teichmüller, *Veränderliche Riemannsche Flächen*, Deutsche Math., **7** (1944), 344–359.

[10] Л. Альфорс, Л. Берс, *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения*, Библиотека сборника “Математика”, Издат. Иностр. Литерат., Москва, 1961.
[11] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, Москва, 1969.
[12] C. B. Morrey, *On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), 126–166.
[13] М. А. Лаврентьев, *Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей*, Изв. АН СССР **12** (1948), 513–554. [См. также М. А. Лаврентьев, *Избранные труды Математика и Механика*, Наука, Москва, 1990, 219–319.]
[14] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Физматгиз, Москва, 1959.
[15] L. Ahlfors, L. Bers, *Riemann's mapping theorem for variable metrics*, Ann. Math. **72**:2 (1960), 385–404.
[16] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва, 1964.
[17] Дж. Милнор, *Голоморфная динамика*, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000.
[18] М. А. Лаврентьев, *Об одном дифференциальном признаке гомеоморфных отображений трехмерных областей*, Докл. Акад. Наук СССР, **20** (1938), 241–242.
[19] А. И. Маркушевич, *О некоторых классах непрерывных отображений*, Докл. Акад. Наук СССР **28** (1940), 301–304.
[20] М. А. Крейнес, *Sur une classe de fonctions de plusieurs variables*, Мат. Сб. **9(51)** (1941), 713–720.
[21] М. А. Лаврентьев, *Устойчивость в теореме Лиувилля*, Докл. Акад. Наук СССР **95** (1954), 925–926.
[22] М. А. Лаврентьев, *К теории пространственных отображений*, Сиб. Мат. Журн. **3**:5 (1962), 710–714.
[23] М. А. Лаврентьев, *К теории отображений трехмерных областей*, Сиб. Мат. Журн. **5**:3 (1964), 596–602.
[24] Б. В. Шабат, *Метод модулей в пространстве*, Докл. Акад. Наук СССР **130** (1960), 1210–1213.
[25] Б. В. Шабат, *К теории квазиконформных отображений в пространстве*, Докл. Акад. Наук СССР **132** (1960), 1045–1048.
[26] Ю. Г. Решетняк, *О конформных отображениях в пространстве*, Докл. Акад. Наук СССР **130** (1960), 1196–1198.
[27] Ю. Г. Решетняк, *Об устойчивости в теореме Лиувилля о конформных отображениях пространства*, Докл. Акад. Наук СССР **152**:2 (1963), 286–287.
[28] П. П. Белинский, *О непрерывности пространственных квазиконформных отображений и о теореме Лиувилля*, Докл. Акад. Наук СССР **147**:5 (1962), 1003–1004.
[29] J. Väisälä, *On quasiconformal mappings in space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **298** (1961), 1–36.
[30] J. Väisälä, *On quasiconformal mappings of a ball*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **304** (1961), 1–17.
[31] F. W. Gehring, *Symmetrization of rings in space*, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 499–519.
[32] F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 353–393.
[33] B. Fuglede, *Extremal lenght and functional completion*, Acta Math. **83** (1957), 101–129;
[34] C. Loewner, *On the conformal capacity in space*, J. Math. Mech. **8** (1959), 411–414.
[35] E. D. Callender, *Hölder-continuity of N-dimensional quasiconformal mappings*, Pacific J. Math. **10** (1960), 499–515.
[36] A. Mori, *On quasi-conformality and pseudo-analyticity*, Trans. Amer. Math. Soc. **84** (195), 56–77.
[37] A. Beurling, L. Ahlfors, *The boundary correspondence under quasiconformal mappings*, Acta Math. **96** (1956), 125–142.
[38] В. А. Зорич, *Соответствие границ при Q-квазиконформных отображениях шара*, Докл. Акад. Наук СССР **145** (1962), 1209–1212.
[39] Г. Д. Мостов, *Квазиконформные отображения и жесткость гиперболических пространственных форм*, Математика, сб. пер., **16**:5 (1972), 105–157. [Оригинал: G. D. Mostow, *Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms*, Publ. IHES **34** (1968), 53–104.]

[40] G. D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Annals of Mathematics Studies 78, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1973.
[41] Б. Риман, *Сочинения*, пер. с нем., Москва–Ленинград, 1948, с. 49–87.
[42] J. Liouville, Extension au cas de trois dimensions de la question du tracé géographique, Шестое приложение к книге: G. Monge, *Application de l'analyseà la géométrie*, Cinqiém édition, revue corrigée et annotée par J. Liouville. Bachelier, Paris, 1850, 608–616.
[43] П. П. Белинский, *Устойчивость в теореме Лиувилля о пространственных квазиконформных отображениях*, В сборнике: *Некоторые проблемы математики и механики*, Труды конференции по случаю семидесятилетия академика М. А. Лаврентьева, Академия наук СССР, Сибирское отделение; Наука, Ленинград, 1970, стр. 88–102.
[44] П. П. Белинский, *О порядке близости пространственного квазиконформного отображения к конформному*, Сиб. Мат. Журн. **14** (1973), 475–483.
[45] Ю. Г. Решетняк, *Теорема Лиувилля о конформных отображениях при минимальных предположениях регулярности*, Сиб. Мат. Журн. **8** (1967), 835–840.
[46] Ю. Г. Решетняк, *Теоремы устойчивости в геометрии и анализе*, Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, 1982.
[47] А. П. Копылов, *Устойчивость в C-норме классов отображений*, Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, 1990.
[48] С. Улам, *Нерешенные математические задачи*, Наука, Москва, 1964.
[49] J. Gevirtz, *Stability of isometries on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 633–636.
[50] F. John, *Rotation and strain*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 391–413, (1961). [*Collected papers, Volume 2*, J. Moser ed., Birkhäuser, 1985, 643–665.]
[51] В. А. Зорич, *Принцип статики и устойчивость изометрий*, В сборнике: *Комплексный анализ в современной математике*, ФАЗИС, Москва, 2001, с. 3–17.
[52] М. А. Лаврентьев, *Избранные труды Математика и Механика*, Наука, Москва, 1990.
[53] В. А. Зорич, *Граничные свойства одного класса отображений в пространстве*, Докл. Акад. Наук СССР, **153** (1963), 23–26.
[54] В. А. Зорич, *Взаимосвязь теоремы Кёбе и теории Каратеодори*, Математ. Заметки **10** (1971), 399–406.
[55] В. А. Зорич, *Класс Каратеодори и пространственный аналог теоремы Кёбе*, Теория отображений, ее обобщения и приложения, 91–101. Сборник научных трудов, Наукова думка, Киев, 1982.
[56] F. W. Gehring and J. Väisälä, *The coefficient of quasiconformality of domains in space*, Acta Math. **114** (1965), 1–70.
[57] В. А. Зорич, *Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства*, Матем. Сб. **74(116)** (1967), 417–433.
[58] S. Rickman, *On the number of omitted values of entire quasiregular mappings*, J. Analyse Math. **37** (1980), 100–117.
[59] S. Rickman, *The analogue of Picard's theorem for quasiregular mappings in dimension three*, Acta Math. **154** (1985), 195–242.
[60] S. Rickman, *Quasiregular Mappings*, Springer-Verlag, 1993.
[61] V. A. Zorich, *Global homeomorphism theorem for quasiconformal mappings in space, its development and related open problems*, Lecture Notes in Mathematics 1508, Springer-Verlag, 1992, pp. 132–148.
[62] В. А. Зорич, *Допустимый порядок роста коэффициента квазиконформности в теореме М. А. Лаврентьева*, Докл. Акад. Наук СССР **181** (1968), 530–533.
[63] O. Martio, S. Rickman and J. Väisälä, *Topological and metric properties of quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I Math. **488** (1971), 1–31.
[64] F. John, *On Quasi-Isometric Mappings, II*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 41–66.
[65] M. Gromov, *Hyperbolic manifolds, groups and actions*, Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference, Ann. of Math. Studies **97** (1981), 183–213, Princeton Univ. Press; Princeton, N.J.
[66] M. Gromov, with appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes, *Metric Structures for Riemannian and non-Riemannian Spaces*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1999.
[67] V. A. Zorich, *On Gromov's geometric version of the global homeomorphism theorem for quasiconformal mappings*, XIV Rolf Nevanlinna Colloquium, Helsinki, June 10–14, 1990. Abstracts, p. 36.

[68] L. Ahlfors, A. Beurling, *Conformal invariants and function-theoretic null-sets*, Acta Math. **83** (1950), 101–129.
[69] L. Ahlfors, *Conformal Invariants (Topics in Geometric Function Theory)*, McGrow Hill, New York, 1973. [См. также: Lars Valerian Ahlfors, *Collected Papers, Vol. 1 and 2*, Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart, 1982.]
[70] J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Mathematics 229, Springer-Verlag, 1971.
[71] F.W. Gehring, *Extremal lenght definitions for the conformal capacity of rings in space*, Michigan Math. J. **9** (1962), 137–150.
[72] W.P. Ziemer, *Extremal lenght as a capacity*, Michigan Math. J. **17** (1970), 117–128.
[73] В.А. Зорич, В.М. Кесельман, *О конформном типе риманова многообразия*, Функц. Анал. Прилож. **30**:2 (1996), 40–55.
[74] V.A. Zorich, *Asymptotic geometry and conformal types of Carnot–Carathéodory spaces*, Geomet. Funct. Anal. **9**:2 (1999), 393–411.
[75] L. Ahlfors, *Sur le type d'une surface de Riemann*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A **201** (1935), 30–32.
[76] L. Ahlfors, E. Calabi, M. Morse, L. Sario, D. Spencer (Editors), *Contributions to the Theory of Riemann Surfaces, Centenial Celebration of Riemann's Dissertation*, Annals of Mathematical Stadies **30**, Princeton University Press, Princeton, 1953.
[77] L. Ahlfors, L. Sario, *Riemann Surfaces*, Princeton Univ. Press, 1960.
[78] J. Milnor, *A note on curvature and fundamental group*, J. Diff. Geom. **2** (1968), 1–7.
[79] J. Milnor, *On desiding whether a surface is parabolic or hyperbolic*, Amer. Math. Monthly **84**:1 (1977), 43-46.
[80] В.Г. Мазья, *Пространства С.Л. Соболева*, Ленинград. унив., 1985.
[81] A. Grigor'yan, *Analytic and geometric backgraund of recurrence and non-explosion of the Brownian motion*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36**:2 (1999), 135–249.
[82] A. Grigor'yan, *Isoperimetric inequality and capacities on Riemannian manifilds*, Operator Theory: Advances and Application **109**, 139–153, Birkhäuser, Basel, 1999.
[83] R. Grimaldi, P. Pansu, *Sur la croissance du volume dans une classe conforme*, J. Math. Pures Appl. **9**:1 (1992), 1–19.
[84] E. Schlesinger, *Conformal invariants and prime ends*, Am. J. Math. **80** (1958), 83–102.
[85] M.H. Freedman, Z.H. He, *Divergence free fields: Energy and asymptotic crossing number*, Ann. Math. **134** (1991), 189–229.
[86] M.H. Freedman, Z.H. He, *Links of tori and the energy of incompressible flows*, Topology **30**:2 (1991), 283–287.
[87] В.А. Зорич, В.М. Кесельман, *Изопериметрическое неравенство на римановых многообразиях конформно-гиперболического типа*, Функц. Анал. Прилож. **35**:2 (2001), 12–23.
[88] В.А. Зорич, В.М. Кесельман, *Изопериметрическое неравенство на субримановых многообразиях конформно-гиперболического типа*, Успехи Мат. Наук **55**:6 (2000), 137–138.
[89] В.А. Зорич, *Устранимая особенность квазиконформного погружения*, Успехи Мат. Наук **56**:4 (2001), 147–148.
[90] S. Agard, A. Marden, *A removable singularity theorem for local homeomorphisms*, Indiana Math. J. **20** (197), 455–461.
[91] В.А. Зорич, *Изолированная особенность отображений с ограниченным искажением*, Матем. Сб. **81** (1970), 634–638.
[92] В.А. Зорич, *Квазиконформные погружения римановых многообразий и теорема пикаровского типа*, Функц. Анал. Прилож. **34**:3 (2000), 37–48.
[93] M. Ohtsuka, *On the behavior of an analytic function about an isolated boundary point*, Nagoya Math. J. **4** (1952), 103–108.
[94] H. Royden, *The Picard theorem for Riemann surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **90**:4 (1984), 571–574.
[95] R. Nevanlinna, *On differentiable mappings*, Analytic functions. Princeton Math. Series. **24** (1960), 3–9.
[96] P. Pansu, *An isoperimetric inequolity on the Heisenberg group*, Proceedings of "Differential Geometry and Homogeneous Spaces", Torino, 1983, 159–174.
[97] I. Holopainen, S. Rickman, *Quasiregular mappings, Heisenberg group, and Picard's theorem*, Proceedings of the Fourth Finnish–Polish Summer School in Complex Analysis at Jyväskylä Ber. Univ. Jyväskylä Math. Inst., **55** (1993), 25–35.

[98] S. K. Donaldson, D. P. Sullivan, *Quasiconformal 4-manifolds*, Acta. Math. **163**:3-4 (1989), 181–252.

[99] T. Iwaniec, G. Martin, *Quasiregular mappings in even dimensions*, Acta. Math. **170**:1 (1993), 29–81.

[100] И. В. Абрамов, Е. А. Роганов, *Квазиконформные гомотопии простейших пространственных отображений*, Мат. Сб. **180**:10 (1989), 1347–1354.

[101] О. А. Асадчий, *К принципу максимума для пространственных квазиконформных отображений*, Мат. Заметки **50**:6 (1991), 14–23.

[102] C. Carathéodory, *Untersuhungen über die Grundlagen der Thermodinamik*, Math. Annalen **67** (1909), 355–386. [См. также: Constantin Carathéodory, *Gesammelte Mathematische Schriften*, München 1955. Zweter Band, S. 131–166.]

[103] C. Carathéodory, *Über die Bestimmung der Energie und der absoluten Temperature mit Hilfe von reversiblen Prozessen*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften Physikalisch-mathematische Klasse, Berlin, 1925, S. 39–47 [См. также: Constantin Carathéodory, *Gesammelte Mathematische Schriften*, München 1955. Zweter Band, S. 167–177.]

[104] M. Gromov, *Carnot–Carathéodory spaces seen from within*, Sub-Riemannian geometry, 79–323, Progr. Math., **144**, Birkhäuser, Basel, 1996.

[105] V. A. Zorich, *On contact quasiconformal immersions*, http://www.fim.math.ethz.ch/Preprints.cgi

[106] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.

[107] T. Iwaniec, *L^p-Theory of Quasiregular Mappings*, Lecture Notes in Mathematics 1508, Springer-Verlag, 1992, 39–64.

[108] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio, *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*, Oxford Mathematical Monographs, Carendon Press, Oxford, 1993.

[109] J. Väisälä, *A survey of quasiconformal maps in $\mathbb{R}^n$*, Proc. Internat. Congr. Math. (Helsinki, 1978), **2**, 685–691, Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980.

[110] S. Rickman, *Recent advances in the theory of quasiregular mappings*, Proc. 19th Nordic Congress of Math., (Reykjavik, 1984), 116–125, 1985.

[111] P. Pansu, *Quasiconformal mappings and manifolds of negative curvature*, Proc. Taniguchi Symposium "Curvature and Topology of Riemannian Manifolds", Katata (1985), Lecture Notes in Mathematics 1201, Springer-Verlag, 1986, 212–229.

[112] F. W. Gehring, *Topics in quasiconformal mappings*, Proc. Internat. Congr. Math. (Berkeley, California, 1986), **1**, 62–80, AMS, 1987.

[113] N. Varopoulos, L. Saloff-Coste, T. Coulhon, *Analysis and Geometry on Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[114] T. Coulhon, I. Holopainen, L. Saloff-Coste, *Harnack inequality and hyperbolicity for subelliptic p-Laplacians with applications to Picard type theorem*, Geometric And Functional Analysis **11** (2001), 1139–1191.

[115] В. М. Кесельман, *Изопериметрическое неравенство на конформно-гиперболических многообразиях*, Мат. Сб. **194**:4 (2003), 29–48.

Механико-математический факультет
Московский государственный университет
119992 Москва, Россия

vzor@online.ru