PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 97(111) (2015), 113–123 DOI: 10.2298/PIM140224001S

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА

**М. С. Сгибнев**

Аннотация. Получено асимптотическое разложение для решения неоднородного разностного уравнения общего вида. Учтено влияние корней характеристического уравнения. Установлена интегральная оценка с полумультипликативным весом для остатка разложения в зависимости от существования соответствующего полумультипликативного момента свободного члена уравнения.

We obtain an asymptotic expansion for the solution of a nonhomogeneous difference equation of general type. The influence of the roots of the characteristic equation is taken into account. An integral estimate with submultiplicative weight function is established for the remainder term depending on the existence of a corresponding submultiplicative moment of the free term of the equation.

## 1. Введение

В монографии [**10**, гл. 1] приведен общий вид разностного уравнения:

$$x(t) = \int_{-\alpha}^{0} [d\mu(\theta)]\, x(t+\theta),$$

где $\mu$ — функция ограниченной вариации. В настоящей работе исследуется асимптотика решения неоднородного разностного уравнения общего вида, допускающего неограниченные разности аргумента. Рассмотрим уравнение

$$\int_0^\infty z(t-u)\,\mu(du) = f(t), \qquad t > 0, \tag{1.1}$$

в котором $z(t)$ — неизвестная функция, $\mu$ — $\sigma$-конечная комплекснозначная мера, $f(t)$ — известная функция такая, что $\int_0^\infty e^{\gamma t}|f(t)|\,dt < \infty$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$; кроме того, $\int_0^\infty e^{\xi x}\,|\mu|(dx) < \infty$ для некоторого $\xi > \gamma$; здесь $|\mu|$ — полная вариация меры $\mu$. Зададим начальное условие в виде

$$z(t) = g(t), \qquad t \in (-\infty, 0], \tag{1.2}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 39A06.
Communicated by Boško Jovanović.

где $\int_{-\infty}^{0} e^{\gamma t}|g(t)|\,dt < \infty$. В работе предполагается, что мера $\mu$ имеет атом в нуле: $\mu(\{0\}) \neq 0$.

Определение 1.1. Измеримая функция $z(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется решением задачи (1.1), (1.2), если $\int_0^\infty e^{\gamma_1 t}|z(t)|\,dt < \infty$ при некотором $\gamma_1 \leqslant \gamma$ и если $z(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду (п.в.) и начальному условию (1.2).

В данной статье устанавливается асимптотическое разложение для решения $z(t)$ уравнения (1.1):

$$z(t) = \sum_{j=1}^{l} P_j(t)e^{-s_j t} + r(t),$$

где $s_j$, $j = 1, \dots, l$, — корни характеристического уравнения (см. (2.3)), $P_j(t)$, $j = 1, \dots, l$, — однозначно определяемые полиномы степеней, меньших кратностей соответствующих корней $s_j$, а остаток $r(t)$ «наследует» моментные свойства исходной функции $f(t)$ в следующем смысле. Если для некоторой полумультипликативной функции $\varphi(t)$ (см. определение 3.1) существует момент $\int_0^\infty \varphi(t)|f(t)|\,dt$, то будет существовать и момент $\int_0^\infty \varphi(t)|r(t)|\,dt$. В § 2 выводится характеристическое уравнение для уравнения (1.1) и приводится конкретный вид искомого асимптотического разложения для решения уравнения (1.1). В § 3 вводятся банаховы алгебры мер, конечных с полумультипликативным весом. В § 4 приводятся вспомогательные результаты. В § 5 формулируется и доказывается основной результат (теорема 5.1). В § 6 даны доказательства лемм.

## 2. Характеристическое уравнение

Выпишем характеристическое уравнение для уравнения (1.1). Обозначим через $z * \mu(t)$ свертку неизвестной функции $z(t)$, $t > 0$, и меры $\mu$: $z * \mu(t) := \int_0^t z(t-u)\,\mu(du)$. Имеем

$$\int_0^\infty z(t-u)\,\mu(du) = \left(\int_0^t + \int_t^\infty\right) z(t-u)\,\mu(du)$$
$$= z * \mu(t) + \int_t^\infty g(t-u)\,\mu(du) = z * \mu(t) + f_1(t), \quad t > 0;$$

здесь $f_1(t)$, $t > 0$, — сужение функции $\int_t^\infty g(t-u)\,\mu(du)$ на $(0, \infty)$. Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$z * \mu(t) = f_2(t), \quad t > 0, \tag{2.1}$$

где $f_2(t) := f(t) - f_1(t)$, $t > 0$.

Обозначим через $\widehat{f}(s)$ преобразование Лапласа функции $f(t)$:

$$\widehat{f}(s) := \int_0^\infty e^{st} f(t)\,dt, \qquad s \in \Pi(\gamma) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\zeta \leqslant \gamma\}.$$

Для произвольной комплекснозначной меры $\nu$ определим ее преобразование Лапласа как $\widehat{\nu}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{sx}\,\nu(dx)$ для тех значений $s \in \mathbb{C}$, при которых данный интеграл сходится абсолютно относительно полной вариации $|\nu|$ меры $\nu$.

Допустим, что уравнение (1.1) имеет решение. Для функции $f_2(t)$ справедливо такое же неравенство, как и для $f(t)$: $\int_0^\infty e^{\gamma t}|f_2(t)|\,dt < \infty$ (см. лемму 5.3, частный случай $\varphi(x) \equiv \exp(\gamma t)$). Положим $\widehat{z}(s) := \int_0^\infty e^{st} z(t)\,dt$, $s \in \Pi(\gamma_1)$. Переходя в уравнении (2.1) от фигурирующих в нем функций к их преобразованиям Лапласа, получаем

$$\widehat{z}(s)\widehat{\mu}(s) = \widehat{f}_2(s), \qquad \operatorname{Re} s \leqslant \gamma_1.$$

Таким образом,

$$\widehat{z}(s) = \widehat{f}_2(s)/\widehat{\mu}(s). \tag{2.2}$$

Правая часть равенства (2.2) определена в точках полуплоскости $\Pi(\gamma)$, в которых знаменатель не обращается в нуль. Назовем уравнение

$$\widehat{\mu}(s) = 0 \tag{2.3}$$

*характеристическим уравнением* для (1.1).

Корни уравнения (2.3) существенным образом влияют на асимптотику решения $z(t)$. Будем предполагать, что множество $\mathscr{Z} = \{s_1, s_2, \dots, s_l\}$ корней характеристического уравнения, лежащих в полуплоскости $\Pi(\gamma)$, *конечно.* Мы не исключаем случая $\mathscr{Z} = \varnothing$. Кратностью корня $s_j$ уравнения (2.3) называется положительное целое число $m_j$ такое, что $\widehat{\mu}(s) = (s - s_j)^{m_j} g_j(s)$, $g_j(s_j) \neq 0$. Пусть $s_j \in \mathscr{Z}$ и $\int_0^\infty t^{m_j} e^{\operatorname{Re} s_j t}|f(t)|\,dt < \infty$. Из асимптотического разложения

$$\frac{\widehat{f}_2(s)}{\widehat{\mu}(s)} = \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k \frac{b_{jk}}{(s - s_j)^k} + o\left(\frac{1}{s - s_j}\right), \qquad s \to s_j, \tag{2.4}$$

определим коэффициенты $b_{jk}$, $k = 1, \dots, m_j$. Заметим, что если $\operatorname{Re} s_j < \gamma$, то сумма $\sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k b_{jk}/(s - s_j)^k$ — главная часть разложения в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки $s = s_j \in \mathscr{Z}$ аналитической функции $\widehat{f}_2(s)/\widehat{\mu}(s)$. Пусть $\mathscr{E}_j$ — комплекснозначная мера с плотностью $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)e^{-s_j x}$ ($\mathbf{1}_A(x)$ — индикаторная функция множества $A$); преобразование Лапласа этой меры равно $\widehat{\mathscr{E}}_j(s) = 1/(s_j - s)$, $\operatorname{Re}(s - s_j) < 0$. Определим по индукции $k$-кратную свертку $\mathscr{E}_j^{k*}$ меры $\mathscr{E}_j$: $\mathscr{E}_j^{1*} := \mathscr{E}_j$, $\mathscr{E}_j^{(k+1)*} := \mathscr{E}_j^{k*} * \mathscr{E}_j$, $k \geqslant 1$. Функция $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)x^{k-1}e^{-s_j x}/(k-1)!$ равна плотности меры $\mathscr{E}_j^{k*}$. Выражение

$$\widehat{z}(s) - \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k \frac{b_{jk}}{(s - s_j)^k}$$

представляет собой преобразование Лапласа $\widehat{r}(s)$ некоторой функции $r(t)$ — остатка искомого асимптотического разложения, которое будет выглядеть следующим образом:

$$z(t) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m_j} b_{jk} \frac{t^{k-1} e^{-s_j t}}{(k-1)!} + r(t). \tag{2.5}$$

Опишем класс функций, в чьих терминах будут выражаться моментные свойства исходной функции $f(t)$ и остатка $r(t)$.

## 3. Банаховы алгебры мер

Определение 3.1. Функция $\varphi(x)$, $x \geqslant 0$, называется *полумультипликативной*, если она конечна, положительна, измерима по Борелю и удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x)\,\varphi(y)$, $x, y \geqslant 0$.

Имеют место соотношения [**11**, теорема 7.6.1]

$$\gamma := \gamma(\varphi) := \lim_{x\to\infty} \frac{\ln \varphi(x)}{x} = \inf_{x>0} \frac{\ln \varphi(x)}{x} < \infty. \tag{3.1}$$

В дальнейшем будем рассматривать только такие полумультипликативные функции $\varphi(x)$, для которых $\gamma(\varphi) > -\infty$.

Следующие примеры иллюстрируют широту понятия полумультипликативности: $\varphi(x) = (x+1)^r$, $r > 0$; $\varphi(x) = \exp(cx^\beta)$, где $c > 0$ и $0 < \beta < 1$; $\varphi(x) = \exp(\beta x)$, $\beta \in \mathbb{R}$. В первых двух случаях $\gamma(\varphi) = 0$, в то время как в последнем $\gamma(\varphi) = \beta$. Произведение конечного числа полумультипликативных функций снова является полумультипликативной функцией. Кроме того, если $R(x)$, $x \geqslant 0$, — положительная, начиная с некоторого места неубывающая, правильно меняющаяся на бесконечности функция с неотрицательным показателем $\beta$ (т.е. $R(tx)/R(x) \to t^\beta$ для $t > 0$, когда $x \to \infty$ [**9**, § VIII.8]), то найдутся полумультипликативная функция $\varphi(x)$, $x \geqslant 0$, и число $x_0 \in (0,\infty)$ такие, что $c_1 R(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant c_2 R(x)$ при всех $x \geqslant x_0$, где $c_1$ и $c_2$ — некоторые положительные постоянные [**4**, предложение].

Пусть $S(\varphi)$ — совокупность комплексных функций множества (мер) $\nu$, определенных и $\sigma$-аддитивных на всех ограниченных борелевских подмножествах $[0,\infty)$, таких, что $\|\nu\|_\varphi = \int_0^\infty \varphi(x)\,|\nu|(dx) < \infty$, где $|\nu|$ — полная вариация меры $\nu$. *Сверткой* мер $\nu$ и $\varkappa$ называется мера

$$\nu * \varkappa(A) := \iint\limits_{\{x+y\in A, x,y\geqslant 0\}} \nu(dx)\,\varkappa(dy) = \int_0^\infty \nu(A-y)\,\varkappa(dy);$$

здесь $A$ — произвольное ограниченное борелевское подмножество $[0,\infty)$ и множество $A - y$ определяется как $\{x \in \mathbb{R}\colon x + y \in A\}$. Совокупность $S(\varphi)$ — коммутативная комплексная банахова алгебра относительно нормы $\|\cdot\|_\varphi$ и свертки мер в качестве операции умножения, единицей в $S(\varphi)$ служит атомическая мера $\delta_0$ массы 1, сосредоточенная в нуле (см. [**11**, § 4.16]). Пусть $\widetilde{S}_{\varphi+}$ — совокупность всех измеримых комплекснозначных функций $f(x)$, $x \geqslant 0$, таких, что

$$\|f\|_\varphi = \int_0^\infty |f(x)|\varphi(x)\,dx < \infty.$$

Известно [**1**, § 18], что $\widetilde{S}_{\varphi+}$ — полное нормированное кольцо без единицы, под умножением двух элементов $f$ и $g$ из $\widetilde{S}_{\varphi+}$ понимается их свертка $f * g(x)$. Будем отождествлять произвольную абсолютно непрерывную меру $f$ на $[0,\infty)$ с классом эквивалентных функций $f(x)$, $x \geqslant 0$, каждая из которых может рассматриваться как производная Радона-Никодима этой меры относительно меры Лебега на $[0,\infty)$. Через $S_{\varphi+}$ обозначим банахову алгебру, полученную из

$\widetilde{S}_{\varphi+}$ присоединением единицы. В данном случае роль формальной единицы $e$ и формальных сумм $\alpha e + f_1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $f_1 \in \widetilde{S}_{\varphi+}$, играют мера $\delta_0$ и обычные суммы мер $\alpha\delta_0 + f_1$:

$$(\alpha\delta_0 + f_1)(A) = \alpha\delta_0(A) + \int_A f_1(x)\,dx,$$

где $A$ — произвольное борелевское подмножество $[0,\infty)$. Будем использовать соглашение: если $f = \alpha\delta_0 + f_1(x) \in S_{\varphi+}$, то $f(dx) := \alpha\delta_0(dx) + f_1(x)\,dx$. Вместо формального умножения элементов $S_{\varphi+}$ берется обычная свертка мер: если $f = \alpha\delta_0 + f_1(x)$ и $g = \beta\delta_0 + g_1(x)$ — элементы $S_{\varphi+}$, где $f_1(x)$, $g_1(x) \in \widetilde{S}_{\varphi+}$, то их свертка — это мера, задаваемая равенством

$$f * g := (\alpha\beta)\delta_0 + \alpha g_1(x) + \beta f_1(x) + f_1 * g_1(x).$$

Если $f = \alpha\delta_0 + f_1(x) \in S_{\varphi+}$, где $f_1(x) \in \widetilde{S}_{\varphi+}$, то полагаем $\|f\|_\varphi := |\alpha| + \|f_1\|_\varphi$. Преобразование Лапласа $\widehat{f}(s)$ элемента $f = \alpha\delta_0 + f_1(x) \in S_{\varphi+}$ равно

$$\widehat{f}(s) = \alpha + \int_0^\infty e^{sx} f_1(x)\,dx = \int_0^\infty e^{sx}\,f(dx);$$

интеграл абсолютно сходится в полуплоскости $\Pi(\gamma)$ в силу (3.1). Через $|f|$ обозначим полную вариацию меры $f$: $|f|(dx) := |\alpha|\delta_0(dx) + |f_1(x)|\,dx$.

## 4. Вспомогательные результаты

Нам понадобятся теоремы о преобразованиях Лапласа элементов введенных банаховых алгебр. Для удобства ссылок приведем две теоремы, доказанные в [**6**].

Теорема 4.1. *Пусть $\varphi(x)$, $x \geqslant 0$, — полумультипликативная функция такая, что функция $\varphi(x)/e^{\gamma x}$, $x \geqslant 0$, не убывает. Допустим, что $f \in S_{\varphi+}$ и $\widehat{f}(s_0) = 0$, $\operatorname{Re} s_0 < \gamma$. Положим $h(s) := \widehat{f}(s)/(s - s_0)$, $s \in \Pi(\gamma)$, определяя $h(s)$ в точке $s_0$ по непрерывности: $h(s_0) := \int_0^\infty x \exp(s_0 x)\,f(dx)$. Тогда функция $h(s)$, $s \in \Pi(\gamma)$, — преобразование Лапласа $\widehat{g}(s)$ некоторой функции $g \in \widetilde{S}_{\varphi+}$, причем $\varphi(x)g(x) \to 0$ при $x \to \infty$.*

Если же корень уравнения $\widehat{f}(s) = 0$ лежит на границе полуплоскости $\Pi(\gamma)$, то справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть $\varphi(x)$, $x \geqslant 0$, — полумультипликативная функция такая, что функция $\varphi(x)/e^{\gamma x}$, $x \geqslant 0$, не убывает. Образуем новую полумультипликативную функцию $\psi(x) := (1 + x)\varphi(x)$, $x \geqslant 0$. Пусть $f \in S_{\psi+}$ и $\widehat{f}(s_0) = 0$ при $\operatorname{Re} s_0 = \gamma$. Положим $h(s) := \widehat{f}(s)/(s - s_0)$, $s \in \Pi(\gamma)$, определяя $h(s)$ в точке $s_0$ по непрерывности. Тогда функция $h(s)$, $s \in \Pi(\gamma)$, — преобразование Лапласа $\widehat{g}(s)$ некоторой функции $g \in \widetilde{S}_{\varphi+}$, причем $\varphi(x)g(x) \to 0$ при $x \to \infty$.*

Замечание 4.1. Предположим, что выполнены условия теоремы 4.1 за исключением, быть может, равенства $\widehat{f}(s_0) = 0$. Обозначим

$$T(s_0)f(x) := \int_x^\infty e^{-s_0(x-y)}\, f(dy), \qquad x \geqslant 0.$$

Тогда $T(s_0)f(x) = T(s_0)f_0(x)$, $x \geqslant 0$, где элемент $f_0 := f - \widehat{f}(s_0)\delta_0 \in S_{\varphi+}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1, и мы получаем в общем случае, что

$$T(s_0)f \in \widetilde{S}_{\varphi+}, \quad \{T(s_0)f\}^\wedge(s) = \frac{\widehat{f}(s) - \widehat{f}(s_0)}{s - s_0}, \qquad s \in \Pi(\gamma).$$

Аналогичное замечание имеет место применительно к теореме 4.2.

Нам потребуется теорема об обратимости элементов банаховых алгебр мер (см. [**8**, теорема 1 и замечание]).

Теорема 4.3. *Пусть $\nu = \nu_{\mathfrak{c}} + \nu_{\mathfrak{d}} + \nu_{\mathfrak{s}}$ — разложение элемента $\nu \in S(\varphi)$ на абсолютно непрерывную, дискретную и сингулярную компоненты. Элемент $\nu \in S(\varphi)$ имеет обратный, если $\widehat{\nu}(s) \neq 0$ для всех $s \in \Pi(\gamma)$ и если*

$$\inf_{s\in\Pi(\gamma)} \bigl|\widehat{\nu}_{\mathfrak{d}}(s)\bigr| > \int_0^\infty e^{\gamma x}\, |\nu_{\mathfrak{s}}|(dx). \tag{4.1}$$

## 5. Основной результат

Нам понадобятся следующие леммы, доказательства которых будут проведены в § 6.

Лемма 5.1. *Предположим, что выполнено условие*

$$\alpha := \inf_{s\in\Pi(\gamma)} \bigl|\widehat{\mu}_{\mathfrak{d}}(s)\bigr| - \int_0^\infty e^{\gamma x}\, |\mu_{\mathfrak{s}}|(dx) > 0. \tag{$\mathfrak{D}$}$$

*Тогда множество корней характеристического уравнения* (2.3)*, лежащих в полуплоскости* $\Pi(\gamma)$*, конечно.*

Лемма 5.2. *Пусть $\varphi(t)$, $t \geqslant 0$, — полумультипликативная функция такая, что функция $\varphi(t)/\exp(\gamma t)$, $t \geqslant 0$, не убывает. Предположим, что $\nu \in S(\varphi)$ и $\widehat{\nu}(s_0) = 0$, где $\operatorname{Re} s_0 < \gamma$. Тогда $\widehat{\nu}(s)/(s - s_0)$, $s \in \Pi(\gamma)$, — преобразование Лапласа некоторой меры $T(s_0)\nu \in S(\varphi)$.*

Лемма 5.3. *Пусть $\varphi(t)$, $t \geqslant 0$, — полумультипликативная функция такая, что функция $\varphi(t)/\exp(\gamma t)$, $t \geqslant 0$, не убывает. Если $f \in \widetilde{S}_{\varphi+}$, то $f_2 \in \widetilde{S}_{\varphi+}$.*

Рассмотрим уравнение (1.1) с начальным условием (1.2) и соответствующее характеристическое уравнение (2.3).

Теорема 5.1. *Предположим, что $\varphi(t)$, $t \geqslant 0$, — полумультипликативная функция такая, что $\varphi(t)/\exp(\gamma t)$, $t \geqslant 0$, — неубывающая функция, и выполнено условие $(\mathfrak{D})$. Пусть $\mathscr{X} = \{s_1, \dots, s_l\}$ — множество всех корней характеристического уравнения* (2.3)*, лежащих в полуплоскости $\Pi(\gamma)$. Обозначим через $m_1, \dots, m_l$ кратности корней $s_1, \dots, s_l$ соответственно. Положим $N$*

*равным максимальной кратности корней этого уравнения, лежащих на прямой* $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s = r_+(\varphi)\}$ *($N = 0$ означает, что таких корней на указанной прямой не имеется). Предположим, что*

$$\int_0^\infty (1+t)^N \varphi(t)|f(t)|\,dt < \infty. \tag{5.1}$$

*Тогда для решения $z(t)$ уравнения* (1.1) *с начальным условием* (1.2) *справедливо разложение* (2.5), *в котором остаток $r(t)$ удовлетворяет соотношению*

$$\int_0^\infty \varphi(t)|r(t)|\,dt < \infty.$$

Доказательство. Условие ($\mathfrak{D}$) справедливо при замене $\gamma$ на $\gamma_2 \in (\gamma, \xi)$, достаточно близкое к $\gamma$, в силу непрерывности преобразования Лапласа. Действительно, выберем $\gamma_2 > \gamma$ так, чтобы

$$\int_0^\infty e^{\gamma_2 x}\,|\mu_{\mathfrak{s}}|(dx) - \int_0^\infty e^{\gamma x}\,|\mu_{\mathfrak{s}}|(dx) < \frac{\alpha}{8}.$$

Положим для краткости $\nu = \mu_{\mathfrak{d}}$, $\delta = \gamma_2 - \gamma$. Возьмем достаточно большое $A > 0$ такое, что $\int_A^\infty e^{\gamma_2 x}\,|\nu|(dx) < \alpha/8$. Пусть $s \in \Pi(\gamma_2)$. Тогда $s - \delta \in \Pi(\gamma)$. Имеем

$$\begin{aligned}\left|\left|\int_0^A e^{sx}\,\nu(dx)\right| - \left|\int_0^A e^{(s-\delta)x}\,\nu(dx)\right|\right| &\leqslant \left|\int_0^A [e^{sx} - e^{(s-\delta)x}]\,\nu(dx)\right| \\ &\leqslant \int_0^A |e^{sx} - e^{(s-\delta)x}|\,|\nu|(dx) \leqslant \int_0^A e^{\operatorname{Re}(s-\delta)x}|e^{\delta x} - 1|\,|\nu|(dx) \\ &\leqslant e^{|\gamma|A}|e^{\delta A} - 1||\nu|([0,A]) < \frac{\alpha}{8}\end{aligned}$$

при достаточно малом $\delta > 0$, откуда вытекает

$$\left|\int_0^A e^{sx}\,\nu(dx)\right| > \left|\int_0^A e^{(s-\delta)x}\,\nu(dx)\right| - \frac{\alpha}{8}.$$

Далее

$$\begin{aligned}|\widehat{\nu}(s)| &= \left|\Big(\int_0^A + \int_A^\infty\Big) e^{sx}\,\nu(dx)\right| \\ &> \left|\int_0^A e^{sx}\,\nu(dx)\right| - \frac{\alpha}{8} > \left|\int_0^A e^{(s-\delta)x}\,\nu(dx)\right| - \frac{\alpha}{4} \\ &\geqslant |\widehat{\nu}(s-\delta)| - \left|\int_A^\infty e^{sx}\,\nu(dx)\right| - \frac{\alpha}{4} > |\widehat{\nu}(s-\delta)| - \frac{3\alpha}{8}.\end{aligned}$$

Беря инфимум по $s \in \Pi(\gamma_2)$ сначала в правой части этого неравенства, а затем в левой, получаем $\inf_{s\in\Pi(\gamma_2)} |\widehat{\nu}(s)| \geqslant \inf_{s\in\Pi(\gamma)} |\widehat{\nu}(s)| - 3\alpha/8$. Окончательно имеем

$$\inf_{s\in\Pi(\gamma_2)} |\widehat{\nu}(s)| - \int_0^\infty e^{\gamma_2 x}\, |\mu_{\mathfrak{s}}|(dx) = \inf_{s\in\Pi(\gamma_2)} |\widehat{\nu}(s)| - \inf_{s\in\Pi(\gamma)} |\widehat{\nu}(s)| + \inf_{s\in\Pi(\gamma)} |\widehat{\nu}(s)| - \int_0^\infty e^{\gamma x}\, |\mu_{\mathfrak{s}}|(dx) + \int_0^\infty e^{\gamma x}\, |\mu_{\mathfrak{s}}|(dx) - \int_0^\infty e^{\gamma_2 x}\, |\mu_{\mathfrak{s}}|(dx) > -\frac{3\alpha}{8} + \alpha - \frac{\alpha}{8} = \frac{\alpha}{2} > 0,$$

что и требовалось установить.

По лемме 5.1 множество $\mathscr{Z}_2 \supseteq \mathscr{Z}$ корней характеристического уравнения (2.3), лежащих в полуплоскости $\Pi(\gamma_2)$, конечно. Уменьшая $\gamma_2$, можно добиться того, что $\mathscr{Z}_2 = \mathscr{Z}$ при $\gamma_2 > \gamma$. Выберем $\sigma > \gamma_2$. Положим $p := \sum_{j=1}^l m_j$ и

$$v(s) := \frac{\widehat{\mu}(s)(s-\sigma)^p}{\prod_{j=1}^l (s-s_j)^{m_j}}, \qquad s \in \Pi(\gamma_2),$$

доопределив значения функции $v(s)$ в точках $s_1, \dots, s_l$ по непрерывности. Положим $\psi(x) := \exp(\gamma_2 x)$, $x \geqslant 0$. Покажем, что функция $v(s)$, $s \in \Pi(\gamma_2)$, — преобразование Лапласа $\widehat{V}(s)$ некоторой меры $V \in S(\psi)$. Разлагая рациональную функцию на простые дроби, получаем

$$v(s) = \widehat{\mu}(s)\left\{1 + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{jk}}{(s-s_j)^k}\right\},$$

где $c_{jk}$ — константы. Очевидно $\mu \in S(\psi)$. Согласно лемме 5.2 выражение $\widehat{\mu}(s)/(s-s_j)^k$ является преобразованием Лапласа абсолютно непрерывной меры $T(s_j)^k\mu$, принадлежащей банаховой алгебре $S(\psi)$. Подытоживая, видим, что $v(s) = \widehat{V}(s)$, где $V \in S(\psi)$. Меру $V$ можно представить в виде $V = \mu + V_1$, где мера $V_1$ абсолютно непрерывна. Теперь покажем, что элемент $V$ обратим в $S(\psi)$, т. е. найдется элемент $V^{-1} \in S(\psi)$ такой, что $V * V^{-1} = \delta_0$. Так как мера $V_1$ абсолютно непрерывна, имеем $V_{\mathfrak{d}} = \mu_{\mathfrak{d}}$ и $V_{\mathfrak{s}} = \mu_{\mathfrak{s}}$. Поэтому обратимость $V$ вытекает из условия $(\mathfrak{O})$ и теоремы 4.3. Положим $w(s) := \widehat{f_2}(s)/v(s)$. Применяя лемму 5.3 с полумультипликативной функцией $(1+t)^N\varphi(t)$, видим, что функция $f_2(t)$ удовлетворяет условию (5.1). Образуем систему полумультипликативных функций $\varphi_k(t) := (1+t)^k\varphi(t)$, $t \geqslant 0$, $k = 0, \dots, N$. Очевидно $\gamma(\varphi_k) = \gamma(\varphi)$ при всех $k$. Ясно, что $w(s)$, $s \in \Pi(\gamma)$, — преобразование Лапласа $\widehat{W}(s)$ абсолютно непрерывной меры $W \in S(\varphi_N)$ с плотностью $f_2 * V^{-1}(x) = \int_0^x f_2(x-y)\, V^{-1}(dy)$, $x \geqslant 0$, так как $V^{-1} \in S(\psi) \subset S(\varphi_N)$. Преобразование Лапласа $\widehat{z}(s)$ искомого решения уравнения (1.1) с указанными начальными значениями можно представить в виде

$$\widehat{z}(s) = \frac{\widehat{f_2}(s)}{\widehat{\mu}(s)} = \frac{\widehat{f_2}(s)(s-\sigma)^p}{v(s)\prod_{j=1}^l (s-s_j)^{m_j}} = w(s)\frac{(s-\sigma)^p}{\prod_{j=1}^l (s-s_j)^{m_j}}.$$

Разлагая рациональную функцию на простые дроби, получаем

$$\widehat{z}(s) = w(s)\left\{1 + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{c_{jk}}{(s-s_j)^k}\right\}.$$

Осуществим следующие преобразования:

$$\frac{w(s)}{(s-s_j)^k} = \frac{w(s_j)}{(s-s_j)^k} + \frac{w(s)-w(s_j)}{(s-s_j)^k} = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{w_{i,j}(s_j)}{(s-s_j)^{k-i}} + w_{k,j}(s),$$

где $w_{0,j}(s) := w(s)$, $w_{p,j}(s) := \{w_{p-1,j}(s) - w_{p-1,j}(s_j)\}/(s-s_j)$, $p = 1,\dots,k$. Если $\operatorname{Re} s_j < \gamma$, то по теореме 4.1 $w_{p,j}(s)$ является преобразованием Лапласа меры $T^p(s_j)W \in S(\varphi_N)$. Если же $\operatorname{Re} s_j = \gamma$, то по теореме 4.2 $w_{p,j}(s)$ является преобразованием Лапласа меры $T^p(s_j)W \in S(\varphi_{N-p})$. В обоих случаях $T^p(s_j)W \in S(\varphi)$. В итоге в силу единственности разложения (2.4) получаем

$$\widehat{z}(s) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j}(-1)^k\frac{b_{jk}}{(s-s_j)^k} + w(s) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j}c_{jk}w_{k,j}(s). \tag{5.2}$$

Ясно, что функция

$$\widehat{r}(s) := w(s) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j}c_{jk}w_{k,j}(s), \qquad s \in \Pi(\gamma),$$

— преобразование Лапласа некоторой меры в $S(\varphi)$, которая абсолютно непрерывна, так как в предшествующих рассуждениях мера $W$ абсолютно непрерывна, а применение операторов $T(s_j)^k$ к мерам дает абсолютно непрерывные меры. Теперь, чтобы получить искомое асимптотическое разложение (2.5), нам осталось перейти в равенстве (5.2) от преобразований Лапласа к их прообразам. Теорема 5.1 доказана. □

Замечание 5.1. Приведем условие, более наглядное, чем $(\mathfrak{O})$:

$$\int_{0+}^{\infty} e^{\gamma x}\,|\mu_{\mathfrak{d}}|\,(dx) + \int_{0}^{\infty} e^{\gamma x}\,|\mu_{\mathfrak{s}}|\,(dx) < |\mu(\{0\})|\,. \tag{$\mathfrak{S}$}$$

Если $\mu(\{0\}) \neq 0$ и сужение $\mu$ на $(0,\infty)$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега, то выполняется условие $(\mathfrak{S})$. Из условия $(\mathfrak{S})$ вытекает условие $(\mathfrak{O})$, т.е. условие $(\mathfrak{O})$ является более общим, чем условие $(\mathfrak{S})$. Действительно,

$$\begin{aligned} |\widehat{\mu}_{\mathfrak{d}}(s)| &= \left|\mu(\{0\}) + \int_{0+}^{\infty} e^{sx}\,\mu_{\mathfrak{d}}(dx)\right| \\ &\geqslant |\mu(\{0\})| - \left|\int_{0+}^{\infty} e^{sx}\,\mu_{\mathfrak{d}}(dx)\right| \geqslant |\mu(\{0\}) - \int_{0+}^{\infty} e^{\gamma x}\,|\mu_{\mathfrak{d}}|(dx). \end{aligned}$$

Замечание 5.2. В работе **[7]** рассматривалось дифференциально-разностное уравнение

$$\sum_{j=0}^{m}\int_{0}^{h} z^{(j)}(t-u)\,\mu_j(du) = f(t), \qquad t > 0, \tag{5.3}$$

с начальным условием $z(t)=g(t)$, $t\in[-h,0]$. В отличие от настоящей статьи, где дана интегральная оценка остатка в разложении (2.5), работа [**7**] посвящена исследованию другого типа асимптотического поведения. Было установлено асимптотическое разложение для решения уравнения (5.3):

$$z(t)=\sum_{j=1}^{l}Q_j(t)e^{-s_jt}+r(t),$$

где $s_j$ — корни соответствующего характеристического уравнения с кратностями $m_j$, $Q_j(t)$ — однозначно определяемые полиномы степеней меньших, чем кратности соответствующих корней $s_j$, а остаток $r(t)$ «наследует» асимптотические свойства исходной функции $f(t)$ в следующем смысле. Если для некоторой подходящей функции сравнения $\sigma(t)$ существует предел $\mathscr{L}(f):=\lim_{t\to\infty}f(t)/\sigma(t)$, то будет существовать и предел $\lim_{t\to\infty}r(t)/\sigma(t)$, который может быть выражен в явном виде через величину $\mathscr{L}(f)$.

## 6. Доказательства лемм

Доказательство леммы 5.1. Рассуждая от противного, допустим, что существует бесконечная последовательность различных точек $s_n\in\Pi(\gamma)$ такая, что $L(s_n)=0$. Последовательность $\{s_n\}$ стремится к $\infty$, поскольку иначе аналитическая во внутренности полуплоскости $\Pi(\xi)\supset\Pi(\gamma)$ функция $\widehat{\mu}(s)$ равнялась бы тождественно нулю по теореме единственности [**2**, гл. 3, § 6, п. 1]. Имеем

$$\widehat{\mu}(s)=\int_0^\infty e^{st}\,\mu_{\mathfrak{c}}(dt)+\int_0^\infty e^{st}\,\mu_{\mathfrak{d}}(dt)+\int_0^\infty e^{st}\,\mu_{\mathfrak{s}}(dt)$$
$$=:I_1(s)+I_2(s)+I_3(s).$$

Согласно лемме Римана–Лебега найдется число $B>0$ такое, что $|I_1(s)|<\alpha/2$ при $|s|>B$, $s\in\Pi(\gamma)$. Тогда при тех же $s$ имеем

$$|\widehat{\mu}(s)|\geqslant|I_2(s)|-|I_1(s)|-|I_3(s)|>\alpha/2>0.$$

Но $|s_n|>B$ и $\widehat{\mu}(s_n)=0$ при достаточно больших $n$. Полученное противоречие доказывает лемму 5.1. □

Доказательство леммы 5.2. Продолжим функцию $\varphi(x)$ с сохранением полумультипликативности на всю прямую $\mathbb{R}$ равенством $\varphi(x):=e^{\gamma_1x}$, $x<0$, где $\gamma_1<\operatorname{Re}s_0$. Продолжим меру $\nu$ на борелевские подмножества $A\subseteq(-\infty,0)$, полагая $\nu(A):=0$. Тогда по теореме 2 [**5**] $\widehat{\nu}(s)/(s-s_0)$, $\gamma_1\leqslant\operatorname{Re}s\leqslant\gamma$, — преобразование Лапласа меры с плотностью

$$k(x)=\int_x^\infty\exp(-s_0(x-y))\,\nu(dy),\qquad x\in\mathbb{R},$$

такой, что $\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)|k(x)|\,dx<\infty$. Так как $k(x)=\exp(-s_0x)\widehat{\nu}(s_0)=0$, $x<0$, видим, что эта мера, которую также обозначим через $T(s_0)\nu$, принадлежит банаховой алгебре $S(\varphi)$ мер, сосредоточенных на $[0,\infty)$. Лемма 5.2 доказана. □

Доказательство леммы 5.3. Достаточно показать, что $f_1 \in \widetilde{S}_{\varphi+}$. Продолжим функцию $\varphi(x)$ с сохранением полумультипликативности на всю прямую $\mathbb{R}$ равенством $\varphi(x) := e^{\gamma x}$, $x < 0$. Имеем

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi(x)|f_1(x)|\,dx &= \int_0^\infty \varphi(x)\left|\int_x^\infty g(x-u)\,\mu(du)\right|dx\\ &\leqslant \int_0^\infty\int_x^\infty \varphi(x-u)|g(x-u)|\varphi(u)\,|\mu|(du)\,dx\\ &= \int_0^\infty\left(\int_{-u}^0 \varphi(v)|g(v)|\,dv\right)\varphi(u)\,|\mu|(du)\\ &\leqslant \int_{-\infty}^0 e^{\gamma v}|g(v)|\,dv\int_0^\infty \varphi(u)\,|\mu|(du) < \infty,\end{aligned}$$

так как в произведении интегралов первый интеграл конечен по предположению, а конечность второго вытекает из предположения относительно меры $\mu$, соотношений (3.1) и того факта, что полумультипликативные функции, продолжаемые на всю вещественную прямую $\mathbb{R}$, ограничены на ограниченных интервалах (см. [**11**, теорема 7.4.1]). Лемма 5.3 доказана. □

## Список литературы


1. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, *Коммутативные нормированные кольца*, Физматгиз, Москва, 1960.
2. А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций, 1*, Наука, Москва, 1967.
3. Б. А. Рогозин, М. С. Сгибнев, *Банаховы алгебры мер на прямой*, Сиб. мат. журн. **21**:2 (1980), 160–169.
4. M. S. Sgibnev, *Submultiplicative moments of the supremum of a random walk with negative drift*, Statist. Probab. Lett. **32** (1997), 337–383.
5. ———, *An asymptotic expansion for the distribution of the supremum of a random walk*, Studia Math. **140** (2000), 41–55.
6. М. С. Сгибнев, *Асимптотика решений интегро-дифференциального и интегрального уравнений*, Дифференц. уравнения **42**:9 (2006), 1222–1232.
7. ———, *Поведение на бесконечности решения дифференциально-разностного уравнения*, Сиб. мат. журн. **53**:6 (2012), 1413–1432.
8. ———, *Об условиях обратимости элементов банаховых алгебр мер*, Матем. заметки **93**:5 (2013), 770–772.
9. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и её приложения, 2*, Мир, Москва, 1967.
10. Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, Москва, 1984.
11. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, Москва, 1962.


Институт математики им. С. Л. Соболева
Новосибирск
Россия
sgibnev@math.nsc.ru

(Received 29 11 2012)
(Revised 19 02 2014)