PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 52 Fasc. 3 – 1995

UN IDÉAL PRIMITIF DE $\mathcal{U}(\mathcal{G}[X])$ SE CONTRACTE EN UN IDÉAL PRIMITIF DE $\mathcal{U}(\mathcal{G})$

Youssef El From

Abstract: Let k be a field of characteristic zero and $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ be the enveloping algebra over k of a finite- dimensional Lie algebra $\mathcal{G}$. Given a primitive ideal P of $\mathcal{U}(\mathcal{G})[X]$, we show that $P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})$ is also primitive.

1 – Introduction

Soit R un anneau unitaire et P un idéal bilatère de R. P est dit *premier* si $P \neq R$ et si lorsque P contient le produit IJ de deux idéaux bilatères I et J de R, P contient l'un de ces deux idéaux. De même P est un idéal *primitif* (*à gauche*) de R si $P = \mathrm{ann}_R(M)$ où M est R-module (à gauche) simples. On définit d'une manière similaire un idéal *primitif à droite*. Il existe des idéaux primitifs à gauche mais non à droite (voir [1]). Tous les résultats prouvés pour les idéaux primitifs à gauche restent vrais pour les idéaux primitifs à droite. Dans toute la suite, idéal primitif signifie idéal primitif à gauche. Remarquons qu'un idéal maximal est primitif (à droite et à gauche) et que tout idéal primitif est premier. Un anneau R est *un anneau de Jacobson* si tout idéal premier est intersection des idéaux premiers qui le contiennent.

Si R est commutatif, tout idéal primitif est maximal et on a le théorème suivant qui caractérise les anneaux de Jacobson dans le cas commutatif ([3]):

Théorème 1.1. *Un anneau commutatif R est un anneau de Jacobson si et seulement si tout idéal maximal de $R[X]$ se contracte en un idéal maximal de R.*

Si A n'est pas commutatif, le Théorème 1.1 n'est plus vrai. Par contre si tout idéal premier de A est complètement premier (rappelons qu'un idéal bilatère

Received: October 21, 1994; *Revised*: December 9, 1994.

$P \neq R$ est *complètement premier* si lorsque P contient le produit ab de deux éléments de R, alors $a \in P$ ou $b \in P$), on a le théorème suivant:

Théorème 1.2. *Soit A un anneau dans lequel tout idéal premier est complètement premier. On suppose que tout idéal primitif de $A[X]$ se contracte en un idéal primitif de A. Alors A est un anneau de Jacobson.*

Preuve: Soit Q un idéal premier de A et a un élément de A n'appartenant pas à Q. On va montrer qu'il existe un idéal primitif I de A tel que $Q \subseteq I$ et $a \notin I$. On en déduira alors que Q est égal à l'intersection des idéaux primitifs qui le contiennent, et donc que A est un anneau de Jacobson. Considérons l'idéal à gauche $Q[X] + A[X]\,(aX-1)$ de $A[X]$ et montrons qu'il est distinct de $A[X]$. Si on avait l'égalité $Q[X] + A[X]\,(aX-1) = A[x]$, on pourrait écrire $1 = f(X) \cdot (aX-1) + g(X)$ où $f(X) \in A[X]$ et $g(X) \in Q[X]$. On peut supposer que le polynôme $f(X)$ est non nul et que aucun de ses coefficients n'appartiennent à Q. Soit c le coefficient dominant de $f(X)$, alors $ca \in Q$ et $a \notin Q$. Comme Q est complètement premier, on a $c \in Q$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur $f(X)$.

$Q[X] + A[X]\,(aX-1)$ étant distinct de $A[X]$, il est contenu dans un idéal à gauche maximal J de $A[X]$. L'élément $a \notin J$ car sinon $aX-1 \in J$ et $a \in J$ entraînerait $1 \in J$. Soit $P = A[X].J = \{r \in A[X] \mid rs \in J, \forall\, s \in A[X]\}$, puisque J est maximal, P est un idéal primitif de $A[X]$ tel que $P \subseteq J$. De plus $Q \subseteq P$, donc $Q \subseteq P \cap A$ et $a \notin P \cap A$. Posons $I = P \cap A$, par hypothèse I est un idéal primitif de A tel que $Q \subseteq I$ et $a \notin I$; ce qu'il fallait démontrer. ∎

2 – Cas d'une algèbre de Lie

Rappelons le résultat suivant (voir [5] et [4]):

Proposition 2.1. *Soit k un corps de caractéristique 0, $\mathcal{G}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie sur k. Soit P un idéal premier de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(**1**) *P un idéal primitif.*

(**2**) *Le centre de l'anneau total des fractions de $\mathcal{U}(\mathcal{G})/P$ est une extension de degré fini de k.*

(**3**) *Le centre de l'anneau total des fractions de $\mathcal{U}(\mathcal{G})/P$ est une extension algébrique de k.*

(**4**) *$\{P\}$ est localement fermé, pour la topologie de Zarisky, dans $\mathrm{Spec}\,\mathcal{U}(\mathcal{G})$.*

Remarque 2.1. Cette proposition a été démontré par C. Moeglin (voir [6]) dans le cas où k est un corps algébriquement clos non dénombrable. L'implication (1)⇒(2) est démontré en [2] 4.1.7, sans aucune condition sur e corps de base k. L'implication (3)⇒(4) est démontré par M.P. Malliavin dans [5] en utilisant les ultra-produits. Une autre démonstration de ce résultat a été donné ar R. Irving et L. Small (voir [4]).

Comme conséquence de la proposition ci-dessus, un idéal premier de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ est primitif à gauche si et seulement s'il est primitif à droite (k un corps de caractéristique nulle).

Le théorème qu'on démontre dans cette section montre que $P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})$ est un idéal primitif de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ sous la seule hypothèse que P est un idéal primitif de $\mathcal{U}(\mathcal{G})[X]$, $\mathcal{G}$ étant une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps k de caractéristique nulle.

Tout d'abord, montrons un lemme.

Lemme 2.1. *Soit R un anneau noethérien premier et soit S une partie multiplicative de R ne contenant pas 0. On suppose que S satisfait la condition de Ore:*

$$\forall\, s \in S,\ \ \forall\, r \in R\,, \quad \exists\, s' \in S,\ \ \exists\, r' \in R, \quad \textit{tel que}\ \ s'r = r's\ .$$

Alors tout élément de S est un non diviseur de 0.

Preuve: En effet, posons $I = \{r \in R \mid \exists\, s \in S:\ sr = 0\}$. Montrons que I est un idéal bilatère de R. Soient $r \in I$, $x \in R$, il existe $s \in S$ tel que $sr = 0$ et $s' \in S$, $r' \in R$, tels que $s'x = r's$. D'où $s'xr = r'sr = 0$ et donc $xr \in I$.

Montrons que I est additif. Soient $r, r' \in I$ et soit $s \in S$ tel que $sr = 0$; comme $sr' \in I$, il existe $s' \in S$ tel que $s'sr' = 0$, d'où $s's(r + r') = 0$ et donc $r + r' \in I$. Il est clair que I est un R-module à droite.

Si I n'est pas nul, I contient, d'après [2], 3.6.12, un non diviseur de 0 dans R; ce qui est impossible par définition de I. ∎

On utilisera aussi le lemme suivant (voir [2], 36.8):

Lemme 2.2. *Soient A un anneau et S une partie de A permettant un calcul des fractions. Alors si $a \in A$, $s \in S$; on a $as^{-1} \in Z(A_S)$ si et seulement si $axs = sxa$ pour tout $x \in A$ (A_S désigne l'anneau des fractions de A défini par S).*

Théorème 2.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle, $\mathcal{G}$ une k-algèbre de*

Lie de dimension finie sur k. Soit P est un idéal primitif de $\mathcal{U}(\mathcal{G})[X]$.

Alors $P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})$ est un idéal primitif de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

Preuve: On identifie $\mathcal{U}(\mathcal{G})[X]$ à $\mathcal{U}(\mathcal{G} \oplus kX)$ où $[g, X] = 0$ si $g \in \mathcal{G}$. D'après [2] 3.3.4, $P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})$ est un idéal premier de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. Montrons que le centre de l'anneau total des fractions de $\mathcal{U}(\mathcal{G})/P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})$ est une extension de degré fini de k.

Soit S l'ensemble des non diviseurs de 0 dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})/P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})$. S vérifie la condition de Ore dans l'anneau noethérien premier $\mathcal{U}(\mathcal{G})[X]/P$; donc, d'après le Lemme 2.1, S est formé de non diviseurs de 0 dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})[X]/P$. Si on note i l'injection canonique de $\mathcal{U}(\mathcal{G})/P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})$ dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})[X]/P$, i transforme donc un non diviseur de 0 dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})/P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})$ en un non diviseur de 0 dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})[X]/P$; de telle sorte que i se prolonge en une injection $\widetilde{i}$ de $\mathrm{Fr}(\mathcal{U}(\mathcal{G})/P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G}))$ dans $\mathrm{Fr}(\mathcal{U}(\mathcal{G})[X]/P)$. $\widetilde{i}$ est défini par

$$\widetilde{i}\Big([r + P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})]\,[s + P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})]^{-1}\Big) = [r + P]\,[s + P]^{-1} ,$$

où $[x + I]$ désigne la classe de x modulo I.

Soit $[r + P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})]\,[s + P \cap \mathcal{U}(G)]^{-1} \in Z(\mathrm{Fr}(\mathcal{U}(\mathcal{G})/P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})))$ et soit a un élément quelconque de $\mathcal{U}(\mathcal{G})[X]$; a s'écrit sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i\, X^i \qquad \text{avec} \quad a_i \in \mathcal{U}(\mathcal{G}) .$$

On a

$$[r + P]\,[a + P]\,[s + P] = \Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} r\, a_i\, X^i\Big)\, s + P\Big] = \Big[\sum_{i=1}^{n} r\, a_i\, s\, X^i + P\Big] ,$$

puisque X commute avec tous les éléments de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

De même

$$[s + P]\,[a + P]\,[r + P] = \Big[\sum_{i=1}^{n} s\, a_i\, r\, X^i + P\Big] .$$

Or

$$\begin{aligned}&[r + P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})]\,[x + P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})]\,[s + P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})] = \\ &\qquad = [s + P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})]\,[x + P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})]\,[r + P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G})] ,\end{aligned}$$

donc

$$\Big[\sum_{i=1}^{n} r\, a_i\, s\, X^i + P\Big] = \Big[\sum_{i=1}^{n} s\, a_i\, r\, X^i + P\Big] .$$

Il s'en suit que

$$[r+P]\,[x+P]\,[s+P] = [s+P]\,[x+P]\,[r+P] \quad \text{et ceci pour tout} \quad x \in \mathcal{U}(\mathcal{G}) \ .$$

D'après le Lemme 2.2, $[r+P]\,[s+P]^{-1} \in Z(\mathrm{Fr}(\mathcal{U}(\mathcal{G})[X]/P))$, le centre de l'anneau total de fractions de $(\mathcal{U}(\mathcal{G})[X])/P$ et donc

$$\widetilde{i}\Big(Z(\mathrm{Fr}(\mathcal{U}(\mathcal{G})/P)\cap\mathcal{U}(\mathcal{G}))\Big) \subseteq Z\Big(\mathrm{Fr}(\mathcal{U}(\mathcal{G})[X]/P)\Big) \ .$$

Par suite $\dim_k Z(\mathrm{Fr}(\mathcal{U}(\mathcal{G})/P \cap \mathcal{U}(\mathcal{G}))) \leq \dim_k Z(\mathrm{Fr}(\mathcal{U}(\mathcal{G})[X]/P))$. Or P est un idéal primitif de $\mathcal{U}(\mathcal{G})[X]$. On conclue alors par la Proposition 2.1. ∎

RÉFÉRENCES

[1] Bergman, G. – A ring primitif on the right but not on the left, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 15 (1964), 473–475.

[2] Dixmier, J. – *Algèbres enveloppantes*, Gauthiers-Villars, 1974.

[3] Goldman – Hilbert ring and Nullstellensatz, *Math. Zeit.,* (1951–54), p. 139.

[4] Irving, L. and Small, L. – On the characterization of primitive ideals in enveloping algebras, *Math. Zeit.,* 173 (1980), 217–221.

[5] Malliavin, M.P. – *Ultra-produit d'Algèbres de Lie*, Séminaire d'Algèbres P. Dubreil et M.P. Malliavin, Lect. Notes in Math., Vol. 924, 1981.

[6] Moeglin, C. – Idéaux primitifs des algèbres enveloppantes, *J. Math. Pures et Appl.,* 59 (1980), 265–336.

Youssef El From,
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Semlalia,
Université Cadi Ayyad, Marrakech – MAROC