PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 56 Fasc. 4 – 1999

SUR CERTAINS SYSTEMES D'EQUATIONS AVEC CONTRAINTES DANS UN GROUPE LIBRE (*)

J. Almeida and M. Delgado

Résumé: Le théorème principal trouvé par Ash pour sa preuve de la conjecture du type II est reformulé en termes de la résolubilité dans le groupe libre F de systèmes d'équations de la forme $x\,y = z$ (où y n'apparaît qu'une fois) avec contraintes dans des sous-ensembles de la forme $g\,H_1 \cdots H_n$ où $g \in F$ et les H_i sont des sous-groupes de F. Plus précisément, si un tel système n'a pas de solution pour des sous-groupes finiment engendrés H_i, alors on peut remplacer chaque H_i par un sous-groupe d'indice fini qui le contient de façon que le système n'ait toujours pas de solution.

Abstract: The main theorem found by Ash in his proof of the type II conjecture is reformulated in terms of the solvability in the free group F of systems of equations of the form $x\,y = z$ (where y appears only once) with constraints given by subsets of the form $g\,H_1 \cdots H_n$ where $g \in F$ and the H_i are subgroups of F. More precisely, if such a system has no solution for finitely generated subgroups H_i, then one may replace each H_i by a subgroup of finite index containing it so that the system remains without solution.

Soit A un ensemble fini et soit F le groupe librement engendré par A. On considère sur F la *topologie profinie*, c'est à dire celle dont une base de voisinages de l'élément neutre est donnée par les sous-groupes (normaux) d'indice fini. Comme moyen d'établir une conjecture de Rhodes concernant les monoïdes finis, connue sous le nom de "conjecture du type II" (voir [9]), Pin et Reutenauer

---

Received: November 11, 1997; *Revised*: March 4, 1998.
1991 AMS Mathematics Subject Classification: 20M07, 20E18, 20E10.
Keywords: Free group, Equation, Profinite topology, Relational morphism, Labeled graph, Free monoid, Finite monoid, Pseudovariety.
(*) Ce travail a été partiellement financé par FCT et par le projet Praxis/2/2.1/MAT/63/94.

[12] ont conjecturé que le produit $H_1 \cdots H_n$ de sous-groupes finiment engendrés de F est toujours fermé pour la topologie profinie. Le cas $n = 1$ avait déjà été établi par Hall [7]. Le cas général découle facilement du résultat suivant.

Théorème 1 (Ribes et Zalesskiĭ [13]). *Si $H_1, ..., H_n$ sont des sous-groupes finiment engendrés du groupe libre F et $g \in F \setminus H_1 \cdots H_n$, alors il existe des sous-groupes $K_1, ..., K_n$ de F d'indice fini tels que $H_i \subseteq K_i$ $(i = 1, ..., n)$ et $g \notin K_1 \ldots K_n$.*

Indépendemment et à peu près en même temps, Ash [4] a donné une preuve de la conjecture du type II qu'on peut situer dans le domaine de la théorie des semigroupes. Il se trouve qu'en effet il a prouvé un résultat plus général que l'on va maintenant décrire.

On appelle *graphe* un ensemble $\Gamma = V(\Gamma) \mathring{\cup} E(\Gamma)$ muni de deux fonctions $\alpha, \omega :\ E(\Gamma) \to V(\Gamma)$ (envoyant *arêtes* dans *sommets*) qui déterminent, respectivement, le *début* et la *fin* de chaque arête. Un *étiquetage restreint* du graphe Γ par un monoïde M est juste une fonction $\gamma\colon\ E(\Gamma) \to M$. Si M est un groupe, on dit que γ *commute* si, pour chaque circuit non-orienté $e_1, ..., e_r$, on a l'égalité $(e_1\gamma)^{\pm 1} \cdots (e_r\gamma)^{\pm 1} = 1$ où l'on prend l'exposant $+1$ ou -1 selon l'arête correspondante apparaît dans le bon ou le mauvais sens du circuit.

Un *morphisme relationnel* $\mu\colon\ M \to N$ de monoïdes est un sous-monoïde μ du produit direct $M \times N$ tel que la projection naturelle $\mu \to M$ soit surjective. Dans ce cas-ci, si γ et δ sont des étiquetages restreints d'un graphe Γ respectivement par M et par N, on dit qu'ils sont *μ-compatibles* si l'étiquetage associé $\gamma \times \delta :$ $e \in E(\Gamma) \mapsto (e\,\gamma, e\,\delta) \in M \times N$ prend toutes ses valeurs dans μ.

On appelle un étiquetage restreint γ d'un graphe fini Γ par un monoïde fini M *circuit-inévitable* pour un morphisme relationnel $\mu\colon\ M \to G$ dans un groupe s'il existe un étiquetage restreint de Γ par G μ-relationné avec γ qui commute.

Dans ce qui suit, on fixe un monoïde fini M et on suppose que $\varphi\colon\ A^* \to M$ est un homomorphisme surjectif où A^* dénote le monoïde librement engendré par A et qui on considère comme un sous-monoïde du groupe F. On définit un morphisme relationnel $\theta\colon\ M \to F$ en prenant le sous-monoïde de $M \times F$ engendré par les paires $(a\,\varphi, a)$ avec $a \in A$ plus les paires (m, a^{-1}) avec $m \in M$ et $a \in A$ tels que $m\,(a\,\varphi)\,m = m$. Basé sur des résultats de Pin [11] et le théorème de Ribes et Zalesskiĭ, le deuxième auteur a prouvé la proposition suivante qui décrit θ en termes de la fermeture dans F de certains langages rationnels.

Proposition 2 ([6]). *Avec la notation ci-dessus, si $m \in M$ et $g \in F$, alors $(m, g) \in \theta$ si et seulement si $g \in \overline{m\,\varphi^{-1}}$.*

Voici le résultat principal établi par Ash.

Théorème 3 ([4, Th. 2.1])**.** *Soit γ un étiquetage restreint d'un graphe fini par le monoïde fini M. Alors γ est circuit-inévitable pour tout morphisme relationnel $\mu\colon M \to G$ dans un groupe fini si et seulement si γ est circuit-inévitable pour le morphisme relationnel $\theta\colon M \to F$.*

Des conséquences algorithmiques de ce genre de résultat sont déjà données par Ash [4] et, plus récemment et d'une façon plus systématique, par Steinberg et le premier auteur [2]. Par exemple, on en déduit des algorithmes pour le calcul du "noyau à groupes" d'un monoïde fini (c'est à dire la conjecture du type II) et des "sous-ensembles ponctuels vis-à-vis des groupes" d'un monoïde fini, correspondant à tester la circuit-inévitabilité d'étiquetages par des monoïdes finis de graphes avec, respectivement, un seul sommet ou deux sommets et toutes les arêtes avec le même début et la même fin [4].

En outre, comme un outil pour le calcul systématique des produits semidirects des "pseudovariétés" de monoïdes (classes de monoïdes finis fermées par images homomorphes, sous-monoïdes et produits directs finis), le premier auteur a introduit une autre notion d'inévitabilité ("locale") qui ne fait pas intervenir de groupes. La motivation de base pour cette notion est d'une certaine façon liée aux idées de J. Rhodes qui datent de la fin des années 1960. C'est en effet, dans la perspective du calcul des produits semidirects spécifiques liés au théorème de décomposition de Krohn–Rhodes, que Rhodes avait formulé la conjecture du type II (voir [9]) et Henckell [8] avait étudié les sous-ensembles d'un monoïde fini qui sont ponctuels vis-à-vis une pseudovariété. Certains outils introduits par Rhodes ont conduit d'autre part à des travaux plus généraux sur les produits semidirects comme celui de Tilson [14] où l'on trouve le théorème de la catégorie dérivée. En faisant intervenir en plus des techniques profinies, Weil et le premier auteur ont trouvé un théorème tout à fait général [3, Th. 5.3] donnant une base de pseudoidentités pour n'importe quel produit semidirect. C'est la recherche des applications algorithmiques de ce théorème qui a enfin amené le premier auteur à la formulation locale de l'inévitabilité d'un étiquetage d'un graphe que voici (voir aussi [1, 2] pour des conséquences sur le calcul des produits semidirects).

On considère maintenant des étiquetages d'un graphe fini Γ par un monoïde M donnés par des fonctions $\gamma\colon \Gamma \to M$ qui sont définies aussi sur les sommets. On dit qu'un tel étiquetage est *cohérent* si, pour chaque arête $e \in E(\Gamma)$, $(e\,\alpha\,\gamma)\,(e\,\gamma) = e\,\omega\,\gamma$. La notion d'étiquetages $\gamma\colon\, \Gamma \to M$ et $\delta\colon\, \Gamma \to N$ *μ-compatibles* pour un morphisme relationnel $\mu\colon\, M \to N$ est définie ici en demandant aussi que $\gamma \times \delta$ prenne ses valeurs dans μ. Un étiquetage $\gamma\colon\, \Gamma \to M$ est dit *inévitable* pour un morphisme relationnel $\mu\colon M \to N$ dans un monoïde s'il existe un étiquetage cohérent $\delta\colon \Gamma \to N$ qui soit μ-compatible avec γ.

Pour présenter le rapport entre ces deux notions d'inévitabilité pour des morphismes relationnels dans des groupes, on introduit la notation suivante.

Le *cône* d'un graphe Γ est le graphe $\hat{\Gamma} = (V(\Gamma) \mathring{\cup} \{v_0\}) \mathring{\cup} (E(\Gamma) \mathring{\cup} \{\vec{v}\colon v \in V(\Gamma)\})$ où $\vec{v}\,\alpha = v_0$ et $\vec{v}\,\omega = v$ pour chaque $v \in V(\Gamma)$, les restrictions de α et ω à $E(\Gamma)$ étant données par ces opérations dans Γ. Si γ est un étiquetage du graphe Γ par le monoïde M, alors on peut définir un étiquetage restreint $\hat{\gamma}$ de $\hat{\Gamma}$ par M en prenant $\hat{\gamma}|_{E(\Gamma)} = \gamma|_{E(\Gamma)}$ et $\vec{v}\,\hat{\gamma} = v\,\gamma$ pour chaque $v \in V(\Gamma)$. D'autre part, si δ est un étiquetage restreint de $\hat{\Gamma}$ par M, alors on note $\check{\delta}$ l'étiquetage de Γ par M donné par $\check{\delta}|_{E(\Gamma)} = \delta|_{E(\Gamma)}$ et $v\,\check{\delta} = \vec{v}\,\delta$ pour chaque $v \in V(\Gamma)$. Évidemment, on a $\check{\hat{\gamma}} = \gamma$ et $\hat{\check{\delta}} = \delta$.

Le lemme suivant est prouvé dans [1, Th. 7].

Lemme 4. *Soient $\mu\colon M \to G$ un morphisme relationnel d'un monoïde dans un groupe, γ un étiquetage d'un graphe Γ par M et δ un étiquetage restreint de $\hat{\Gamma}$ par G. Alors:*

1) *γ et $\check{\delta}$ sont μ-compatibles si et seulement si $\hat{\gamma}$ et δ sont μ-compatibles;*

2) *δ commute si et seulement si $\check{\delta}$ est cohérent.*

Ce résultat nous permet de donner la formulation suivante du théorème de Ash.

Théorème 5. *Soit γ un étiquetage d'un graphe fini par le monoïde fini M. Alors γ est inévitable pour tout morphisme relationnel $\mu\colon M \to G$ dans un groupe fini si et seulement si γ est inévitable pour le morphisme relationnel $\theta\colon M \to F$.*

En effet, en adaptant les idées contenues dans la preuve de [1, Th. 7], il est aussi facile de déduire le théorème de Ash du résultat précédent.

Pour trouver une formulation du théorème de Ash en termes de systèmes d'équations, on associe à chaque graphe Γ le système

$$x_{e\alpha}\,x_e = x_{e\omega} \quad (e \in E(\Gamma))\ . \tag{1}$$

Un étiquetage γ de Γ par le monoïde M fournit des contraintes pour les solutions de (1) dans le groupe libre F:

$$x_z \in z\,\gamma\,\theta \quad (z \in \Gamma)\ . \tag{2}$$

L'existence d'une solution $\{x_z\}_{z\in\Gamma}$ du système (1) dans F satisfaisant les contraintes (2) signifie précisément qu'il existe un étiquetage δ de Γ par F tel que δ soit cohérent et θ-compatible avec γ: le rapport entre solutions et étiquetages est donné par la formule $z\,\delta = x_z$ $(z \in \Gamma)$. Par conséquent, le système (1) a une solution dans F satisfaisant les contraintes (2) si et seulement si γ est inévitable pour le morphisme relationnel $\theta\colon\ M \to F$.

D'autre part, si γ n'est pas inévitable (on dit alors aussi qu'il est *évitable*) pour un certain morphisme relationnel $\mu\colon\ M \to G$ dans un groupe fini, alors γ est aussi évitable pour n'importe quel morphisme relationnel $\nu\colon\ M \to G$ qui est contenu dans μ. En particulier, si on choisit un homomorphisme $\varphi'\colon\ A^* \to \mu$ tel que le résultat de la composition avec la projection naturelle $\mu \to M$ soit l'homomorphisme φ, alors il existe un homomorphisme $\psi\colon\ F \to G$ tel que $\psi|_{A^*}$ soit obtenu par composition de φ' avec la projection naturelle $\mu \to G$, ce qui entraîne que le morphisme relationnel $\nu = \varphi^{-1}\,\psi\colon\ M \to G$ est contenu dans μ et donc il est évitable si μ est évitable. Le diagramme commutatif suivant pourra peut-être aider à visualiser cet argument.

$$\begin{tikzcd}
A^* \arrow[rr, hook] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, dashed, "\varphi'"] & & F \arrow[d, dashed, "\psi"'] \\
M & \mu \arrow[l] \arrow[r] & G
\end{tikzcd}$$

On observe aussi que, grâce à la définition de la topologie profinie, l'homomorphisme ψ est continu vis-à-vis de la topologie discrète sur le groupe G et donc, par la Proposition 2, $\nu = \varphi^{-1}\,\psi = \theta\,\psi$. Soit $K = 1\,\psi^{-1}$ le noyau de ψ. Alors le fait que ν soit évitable se traduit en disant que le système (1) n'admet pas de solution dans F satisfaisant les contraintes

$$x_z \in z\,\gamma\,\theta \cdot K \qquad (z \in \Gamma)\ . \tag{3}$$

Le Théorème 5 implique donc que, si le système (1) n'admet pas de solution dans F satisfaisant les contraintes (2), alors il existe un sous-groupe (normal) K de F d'indice fini tel que (1) n'admet toujours pas de solution pour les contraintes (3). Une fois que les contraintes (3) sont plus faibles que (2), la réciproque est évidente.

Avant donner la formulation du résultat principal, on doit rappeler un résultat dû à Pin et Reutenauer et qui dépend du théorème de Ribes et Zalesskiĭ.

Théorème 6 ([12]). *La fermeture d'un langage rationnel de A^* dans le groupe libre F peut être calculée en appliquant les règles suivantes, où L, L_1, L_2 sont des langages rationnels de A^*:*

1) *si L est fini, $\overline{L} = L$;*

2) $\overline{L_1 \cup L_2} = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$;

3) $\overline{L_1\, L_2} = \overline{L_1}\ \overline{L_2}$;

4) *$\overline{L^*}$ est le sous-groupe de F engendré par L.*

En plus, si L est un langage rationnel de A^*, alors $\overline{L}$ est une union finie de sous-ensembles de F de la forme $g\,H_1 \cdots H_n$ avec $g \in F$ et chaque H_i un sous-groupe finiment engendré.

L'homomorphisme $\varphi\colon\ A^* \to M$ détermine une famille finie de langages rationnels $m\,\varphi^{-1}$ $(m \in M)$. Réciproquement, il est bien connu que, pour chaque famille finie de langages rationnels de A^*, il existe un homomorphisme $\varphi\colon A^* \to M$ dans un monoïde fini tel que chaque langage dans la famille soit union de langages de la forme $m\varphi^{-1}$ $(m \in M)$. Les contraintes (2) se traduisent donc par la disjonction d'un nombre fini de contraintes de la forme

$$x_z \in g_z\, H_{1,z} \cdots H_{n_z,z} \qquad (z \in \Gamma)\ , \tag{4}$$

où chaque $g_z \in F$ et chaque $H_{i,z}$ est un sous-groupe finiment engendré de F.

Si K est un sous-groupe normal de F d'indice fini, alors on a l'égalité $g_z\, H_{1,z} \cdots H_{n_z,z}\, K = g_z(H_{1,z}\, K) \cdots (H_{n_z,z}\, K)$ et chaque $H_{i,z}\, K$ est un sous-groupe de F d'indice fini contenant $H_{i,z}$. Réciproquement, si chaque $K_{i,z}$ est un sous-groupe de F d'indice fini contenant $H_{i,z}$, alors l'intersection K des conjugués de $K_{1,z} \cap \cdots \cap K_{n_z,z}$ est un sous-groupe normal de F d'indice fini tel que $g_z\, H_{1,z} \cdots H_{n_z,z}\, K \subseteq g_z\, K_{1,z} \cdots K_{n_z,z}$.

On peut finalement énoncer le théorème de Ash sous la forme suivante.

Théorème 7. *Soit Γ un graphe fini et, pour chaque $z \in \Gamma$, soient g_z un élément du groupe libre F et $H_{1,z}, ..., H_{n_z,z}$ des sous-groupes finiment engendrés de F. Si le système (1) n'admet pas de solution dans F satisfaisant les contraintes (4), alors il existe des sous-groupes $K_{i,z}$ de F d'indice fini contenant les $H_{i,z}$ correspondants tels que le système (1) n'admet toujours pas de solution dans F satisfaisant les contraintes $x_z \in g_z\, K_{1,z} \cdots K_{n_z,z}$ $(z \in \Gamma)$.*

En particulier, en prenant juste l'équation $x_1\, y = x_2$ avec les contraintes $x_1 \in \{1\}$, $y \in g\{1\}$ et $x_2 \in H_1 \cdots H_n$, on retrouve le théorème de Ribes et Zalesskiĭ.

Le Théorème 7 a été trouvé après que le premier auteur eut entendu Daniel Lascar parler d'une extension d'un résultat combinatoire obtenu en collaboration avec Bernhard Herwig [10] et qui est équivalente au théorème de Ribes et Zalesskiĭ et d'une traduction en termes d'équations de cette extension. Pour un sous-groupe H du groupe libre F et éléments x et y de F, notons $x \equiv_H y$ l'égalité $x\,H = y\,H$. Voici le résultat prouvé par Herwig et Lascar.

Théorème 8 ([10])**.** *Soit* $(\mathcal{S})$ *un système fini d'*équations *d'une des formes*

$$X \equiv_H Yg \quad \text{et} \quad X \equiv_H g \ ,$$

où les H sont des sous-groupes de F finiment engendrés et les g sont des éléments de F. Si le système n'a pas de solution dans F (c'est à dire il n'y a pas de choix de valeurs dans F pour les variables X, Y, ... vérifiant toutes les équations), alors ont peut remplacer chaque sous-groupe H par un sous-groupe de F d'indice fini contenant H de telle façon que le système n'ait toujours pas de solution dans F.

On montre en suite que chaqu'un des Théorèmes 7 et 8 peut être déduit de l'autre. On observe qu'il suffit de décrire des traductions entre les deux types de systèmes d'équations.

Commençons par considérer un système $(\mathcal{S})$ comme celui décrit dans le Théorème 8. On associe à ce système un graphe fini Γ dont les sommets sont précisément les variables du système $(\mathcal{S})$ et dont les arêtes sont les équations de la forme $X \equiv_H Yg$, une telle arête conduisant du sommet Y au sommet X. Sur le système (1) associé à Γ, on considère les contraintes suivantes:

– $x_X \in gH$ pour chaque équation $X \equiv_H g$ du système $(\mathcal{S})$;

– $x_e \in gH$ pour chaque arête e: $X \equiv_H Y\,g$ du système $(\mathcal{S})$.

On peut alors facilement vérifier qu'une solution du système $(\mathcal{S})$ conduit à une solution du système (1) satisfaisant les contraintes ci-dessus en prenant pour chaque x_X la valeur X dans une solution de $(\mathcal{S})$ et pour chaque x_e, où $e{:}\,X \equiv_H Yg$, l'élément gh de gH tel que, pour les valeurs de X et Y données par la solution de $(\mathcal{S})$, $X = Yg\,h$. D'autre part, si on a une solution du système (1) satisfaisant les contraintes ci-dessus, on peut obtenir une solution du système $(\mathcal{S})$ en prenant pour chaque variable X, la valeur de x_X dans la solution de (1) donnée. Cette traduction nous permet de déduire le Théorème 8 du Théorème 7.

Pour la réciproque, il faut travailler un peu plus comme l'indique sûrement le fait que le processus de traduction décrit ci-dessus produise seulement des systèmes associés à des graphes avec des contraintes très spéciales. Ça nous oblige à simplifier les contraintes (en changeant le graphe et donc le système donné) avant de faire la traduction. Soit donc Γ un graphe fini et considérons le système (1) associé avec les contraintes (4).

- On commence par remplacer chaque arête e avec contrainte $x_e \in g_e H_{1e} \cdots H_{n_e e}$ par un chemain $\langle e\,\alpha,\, e_1,\, v_{1e},\, e_2,\, v_{2e},\, ...,\, e_{n_e},\, e\,\omega\rangle$ de $e\,\alpha$ à $e\,\omega$ avec contraintes $x_{e_1} \in g_e\, H_{1e},\ x_{e_i} \in 1H_{ie}$ pour $i > 1$, et $x_{v_{ie}} \in 1F$ pour tout i.
- Ensuite, on remplace chaque sommet v du graphe Γ avec contrainte $x_v \in g_v\, H_{1v} \cdots H_{n_v v}$ par un chemain $\langle v_1,\, e_{1v},\, v_2,\, e_{2v},\, ...,\, e_{n_v v},\, v\rangle$ conduisant à v avec contraintes $x_{v_1} \in g_v 1,\ x_{v_i} \in 1F$ pour $i > 1$, et $x_{e_{iv}} \in 1H_{iv}$ pour tout i.

On obtient ainsi un système associé à un graphe plus grand Γ', avec contraintes, tel que le système (1) ait une solution si et seulement si le nouveau système en possède une. Pour le nouveau système, toutes les contraintes sont de la forme

$$x_a \in g_a\, H_a\ , \tag{5}$$

où les éléments g_a sont soit 1 soit des g_z qui apparaissaient déjà dans les contraintes (4), et les sous-groupes H_a sont soit 1 ou F, soit des H_{iz} des contraintes (4). On peut donc supposer que les contraintes du système (1) sont toutes de la forme (5). Ça nous permet de définir un système ($\mathcal{S}$) en prenant

- une équation $x_v \equiv_{H_v} g_v$ pour chaque sommet $v \in V(\Gamma)$;
- une équation $x_{e\omega} \equiv_{H_e} x_{e\alpha}\, g_e$ pour chaque arête $e \in E(\Gamma)$.

Il est alors immédiat que le système (1) avec contraintes (5) et le système ainsi construit ont les mêmes solutions, ce qui nous permet de déduire le Théorème 7 du Théorème 8.

Pour conclure, on remarque qu'on peut relativiser tous les arguments de cette note à une pseudovariété de groupes **H** quelconque: "groupe fini" devient "élément de **H**", "groupe libre" devient "groupe libre relativement à **H**", "topologie profinie" devient "topologie pro-**H**". On ne sait pas si en générale **H** possède les propriétés exprimées par les théorèmes de Ash, de Ribes et Zalesskiĭ et de Pin et Reutenauer. Néanmoins, les arguments dans cette note montrent que si le théorème de Pin et Reutenauer est vrai pour **H**, alors le théorème de Ash est aussi vrai pour **H** si et seulement si le Théorème 7 est vrai pour **H**. Dans le cas de la pseudovariété **Ab** des groupes abéliens finis, les théorèmes de Ribes et Zalesskiĭ (donc aussi celui de Pin et Reutenauer) et de Ash ont été prouvés par le deuxième auteur [5, 6].

RÉFÉRENCES

[1] Almeida, J. – Hyperdecidable pseudovarieties and the calculation of semidirect products, *Int. J. Algebra and Computation.* To appear.

[2] Almeida, J. and Steinberg, B. – *On the Decidability of Iterated Semidirect Products and Applications to Complexity*, Tech. Rep. CMUP 97-27, Univ. Porto, 1997.

[3] Almeida, J. and Weil, P. – Profinite categories and semidirect products, *J. Pure and Appl. Algebra,* 123 (1998), 1–50.

[4] Ash, C.J. – Inevitable graphs: a proof of the type II conjecture and some related decision procedures, *Int. J. Algebra and Computation,* 1 (1991), 127–146.

[5] Delgado, M. – Abelian pointlikes of a monoid, *Semigroup Forum.* To appear.

[6] Delgado, M. – On the hyperdecidability of pseudovarieties of groups, *Int. J. Algebra and Computation.* To appear.

[7] Hall, M. – A topology for free groups and related groups, *Ann. Math.,* 52 (1950), 127–139.

[8] Henckell, K. – Pointlike sets: the finest aperiodic cover of a finite semigroup, *J. Pure and Appl. Algebra,* 55 (1988), 85–126.

[9] Henckell, K., Margolis, S., Pin, J.-E. and Rhodes, J. – Ash's type II theorem, profinite topology and Malcev products. Part I, *Int. J. Algebra and Computation,* 1 (1991), 411–436.

[10] Herwig, B. and Lascar, D. – *Extending Partial Automorphism and the Profinite Topology on the Free Groups*, Tech. Rep., Albert-Ludwigs-Universität Freiburg and University Paris 7, 1997.

[11] Pin, J.-E. – Topologies for the free monoid, *J. Algebra,* 137 (1991), 297–337.

[12] Pin, J.-E. and Reutenauer, C. – A conjecture on the Hall topology for the free group, *Bull. London Math. Soc.,* 23 (1991), 356–362.

[13] Ribes, L. and Zalesskiĭ, P.A. – On the profinite topology on a free group, *Bull. London Math. Soc.,* 25 (1993), 37–43.

[14] Tilson, B. – Categories as algebra: an essential ingredient in the theory of monoids, *J. Pure and Applied Algebra,* 48 (1987), 83–198.

Jorge Almeida and Manuel Delgado,
Centro de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto,
P. Gomes Teixeira, 4050 Porto – PORTUGAL