PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 59 Fasc. 3 – 2002
Nova Série

CARACTÉRISATION DES AUTOMORPHISMES D'UN GROUPE ABÉLIEN AYANT LA PROPRIÉTÉ DE L'EXTENSION

S. Abdelalim et H. Essannouni

Presented by P. Malliavin

Abstract: In this paper we show that an automorphism α of an abelian group A can be extented to an automorphism of any abelian group which contains A as subgroup iff $(\alpha - id_A)(A)$ or $(\alpha + id_A)(A)$ is a divisible subgroup of A. Then if A is reduced, id_A and $-id_A$ are the only automorphisms of A which have the extension property.

1 – Introduction and results

Dans [6] P.E. Schupp caractérise les automorphismes intérieurs d'un groupe G de la manière suivante: si α est un automorphisme de G alors α est intérieur ssi pour tout groupe H contenant G comme sous groupe, α se prolonge en un automorphisme de H. En particulier si G est abélien alors id_G est le seul automorphisme de G qui posséde la propriété de l'extension. Dans [5] M.R. Pettet montre aussi que dans certaines classes de groupes finis les automorphismes intérieurs sont caractérisés par la propriété de l'extension. Dans [3] M. Dugas et R. Gobel donnent une autre preuve du résultat de Schupp. Dans [1] L. BenYakoub montre que le résultat de Schupp n'est pas valable en général pour les algébres sur anneau commutatif. On peut se demander si la propriété de l'extension caractérise aussi les dérivations intérieures dans les algébres associatives. Dans [2] L. BenYakoub et M.P. Malliavin montrent que c'est le cas pour certaines algébres quantiques.

Dans ce papier nous montrons qu'un automorphisme α d'un groupe abélien A se prolonge en un automorphisme dans tout groupe abélien B, contenant A

Received: February 14, 2001.

comme sous groupe ssi $(\alpha - id_A)(A)$ ou $(\alpha + id_A)(A)$ est un sous groupe divisible de A. En particulier si A est réduit alors id_A et $-id_A$ sont les seuls automorphismes de A qui possédent la propriété de l'extension (dans la categorie des groupes abéliens).

Tous les groupes que nous considérons dans la suite sont abéliens et nous adoptons les notations de [4].

Soit $\mathcal{C}$ une classe de groupe abélien et soit $A \in \mathcal{C}$ nous voulons caractériser les automorphismes α de A ayant la propriété suivante:

(E) Pour tout groupe $B \in \mathcal{C}$ et tout monomorphisme $\lambda : A \longrightarrow B$, il existe un automorphisme $\tilde{\alpha}$ de B rendant le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha} \\ A & \xrightarrow{\lambda} & B \end{array}$$

commutatif.

Les classes de groupes abéliens que nous considérons sont (Ab): la classe de tous les groupes abéliens, $(Ab)_t$: la classe des groupes abéliens de torsion et $(Ab)_p$: la classe des p-groupes abéliens (p nombre premier).

Remarque 1.1. Si A est divisible alors tous les automorphismes de A possédent la propriété (E) relativement à n'importe quelle classe contenant A. □

Remarque 1.2. Désignons par $\mathcal{C}$ l'une des classe (Ab), $(Ab)_t$ ou $(Ab)_p$. Soient $A \in \mathcal{C}$, D le sous-groupe divisible maximal de A, α un auotomorphisme de A et $\overline{\alpha}$ l'automorphisme de A/D induit par α. Il est facile de voir que $\overline{\alpha}$ vérifie (E) relativement à $\mathcal{C}$. Donc pour l'etude de la propriété (E), on peut supposer A réduit (i.e. $D = 0$). □

2 – Caratérisation des automorphismes ayant la propriété de l'extension dans la classe des p-groupes abéliens

Proposition 2.1. *Soient p un nombre premier et A un p-groupe abélien réduit. Les seuls automorphismes de A qui vérifient (E) relativement à $(Ab)_p$ sont πid_A où π est un nombre p-adique inversible.*

Preuve: Soit α un automorphisme de A vérifiant (E) relativement à $(Ab)_p$.

Soit $x \in A$ tel que $\langle x \rangle$ est un facteur direct de A. Soient E un p-groupe divisible contenant x et A_0 un sous groupe de A tel que $\langle x \rangle \oplus A_0 = A$. Il existe $\tilde{\alpha} \in Aut(E \oplus A_0)$ tel que $\tilde{\alpha}(a) = \alpha(a)$ pour tout $a \in A$. Comme $\tilde{\alpha}(E) \subseteq E$, car A_0 est réduit alors $\alpha(x) = \tilde{\alpha}(x) = kx$, $k \in \mathbb{Z}$.

A présent soit B un sous groupe de base de A. $B = \bigoplus_{n \geq 1} B_n$ avec pour tout $n \geq 1$, $B_n = 0$ ou B_n est somme directe de groupes cycliques finis chacun d'ordre p^n. Fixons $n \geq 1$ avec $B_n \neq 0$. $B_n = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle$ tel que $o(x_i) = p^n$, $\forall i \in I$. Comme B_n est un facteur direct de A (voir 32.4[4]). D'aprés ce qui précéde $\alpha(x_i) = m_i x_i$, $m_i \in \mathbb{Z}$. Soit $(i, j) \in I^2$ avec $i \neq j$, on peut écrire $\langle x_i \rangle \oplus A_i = A$ avec $x_j \in A_i$. Il est facile de voir que $\langle x_i + x_j \rangle \oplus A_i = A$ donc $\alpha(x_i + x_j) = m(x_i + x_j) \Longrightarrow p^n \mid m_i - m_j$. Il existe alors $k_n \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha(b) = k_n b$, $\forall b \in B_n$. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq m < n$, comme $B_m \oplus B_n$ est un facteur direct de A (32.4[4]) alors on peut voir facilement que $p^m \mid k_n - k_m$.

Soit π le nombre p-adique défini par la suite $(k_n)_{n \geq 0}$ (avec $k_0 = 0$ et $k_n = k_{n-1}$ si $B_n = 0$). On a $\alpha(b) = \pi b$, pour tout $b \in B$ et comme A est réduit alors $\alpha = \pi\, id_A$ (34.1[4]). ∎

On en déduit facilement les deux corollaires suivants.

Corollaire 2.1. *Soit A un p-groupe abélien. les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $\forall \alpha \in Aut(A)$, *$\alpha$ vérifie (E) dans $(Ab)_p$.*

(ii) *$A = D \oplus \langle x \rangle$ où D est un p-groupe divisible.*

Corollaire 2.2. *Supposons que A est un groupe de torsion réduit et α un automorphisme de A alors les deux propriétés suivantes sont equivalentes:*

(i) *α vérifie (E) dans $(Ab)_t$.*

(ii) *La restriction de α à toute p-composante de A est la multiplication par un nombre p-adique inversible.*

3 – Caractérisation des automorphismes ayant la propriété de l'extension dans la classe des groupes abéliens

Lemme 3.1. *Supposons $S = \bigoplus_{n \geq 1} \langle x_n \rangle$ avec pour tout $n \geq 1$, $o(x_n) = q^{n^4}$ $(q \geq 2)$. Il existe un groupe abélien H contenant S comme sous groupe et pour tout $\gamma \in Aut(H)$ il existe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $q^{n^4 - n}\gamma(x_n) = \epsilon\, q^{n^4 - n}\, x_n$, $\forall n \geq N$.*

Preuve: Considérons le produit direct $\prod\limits_{n\geq 1} \langle x_n\rangle$ et désignons par $f_k\colon \prod\limits_{n\geq 1}\langle x_n\rangle \to \langle x_k\rangle$, la projection canonique ($k\geq 1$). Pour $m\geq 1$, on définit l'élement e_m de $\prod\limits_{n\geq 1}\langle x_n\rangle$ par

$$f_n(e_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ n<m \\ q^{n^4-m^4} x_n & \text{si } \ n\geq m\ . \end{cases}$$

On vérifie directement que $o(e_m) = q^{m^4}$, $x_m = e_m - q^{(m+1)^4-m^4} e_{m+1}$ et $\sum\limits_{m\geq 1}\langle e_m\rangle = \bigoplus\limits_{m\geq 1}\langle e_m\rangle$. Aussi pour $m\geq 1$ et ξ une application de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$, on définit l'élement $h(m,\xi)$ de $\prod\limits_{n\geq 1}\langle x_n\rangle$ par

$$f_n(h(m,\xi)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ n<m \\ \xi(n)\, q^{n-m+(n-1)^4}\, x_n & \text{si } \ n\geq m\ . \end{cases}$$

On a pour $r\geq m$: $h(m,\xi) = (\sum\limits_{n=m}^{r} \xi(n)\, q^{n-m+(n-1)^4} x_n) + q^{r+1-m} h(r+1,\xi)$. Soit H le sous groupe de $\prod\limits_{n\geq 1}\langle x_n\rangle$ engendré par la partie $\{e_m/m\geq 1\}\cup\{h(m,\xi)/m\geq 1 \text{ et } \xi\in\{o,1\}^{\mathbb{N}}\}$. Soit $\gamma\in Aut(H)$. Montrons dans un premier temps qu'il existe $N_0\geq 1$ tel que:

$$(1) \qquad n>m\geq N_0 \implies f_n(q^{m^4-m}\gamma(x_m)) = 0\ .$$

Si non, on peut trouver deux suites $(m_k)_{k\geq 1}$ et $(n_k)_{k\geq 1}$ telles que: pour tout $k\geq 1$, $m_k<n_k$, $n_k^4<m_{k+1}$ et $f_{n_k}(q^{m_k^4-m_k}\gamma(x_{m_k}))\neq 0$.

Soit $\lambda\colon \mathbb{N}\to\{0,1\}$ définie par $\lambda(n)=1$ si $n\in\{m_k/k\geq 1\}$ et $\lambda(n)=0$ si non.

On peut écrire $q^t\gamma(h(1,\lambda)) = q^t\sum\limits_{i=1}^{a} b_i\, h(m,\xi_i)$ où $t\geq 0$, $m\geq 1$, $b_1,\dots,b_a\in\mathbb{Z}$ et $\xi_1,\dots,\xi_a\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On pose pour $n\geq 1$, $\theta(n) = n^4-(n-1)^4-n$. $\forall k\geq 1$, $q^{\theta(m_k)+1}h(1,\lambda) = q^{\theta(m_k)+1}[(\sum\limits_{n=1}^{m_{k+1}-1} \lambda(n)\, q^{n-1+(n-1)^4} x_n) + q^{m_{k+1}-1} h(m_{k+1},\lambda)] \in q^{n_k^4}H$ car $\theta(m_k)+1+n-1+(n-1)^4\geq n^4$ pour $m_k\geq n\geq 1$, $\lambda(n)=0$ pour $m_{k+1}>n>m_k$ et $\theta(m_k)+m_{k+1}\geq n_k^4$. Donc pour k assez grand $f_{n_k}(q^{\theta(m_k)+1}\gamma(h(1,\lambda))) = f_{n_k}(q^{\theta(m_k)+1}\sum\limits_{i=1}^{a} b_i\, h(m,\xi_i)) = 0$ et par la suite $q^{\theta(n_k)-\theta(m_k)}$ divise $v(n_k)$ où $v(n) = \sum\limits_{i=1}^{a} b_i\,\xi_i(n)$. Comme l'ensemble $\{v(n)/n\in\mathbb{N}\}$ est fini et $\theta(n_k)-\theta(m_k)\geq n_k$ alors il existe $k_1\geq 1$ tel que $v(n_k)=0$, $\forall k\geq k_1$. D'autre part $q^{\theta(m_k)-m_k+1}h(1,\lambda) - q^{m_k^4-m_k}x_{m_k}\in q^{n_k^4}H \Longrightarrow f_{n_k}(q^{\theta(m_k)-m_k+1}\sum\limits_{i=1}^{a} b_i h(m,\xi_i))\neq 0$ pour k assez grand. Il existe alors $k_2\geq 1$ tel que $v(n_k)\neq 0$, $\forall k\geq k_2$ ce qui est absurde.

Ainsi il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que:

$$q^{n^4-n}\,\gamma(x_n) = r_n\, q^{n^4-n}\, x_n\,, \qquad \forall n \geq N_0$$

où les $r_n \in \mathbb{Z}$. Comme $T(H) = \bigoplus_{n\geq 1} \langle e_n \rangle$ ($T(H)$ étant la partie de torsion de H) et $k^4 \leq n^4 - n$ si $k < n$ alors $q^{n^4-n}\,\gamma(e_n) \in q^{n^4-n}(\bigoplus_{k\geq n} \langle e_k \rangle)$. Fixons $m \geq N_0$ et posons pour $n \geq m$, $q^{n^4-m}\,\gamma(e_n) = q^{n^4-m} \sum_{k=n}^{j(n)} t_{n,k}\, e_k$ avec $q^{n^4-m}\, t_{n,j(n)}\, e_{j(n)} \neq 0$.

Soit $(u_n)_{n\geq m}$ la suite définit par:

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \; j(n) = n \\ j(n) & \text{si } \; j(n) > n\ . \end{cases}$$

Comme $q^{n^4-m}\gamma(x_n) = r_n q^{n^4-m} x_n$ si $n \geq m$ et $x_n = e_n - q^{(n+1)^4-n^4} e_{n+1}$, il est facile de voir que $u_n \geq u_{n+1}$, $\forall n \geq m$. Il existe alors $M_m \in \mathbb{N}$, $M_m \geq m$, tel que $u_n = 0$, $\forall n \geq M_m$ (car $u_n \neq 0 \Longrightarrow u_n > n$). On vient de prouver que $\forall m \geq N_0$ il existe $M_m \geq m$ tel que: $q^{n^4-m}\gamma(e_n) \in q^{n^4-m}\langle e_n \rangle$, $\forall n \geq M_m$ On peut en déduire que $q^m \mid r_{n+1} - r_n$ pour tout $m \geq N_0$ et tout $n \geq M_m$.

A présent soit δ: $\mathbb{N} \to \{0,1\}$ telle que $\delta(n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On peut écrire: $q^{t'}\gamma(h(1,\delta)) = q^{t'} \sum_{j=1}^{b} c_j h(m', \xi_j)$ oú $t', b, m' \in \mathbb{N}^*$, $c_1, ..., c_b \in \mathbb{Z}$ et $\xi_1, ..., \xi_b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On a $q^{\theta(n)-n+1}h(1,\delta) - q^{n^4-n}x_n \in q^{n^4}H$ donc pour n assez grand $q^{n^4-n}f_n(\gamma(x_n)) = q^{\theta(n)-n+1}f_n(\sum_{j=1}^{b} c_j\, h(m', \xi_j))$. Il existe alors $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $q^{n+m'-1} \mid q^{m'-1}r_n - w(n)$, $\forall n \geq N_1$, oú $w(n) = \sum_{j=1}^{b} c_j\, \xi_j(n)$. D'aprés ce qui précéde on peut en déduire que si $d \in \mathbb{Z}$ est tel que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}/w(n+1) - w(n) = d\}$ est infini alors $q^m \mid d$, $\forall m \geq N_0$ et par la suite $d = 0$. L'ensemble $\{w(n+1) - w(n)/n \in \mathbb{N}\}$ étant fini, il existe alors $v \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $w(n) = q^{m'-1}v$, $\forall n \geq N$. Ainsi on a $q^{n^4-n}\gamma(x_n) = vq^{n^4-n}x_n$, $\forall n \geq N$. De même il existe $N' \in \mathbb{N}^*$ et $v' \in \mathbb{Z}$ tel que: $q^{n^4-n}\gamma^{-1}(x_n) = v' q^{n^4-n}x_n$, $\forall n \geq N'$. On a alors $vv' = 1$ et par la suite $v = 1$ ou $v = -1$. ∎

Lemme 3.2. *Supposons que G est un groupe cyclique fini d'ordre q alors sont équivalentes:*

(i) α *vérifie* (E) *dans* (Ab).

(ii) $\alpha = \epsilon id_G$ *où* $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

Preuve: (**i**)$\Longrightarrow$(**ii**). Posons $G = \langle g \rangle$ avec $o(g) = q$, on peut supposer $q \geq 3$. Soit α un automorphisme de G vérifiant (E) dans (Ab). Considérons le groupe libre $L = \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}\, z_n$ et soit K le sous groupe de L engendré par la partie $\{qz_0\} \cup \{q^{n^4} z_n - z_0 / n \geq 1\}$. On pose $A = L/K$ et $y_n = z_n + K$, $n \geq 0$. On vérifie directement que: $A/\langle y_0 \rangle = \bigoplus_{n \geq 1} \langle x_n \rangle$ où $x_n = y_n + \langle y_0 \rangle$. On a aussi $o(y_0) = q$ et pour tout $n \geq 1$, $q^{n^4} y_n = y_0$ et $o(x_n) = q^{n^4}$. Soit H le groupe du lemme 3.1. Il existe un diagramme commutatif de la forme ([4], 24.6)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G & \stackrel{\lambda'}{\longrightarrow} & A & \stackrel{s}{\longrightarrow} & A/\langle y_0 \rangle & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow \phi & & \downarrow i & & \\ 0 & \longrightarrow & G & \stackrel{\lambda}{\longrightarrow} & B & \stackrel{\mu}{\longrightarrow} & H & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où $\lambda'(g) = y_0$, s la surjection canonique et i l'injection canonique. Il existe $\tilde{\alpha} \in Aut(B)$ pour lequel le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} G & \stackrel{\lambda}{\longrightarrow} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha} \\ G & \stackrel{\lambda}{\longrightarrow} & B \end{array}$$

L'application $\gamma : H \longrightarrow H$ définie par $\gamma(\mu(b)) = \mu(\tilde{\alpha}(b))$ $(b \in B)$ est un automorphisme de H. D'aprés le lemme 3.1, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $q^{n^4 - n}\gamma(x_n) = \epsilon q^{n^4 - n} x_n$, $\forall n \geq N$. Soit $n \geq N$, $q^{n^4-n}\gamma(x_n) = \epsilon\, q^{n^4-n} x_n$ $\Longrightarrow q^{n^4-n}\mu(\tilde{\alpha}\phi(y_n)) = \epsilon\, q^{n^4-n}\mu\, \phi(y_n) \Longrightarrow q^{n^4-n}(\tilde{\alpha}\, \phi(y_n) - \epsilon\, \phi(y_n)) \in \lambda(G) \Longrightarrow$ $q^{n^4}(\tilde{\alpha}\, \phi(y_n) - \epsilon\, \phi(y_n)) \in q^n \lambda(G) = 0 \Longrightarrow \tilde{\alpha}\, \phi(q^{n^4} y_n) = \epsilon\, \phi(q^{n^4} y_n) \Longrightarrow \tilde{\alpha}\, \phi(y_0) =$ $\epsilon\, \phi(y_0) \Longrightarrow \tilde{\alpha}\, \lambda(g) = \epsilon\, \lambda(g) \Longrightarrow \alpha(g) = \epsilon g$.

(**ii**)$\Longrightarrow$(**i**). Evident. ∎

Lemme 3.3. *Soient A un groupe abélien et αun automorphisme de A vérifiant (E) dans (Ab). Si $A = A_1 \oplus A_2$ avec $\alpha(A_1) = A_1$ et $\alpha(A_2) = A_2$ alors la restriction de α à A_i $(i = 1, 2)$ vérifie aussi (E) dans (Ab).*

Preuve: Soient α_1 la restriction de α à A_1 et $\lambda : A_1 \longrightarrow B$ un monomorphisme. L'application $\mu : A \longrightarrow B \oplus A_2$ définie par $\mu(a_1 + a_2) = \lambda(a_1) + a_2$ $(a_i \in A_i)$ est un monorphisme, il existe alors $\tilde{\alpha} \in Aut(B \oplus A_2)$ tel que $\tilde{\alpha}\mu = \mu\alpha$. Si on pose pour $b \in B$, $\alpha^*(b) = f\tilde{\alpha}(b)$ où $f : B \oplus A_2 \longrightarrow B$ est la projection canonique alors $\alpha^* \in Aut(B)$ et $\alpha^*\lambda = \lambda\alpha_1$. ∎

Lemme 3.4. *Supposons que A est un groupe abélien borné et α un automorphisme de A vérifiant (E) dans (Ab). Alors $\alpha = \epsilon\, id_A$ avec $\epsilon = -1$ ou $\epsilon = 1$.*

Preuve: Comme dans le début de la preuve de la proposition 2.1, on peut prouver que si $\langle a\rangle$ est un facteur direct de A ($a \in A$) alors $\alpha(a) \in \langle a\rangle$. Il existe $x \in A$ tel que $\langle x\rangle \oplus B = A$ et $o(x).A = 0$ voir (8.4 et 33.1 [4]). D'aprés les lemmes 3.2 et 3.3 $\alpha(x) = \epsilon\, x$, $\epsilon \in \{-1, +1\}$. Il est alors facile de voir que $\alpha(b) = \epsilon\, b$, $\forall b \in B$. Ainsi $\alpha = \epsilon\, id_A$. ∎

Lemme 3.5. *Soient A un groupe abélien, B un sous-groupe de A et α un automorphisme de A vérifiant (E) dans la classe (Ab). Si $\alpha(B) = B$ alors l'automorphisme de A/B induit par α vérifie aussi (E) dans (Ab).*

Preuve: Posons $\overline{A} = A/B$, $\overline{a} = a + B$ et $\overline{\alpha}(\overline{a}) = \overline{\alpha(a)}$. Soit $\eta : \overline{A} \longrightarrow C$ un monomorphisme, il existe un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes de la forme ([4] 24.6):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \overline{A} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow \phi & & \downarrow \eta & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Comme ϕ est un monomorphisme, il existe $\tilde{\alpha}$ un automorphisme de E pour lequel le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & E \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha} \\ A & \xrightarrow{\phi} & E \end{array}$$

Si on pose $\alpha^*(\mu(x)) = \mu(\tilde{\alpha}(x))$ pour $x \in E$, α^* est automorphisme de C et $\alpha^*\eta = \eta\,\overline{\alpha}$. ∎

Théorème 3.1. *Soient A un groupe abélien et $\alpha \in Aut(A)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *Pour tout groupe abélien B et tout monomorphisme $\lambda : A \longrightarrow B$ il existe $\tilde{\alpha} \in Aut(B)$ tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & E \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha} \\ A & \xrightarrow{\lambda} & E \end{array}$$

commute.

(ii) *$(\alpha + id_A)(A)$ ou $(\alpha - id_A)(A)$ est un sous groupe divisible de A.*

Preuve: (**i**)$\Longrightarrow$(**ii**) On peut supposer A réduit d'aprés le Lemme 3.4, on peut aussi supposer A non borné. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ tel que $(\alpha + \epsilon_n\, id_A)(A) \subseteq nA$ (lemmes 3.5 et 3.4). On peut facilement en déduire qu'il existe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $(\alpha + \epsilon\, id_A)(A) \subseteq A^1$. Posons $\rho = \alpha + \epsilon\, id_A$. Si $\langle x \rangle$ est un facteur direct de A alors $\rho(x) \in \langle x \rangle$ (voir le début de la preuve de la proposition 2.1) et par la suite $\rho(x) = 0$. Soit p un nombre premier et B est un p-sous groupe de base de A, on peut écrire $B = B_0 \oplus C$ avec $B_0 = \bigoplus \mathbb{Z}$ et C un p-sous groupe de base de $T = T(A)$ (la partie de torsion de A). D'aprés ce qui précéde $\rho(T)$ est une image homomorphe de T/C donc $\rho(T)$ est p-divisible. Ainsi $\rho(T) = 0$. Soit $D = \bigcap\limits_{n \geq 1} (T + nA)$, $D/T = (A/T)^1$ est le sous groupe divisible maximal de A/T.

Donc $A/T = D/T \oplus R/T$ où $T \leq R \leq A$ et R/T est réduit. Comme $\rho(T) = 0$ alors l'application $\overline{\rho} : A/T \longrightarrow A^1$ telle que: $\overline{\rho}(a + T) = \rho(a)$ est bien définie. $\overline{\rho}(D/T)$ est un sous groupe divisible de A^1 donc $\overline{\rho}(D/T) = 0$ c'est à dire $\rho(D) = 0$. Posons $C = A/D$ alors $C \cong (A/T)/(D/T) \cong R/T$ donc C est réduit sans torsion, soit $C^{'}$ l'envellope injective de C, $C^{'}$ est aussi sans torsion car $T(C^{'}) \cap C = 0$ donc $T(C^{'}) = 0$. D'aprés ([4] 24.6) il existe un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes de la forme:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & A^{'} & \longrightarrow & C^{'} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On regarde A comme un sous groupe de $A^{'}$. Soit $D^{'}$ le sous groupe maximal de $A^{'}$. Montons que $D \cap D^{'}$ est divisible. Soit $x \in D \cap D^{'}$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $y \in D^{'}$ tel que $x = ny$. Dans le groupe $A^{'}/D$, $x + D^{'} = n(y + D) = 0$ ce qui implique $y + D = 0$ ($C^{'}$ est sans torsion) et par la suite $y \in D$. Donc $D \cap D^{'} = 0$ car A est réduit.

Soit γ un automorphisme de $A^{'}$ tel que $\gamma(a) = \alpha(a), \forall \in A$. Posons $\delta = \gamma + \epsilon\, id_{A^{'}}$ comme $\delta(D) = 0$ alors $\delta(A^{'})$ est une image homomorphe de $A^{'}/D$ qui divisible donc $\delta(A^{'}) \subseteq D^{'}$. Finalement $\rho(A) \subseteq \delta(A^{'}) \subseteq D^{'}$ et $\rho(A) \subseteq A^1 \subseteq D$ et par la suite $\rho(A) \subseteq D^{'} \cap D = 0$. Ainsi $\alpha = \epsilon\, id_A$. ∎

REMERCIEMENT – Les auteurs voudrons bien remercier le professeur A. Kaidi pour ses suggestions et son encouragement.

REFERENCES

[1] Ben Yakoub, L. – Sur un Théorème de Schupp, *Portugaliae Math.,* 51(2) (1994), 231–233.

[2] Ben Yakoub, L. et Malliavin, M.P. – Caractérisation des Dérivation Intérieures de l'Algébre de Weyl et de l'Algébre d'Heisenberg Quantique, *Comm. Alg.,* 24(10) (1996), 3131–3148.

[3] Dugas, M. et Gobel, R. – Outer Automorphisme of Groups, *Illinois of Math.,* 35(1) (1991).

[4] Fuchs, L. – *Infinite Abelian Groups*, Vol. 1, Academic Press, New York, 1970.

[5] Pettet, M.R. – On Inner Automorphisms of Finite Groups, *Proc. of A.M.S.,* 106(1) (1989).

[6] Schupp, P.E. – A Characterizing of Inner Automorphisms, *Proc. of A.M.S.,* 101(2) (1987), 226–228.

S. Abdelalim et H. Essannouni,
Université Mohammed V, Faculté des Sciences, Dép. de Mathématiques et Informatique,
B.P. 1014. Rabat – MOROCCO

E-mail: seddikabd@hotmail.com
esanouni@fsr.ac.ma