Séminaires & Congrès
5, 2001, p. 63–99

ESPACES DE HURWITZ

par

Michel Emsalem

Résumé. — La catégorie des revêtements algébriques de la droite projective à invariants fixés (nombre de points de branchement, groupe de monodromie etc.) est une gerbe au dessus de son espace des modules grossiers. On esquisse ici différentes constructions de ces espaces de Hurwitz sur $\mathbb{Z}$, et l'on montre des applications arithmétiques de ces constructions : solution du problème inverse de Galois régulier sur $\mathbb{Q}_p$ ou plus généralement sur un corps large, propriétés arithmétiques du corps des modules d'un revêtement, existence de modèles ayant bonne réduction.

***Abstract* (Hurwitz spaces).** — The category of algebraic covers of the projective line with fixed invariants (number of branch points, monodromy group...) is a gerbe over its moduli space. We sketch differents constructions of these Hurwitz spaces over $\mathbb{Z}$, giving some arithmetic applications: solution of the regular inverse Galois problem over $\mathbb{Q}_p$ or more genrally over a large field, arithmetic properties of field of moduli of an algebraic cover, existence of models with good reduction.

1. Introduction

Le but de ces exposés est de présenter différentes constructions des espaces de modules de revêtements de la droite projective (appelés espaces de Hurwitz en référence à l'article original d'Hurwitz paru en 1891, où l'auteur définit une structure de variété complexe sur l'espace des revêtements dits « simples » de degré d de la sphère de Riemann [Hur]). Dans la suite on ne se limitera pas aux revêtements « simples » : on traitera la question des modules pour des revêtements généraux de la droite projective, et aussi des G-revêtements (c'est à dire des revêtements galoisiens de la droite projective donnés avec leurs groupes d'automorphismes). Pour disposer d'un espace de taille raisonnable, il faudra se fixer le degré, le nombre de points de branchement, et des invariants d'inertie.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14H30, 14D22, 11G99.
Mots clefs. — Revêtements algébriques, espace des modules, gerbes, corps des modules, ramification, groupe de Galois, monodromie.

Pour les applications arithmétiques que l'on a en vue, on aura besoin de faire de ces espaces de Hurwitz des variétés algébriques, définies naturellement sur un corps de nombres (déterminé par des conditions combinatoires liées aux invariants de l'inertie, et dans la pratique souvent le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels) ; les points de l'espace de Hurwitz rationnels sur un corps K algébriquement clos de caractéristique 0 sont en correspondance biunivoque avec les classes d'isomorphisme de (G-) revêtements de la droite projective définis sur K [Fr1], [FrVö].

Une des applications les plus connues concerne le problème de Galois régulier sur $\mathbb{Q}$, qui consiste à se demander si un groupe fini G donné est le groupe de Galois d'une extension régulière de $\mathbb{Q}(t)$. Cette question peut s'exprimer en termes d'espaces de Hurwitz : la réponse positive à la question est équivalente à l'existence d'un espace de Hurwitz associé au groupe G possédant un point rationnel sur $\mathbb{Q}$. On verra que cette remarque conduit à la réalisation de certains groupes finis sur $\mathbb{Q}$ (en particulier sous les conditions de rigidité) [Fr1], [MaMa], [Th]. Elle permet aussi de montrer que le problème a une réponse positive pour tout groupe fini si on le pose sur certains corps assez gros à la place de $\mathbb{Q}$ [De2], [DeFr], [CT], [Mo-Ba1].

Les espaces de Hurwitz sont des *espaces de modules grossiers* : il n'existe pas en général de famille de Hurwitz universelle sur l'espace de Hurwitz. Mais de telles familles existent localement (au sens analytique sur $\mathbb{C}$, au sens étale de façon plus générale). Ces familles définissent une *gerbe* au-dessus de l'espace de Hurwitz ; à tout point géométrique h de l'espace de Hurwitz correspond une classe d'isomorphisme de (G-) revêtements dans la catégorie considérée définis sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0. La gerbe des modèles de cette classe d'isomorphisme est la spécialisation au point h de la gerbe de Hurwitz. En particulier, le corps des modules de cette classe d'isomorphisme est le corps résiduel de h [DeDoEm].

Si l'on a en tête des applications arithmétiques plus fines, qui impliquent en particulier les réductions (bonnes ou mauvaises) des revêtements en des premiers, on doit traiter du problème des modules, non plus sur $\mathbb{Q}$, mais sur $\mathbb{Z}$. C'est ce que fait Fulton dans [Fu] pour les revêtements simples, avec comme conséquence l'irréductibilité de l'espace des modules de courbes de genre g. Cette construction a été généralisée par Wewers [We1] pour des revêtements quelconques. On présentera avec un peu plus de détails l'esquisse d'une construction de la gerbe de Hurwitz, ainsi qu'une présentation de cette gerbe utile dans les applications arithmétiques, suivant une méthode proposée par Bertin [Be], méthode qui reprend en les adaptant au contexte des (G-) revêtements la construction des espaces de modules de courbes de [DeMu].

Ces espaces de Hurwitz sur $\mathbb{Z}$ fournissent par exemple une preuve simple d'un théorème de Beckmann : les seuls nombres premiers qui se ramifient dans le corps des modules d'un (G-) revêtement sont les premiers où il y a mauvaise réduction et ceux qui divisent l'ordre du groupe de monodromie. Une étude plus fine de la gerbe de Hurwitz permet de montrer qu'en les premiers v n'appartenant pas à l'ensemble fini de mauvaises places mentionné ci-dessus, le (G-) revêtement a un bon modèle sur l'extension non ramifiée maximale du complété K_v du corps K de rationalité du lieu de branchement en v [Em2]. Si l'on suppose de plus que le corps des modules du (G-) revêtement est $\mathbb{Q}$ par exemple, on en déduit qu'il en existe un bon modèle sur $\mathbb{Q}_p$ [DeHa]. En utilisant certaines familles de revêtements, plutôt que l'espace de Hurwitz lui-même, et un résultat de Moret-Bailly, [DeDoMo-Ba] montre que sous les mêmes hypothèses que précédemment, c'est à dire si le corps des modules du (G-) revêtement est $\mathbb{Q}$ et le nombre premier p n'est pas mauvais, le (G-) revêtement admet un modèle sur le corps $\mathbb{Q}^{tp}$ (les nombres algébriques dont tous les conjugués sont dans $\mathbb{Q}_p$).

Une étape supplémentaire consiste à traiter aussi des revêtements dégénérés, c'est à dire à compléter l'espace de Hurwitz en interprétant son bord [Be], [We1]. On mentionnera comme application le fait qu'une certaine composante irréductible de l'espace de Hurwitz introduite par Fried est définie sur $\mathbb{Q}$. On peut mentionner d'autres applications, dont il ne sera pas question dans ce texte, par exemple l'utilisation du bord de l'espace de Hurwitz pour réaliser certains groupes ([We2]) ou l'étude de la ramification de certains mauvais premiers dans le corps des modules ([EmFl]).

Enfin nous n'avons pas traité des questions concernant la gerbe de Hurwitz en les premiers qui divisent l'ordre du groupe de monodromie et qui ont été l'objet d'un certain nombre de travaux [BeMéz1], [BeMéz2], [GrMa], [HaSt], [He], [Sa2].

2. Espaces des modules grossiers, espace des modules fins

Un espace des modules pour une catégorie $\mathcal{C}$ est *grosso modo* un espace qui paramètre les classes d'isomorphisme d'objets de la catégorie $\mathcal{C}$. Ce paragraphe a pour but de préciser cette notion et de l'appliquer à la catégorie des revêtements algébriques ramifiés de la droite projective $\mathbb{P}^1$.

2.1. Catégorie fibrée au-dessus de la catégorie des schémas. — Les objets auxquels nous aurons affaire sont des objets algébriques relatifs, par exemple des variétés algébriques définies sur un *corps* ou un *anneau*, de façon plus générale des objets algébriques au-dessus d'un *schéma* S. De plus on a une notion de changement de base (par exemple l'extension de scalaires d'un corps k à une extension k' de k). La notion de *catégorie fibrée* introduite par A. Grothendieck [SGA1] formalise cette situation.

Définition 2.1. — Soit $\mathcal{S}$ la catégorie des schémas. Une catégorie fibrée au-dessus de $\mathcal{S}$ est la donnée d'une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur covariant $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) Si, pour tout schéma S l'on note $\mathcal{C}(S) = p^{-1}(S)$ la catégorie des sections au dessus de S (les morphismes de $\mathcal{C}(S)$ sont ceux de $\mathcal{C}$ au-dessus de id_S), à

tout morphisme $f : S' \to S$ dans $\mathcal{S}$ est associé un foncteur covariant *image réciproque* $f^\star : \mathcal{C}(S) \to \mathcal{C}(S')$ et pour tout objet X de $\mathcal{C}(S)$ un morphisme *cartésien* $\alpha_X : f^\star(X) \to X$ au-dessus de f (*i.e.* tel que $p(\alpha_X) = f$).

(2) Le foncteur $f^\star$ vérifie les axiomes suivants : $\mathrm{id}^\star = \mathrm{id}$ et si f et g sont deux morphismes composables dans la catégorie $\mathcal{C}$, $(f \circ g)^\star \simeq g^\star \circ f^\star$ (*i.e.* il existe une équivalence naturelle $c_{f,g}$ de foncteurs entre $(f \circ g)^\star$ et $g^\star \circ f^\star$, ces équivalences naturelles satisfaisant une relation de cocycle pour trois morphismes f, g, h composables [SGA]).

(3) Si S est un schéma, X et Y deux objets de $\mathcal{C}(S)$ et $\lambda : Y \to X$ un morphisme dans $\mathcal{C}(S)$, alors $\lambda \circ \alpha_Y = \alpha_X \circ f^\star(\lambda)$.

Définition 2.2. — Un morphisme entre deux catégories fibrées $\mathcal{C}$ et$\mathcal{D}$ au-dessus de $\mathcal{S}_S$ est un foncteur $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que pour tout objet U de la catégorie de base, f aille de $\mathcal{C}(U)$ dans $\mathcal{D}(U)$, et tel que f « commute » aux changements de bases.

Remarque 2.3

(a) On parlera de catégorie fibrée en groupoïdes lorsque, pour tout S la catégorie $\mathcal{C}(S)$ est un groupoïde, *i.e.* si tous les morphismes sont des isomorphismes. Il est facile de voir que ceci revient au fait que tous les morphismes dans la catégorie $\mathcal{C}$ sont cartésiens.

(b) Dire que le morphisme α_X est cartésien signifie que pour tout objet X'' de $\mathcal{C}(S')$ et tout morphisme $\beta : X'' \to X$ au-dessus de f, il existe un unique morphisme $\widetilde{\beta} : X'' \to f^\star(X)$ au-dessus de $\mathrm{id}_{S'}$ tel que $\alpha_X \circ \widetilde{\beta} = \beta$.

(c) La propriété $(f \circ g)^\star \simeq g^\star \circ f^\star$ énoncée dans (2) est une conséquence du fait que le produit de deux morphismes cartésiens est cartésien.

Exemple 2.4. — La catégorie $\mathcal{S}/\mathcal{S}$ des schémas au-dessus de la catégorie de base des schémas $\mathcal{S}$, est une catégorie fibrée : si $f : S' \to S$ un morphisme de schémas, $f^\star$ est simplement le foncteur qui associe à tout objet $X \to S$ de $\mathcal{S}/\mathcal{S}$ le produit fibré $X \times_S S' \to S'$.

Remarque 2.5. — Dans la définition de catégorie fibrée, au lieu de prendre comme catégorie de base la catégorie des schémas $\mathcal{S}$, on peut pour un schéma S fixé, prendre comme base la catégorie $\mathcal{S}_S$ des schémas au-dessus de S. C'est cette notion un peu plus générale qui apparaîtra le plus souvent dans la suite ; S sera par exemple $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$, auquel cas la catégorie de base est celle des schémas sur un corps de caractéristique 0, ou bien $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T^{-1}])$, où T est un ensemble fini de nombres premiers. Lorsque l'on prend $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, on retrouve le cas particulier introduit d'abord.

2.2. Espace des modules fins. — La notion d'espace des modules fins est la plus forte. Soit comme précédemment $\mathcal{C}$ une catégorie fibrée au-dessus de la catégorie $\mathcal{S}_S$.

Définition 2.6. — Un espace des modules fins pour la catégorie $\mathcal{C}$ est un objet $X_0 \to M$ de $\mathcal{C}$ (où M est un objet de $\mathcal{S}_S$), universel au sens suivant :

pour tout objet $X \to T$ de $\mathcal{C}$ (où T est un objet de $\mathcal{S}_S$), il existe un unique morphisme f de T dans M et un unique morphisme cartésien $\alpha : X \to X_0$ au-dessus de f.

Autrement dit X_0 est une famille universelle d'espace de paramètres M : toute famille, provient, de façon unique, par image réciproque de la famille universelle.

Une conséquence immédiate de l'existence d'un espace des modules fins est que les objets de $\mathcal{C}$ ne peuvent avoir d'automorphisme non trivial. Très souvent dans la pratique, les catégories considérées ne vérifient pas cette hypothèse, et pour cette raison déjà, n'admettent pas d'espace des modules fins. Pour pallier cette difficulté, une méthode consistera à rigidifier la situation, c'est à dire à remplacer les objets de la catégorie $\mathcal{C}$, par des objets comportant des données supplémentaires, qui ne sont pas respectées par les automorphismes non triviaux.

2.3. Champs. — *Grosso modo*, un *champ* est une catégorie fibrée en groupoïdes, qui est un faisceau. Pour parler de faisceau, on a besoin que la catégorie base (catégorie des schémas ou des schémas au dessus d'un schéma donné S) soit munie d'une topologie (au sens de Grothendieck). Ce sera en général la topologie étale ou la topologie fpqc. On peut alors énoncer la définition suivante :

Définition 2.7. — Un champ est une catégorie fibrée en groupoïdes $\mathcal{C}$ au-dessus de $\mathcal{S}_S$, vérifiant les deux propriétés supplémentaires suivantes :

(i) Pour tout objet $U \to S$ de $\mathcal{S}_S$, et tout couple d'objets η et ξ de $\mathcal{C}(U)$, $\mathrm{Hom}_U(\eta, \xi)$ est un faisceau.

(ii) Dans la catégorie $\mathcal{C}$ *toute donnée de descente est effective*.

La deuxième condition est l'analogue de la condition de faisceau pour les objets. La donnée d'un objet global de $\mathcal{C}(U)$ est équivalente à une famille de donnée locales, *i.e.* d'objets ξ_i de $\mathcal{C}(U_i)$, où $(U_i)_{i\in I}$ est un raffinement de U, pourvus d'isomorphismes $f_{j,i} : \xi_{i l U_i \cap U_j} \to \xi_{j\, l U_i \cap U_j}$ assujettis aux conditions $f_{k,i} = f_{k,j} \circ f_{j,i}$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$. Pour plus de détails sur cette notion, voir l'exposé de J.-C. Douai dans ce volume [Do]. Le lecteur désireux d'approfondir la question pourra se reporter à [LaMo-Ba] et à [Vi].

Un *isomorphisme* entre deux champs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est un morphisme de catégories fibrées, qui réalise pour tout objet U de la base une équivalence de catégories entre $\mathcal{C}(U)$ et $\mathcal{D}(U)$.

Exemple 2.8. — Un schéma $\varphi : T \to S$ peut être considéré comme un champ particulier (à savoir $\mathcal{S}_T$, que l'on notera aussi simplement T) au-dessus de $\mathcal{S}_S$. Le foncteur de $\mathcal{S}_T \to \mathcal{S}_S$ est la composition à gauche par φ. Un morphisme de champs $T \to \mathcal{C}$ est alors simplement la donnée d'un objet de $\mathcal{C}(T)$.

Définition 2.9. — Un champ $\mathcal{C}$ est dit *représentable* s'il existe un schéma M et un morphisme $M \to \mathcal{C}$ qui est un isomorphisme de champs.

Le morphisme $M \to \mathcal{C}$ est la donnée d'un objet ξ de $\mathcal{C}(M)$, et le fait que le morphisme est un isomorphisme se traduit simplement par le caractère *universel* de cet objet : pour tout objet η de $\mathcal{C}$ au-dessus d'un schéma $T \to S$, il existe un unique morphisme $f : T \to M$ et un unique isomorphisme cartésien $\alpha : \eta \to \xi$ au-dessus de f. Autrement dit tout objet η de $\mathcal{C}$ au-dessus d'un schéma $T \to S$ provient de façon unique de l'objet universel ξ. On retrouve ainsi, dans le langage des champs, la notion d'*espace des modules fins* introduite dans la section précédente.

***Exemple 2.10* (Champ quotient).** — Soit $G \to S$ un schéma en groupe fini et $Y \to S$ un schéma sur lequel G agit sans point fixe. Le champ quotient $[Y/G]$ est défini de la façon suivante : ses objets au-dessus de $T \to S$ sont les G-torseurs $X \to T$ munis d'un morphisme G-équivariant $\varphi : X \to Y$ tels que le carré

$$\begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \to & S \end{array}$$

soit commutatif.

Le champ $[Y/G]$ est représentable par un schéma Z si Y est un espace principal homogène sous G sur Z, ce qui revient à dire que le quotient Y/G existe comme schéma.

Exemple 2.11

(a) *Courbes de genre* 0 *r-pointées.* Soit r un entier supérieur ou égal à 3. La catégorie $\mathcal{M}_{0,r}$ a pour objets au-dessus de $T \to S$ les courbes projectives lisses $X \to T$ de genre 0 munies de sections $s_i : T \to X$ vérifiant

$$\forall\, t \in T \quad \forall\, i, j \quad i \neq j \quad s_i(t) \cap s_j(t) = \varnothing$$

Les morphismes sont les morphismes entre courbes compatibles avec les sections.

(b) *Droites projectives r-pointées.* Soit r un entier supérieur ou égal à 3. Considérons la catégorie $\mathcal{U}^r$ dont les objets au-dessus de $T \to S$ sont les courbes projectives lisses $X \to T$ de genre 0 munies d'un isomorphisme $X \simeq \mathbb{P}^1_T$ et de sections $s_i : T \to X$ vérifiant

$$\forall\, t \in T \quad \forall\, i, j \quad i \neq j \quad s_i(t) \cap s_j(t) = \varnothing.$$

C'est un champ qui est représenté par le schéma ${U^r}_S = ((\mathbb{P}^1)^r - \Delta_r)_S$, où Δ_r est le sous-schéma fermé des r-uplets pour lesquels deux coordonnées sont égales, l'objet universel étant $(U^{r+1})_S \to (U^r)_S$ (oubli de la dernière section).

(c) *Droites projectives r-marquées.* On considère maintenant la catégorie $\mathcal{U}_r$ dont les objets au-dessus de $T \to S$ sont les courbes projectives lisses $X \to T$ de genre 0 munies d'un isomorphisme $X \simeq \mathbb{P}^1_T$ et d'un diviseur de Cartier relatif de degré r (les points marqués, contrairement à l'exemple précédent, ne sont plus ordonnés). Un candidat naturel pour représenter ce champ est la quotient U^r/S_r de U^r par le groupe symétrique S_r, muni de l'objet $U'_{r+1} \to U_r$, où U'_{r+1} est le quotient de U_{r+1} par S_r

agissant sur les r premières coordonnées. Mais il existe des configurations de r points distincts dans $\mathbb{P}^1$ qui sont globalement invariantes par des automorphismes non triviaux de $\mathbb{P}^1$; autrement dit certains objets de cette catégorie ont des automorphismes non triviaux, et pour cette raison, il n'existe pas d'espace des modules fins pour $\mathcal{U}_r$.

(d) *Courbes de genre g.* La catégorie $\mathcal{M}_g$ des courbes lisses $Y \to T$ de genre g est un champ. Ici encore l'existence d'automorphismes non triviaux est une obstruction à l'existence d'un espace des modules fins.

(e) *Courbes de genre g plongées tricanoniquement.* Une façon de pallier la difficulté précédente est de rigidifier les objets considérés. On pourra ajouter à la donnée d'une courbe lisse de genre g, celle d'un certain plongement dans un $\mathbb{P}^N$, qui aura la vertu que les automorphismes de la courbe ainsi plongée s'interpréteront comme les restrictions à la courbe d'automorphismes de $\mathbb{P}^N$. Le seul automorphisme de la courbe respectant le plongement est l'identité. Ainsi rigidifié, le champ des courbes lisses de genre $g \geqslant 2$ tricanoniquement plongées est représentable par un schéma de Hilbert H_r [DelMum].

2.4. Espace des modules grossiers. — Si un champ $\mathcal{C}$ est représentable par un schéma M, les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{C}(T)$ sont en correspondance bijective avec les morphismes de T vers M. Si l'on prend en particulier $T = \mathrm{Spec}(K)$, où K est un corps algébriquement clos, on a une correspondance bijective entre les points géométriques de M rationnels sur K et les classes d'isomorphismes d'objets de $\mathcal{C}$ définis sur K. L'idée que les points de M paramètrent les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{C}$ est au centre de la notion d'espace des modules. Elle sera conservée dans la notion plus faible, d'espace des modules grossiers, qui est l'objet de la présente section.

Définition 2.12. — Un espace des modules grossiers pour le S-champ $\mathcal{C}$ est un S-schéma M muni d'un morphisme $f : \mathcal{C} \to M$ de S-champs vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Tout morphisme $f' : \mathcal{C} \to M'$ de S-champs, où M' est un S-schéma se factorise uniquement sous la forme $g \circ f$, où g est un morphisme de S- schémas de M dans M'.

(ii) Si K est un corps algébriquement clos, l'application naturelle déduite de f qui va de l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{C}$ définis sur K vers $M(K)$ est une bijection.

Lorsque le champ $\mathcal{C}$ est représentable par un schéma M, tout objet ξ de $\mathcal{C}$ défini sur un corps est définissable sur le corps résiduel du point de M correspondant, et c'est le plus petit corps de définition de l'objet ξ. Ce n'est plus le cas lorsque $\mathcal{C}$ n'a qu'un espace des modules grossiers. Il n'y a pas en général de plus petit corps de définition pour les objets de $\mathcal{C}$. La notion qui intervient naturellement est celle de *corps de modules*, qui est candidat à être corps de définition, et qui, s'il est corps de définition, est le plus petit corps de définition.

Définition 2.13. — Soit K un corps et L une extension galoisienne de K. On pose $T = \mathrm{Spec}(L)$. Soit ξ un T-objet de $\mathcal{C}$. Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, notons ${}^{\sigma}\xi$ le conjugué de ξ par σ (c'est à dire l'image réciproque de l'objet ξ par le morphisme $\widehat{\sigma} : \mathrm{Spec}(L) \to \mathrm{Spec}(L)$ correspondant à σ). Soit H l'ensemble des σ pour lesquels les objets ξ et ${}^{\sigma}\xi$ sont isomorphes sur L. Alors H est un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(L/K)$ et on appelle *corps des modules* de ξ relatif à l'extension L/K le sous-corps L^H de $\overline{K}$ fixé par H.

Proposition 2.14. — *Soit K un corps et L/K une extension galoisienne. Si ξ est un objet de $\mathcal{C}(\mathrm{Spec}(L))$ auquel correspond le point $x : \mathrm{Spec}(L) \to M$, alors à l'objet ${}^{\sigma}\xi$ correspond le point $x \circ \widehat{\sigma}$. De plus, si K est parfait le corps des modules de l'objet ξ relativement à l'extension $\overline{K}/K$ est le corps résiduel du point $x \in M(\overline{K})$.*

Démonstration. — C'est une conséquence de la fonctorialité des applications $x = f(\xi)$. Comme ${}^{\sigma}\xi$ est l'image réciproque de ξ par $\widehat{\sigma} : \mathrm{Spec}\,\overline{K} \to \mathrm{Spec}\,\overline{K}$, $f({}^{\sigma}\xi) = f(\xi) \circ \widehat{\sigma}$. Par ailleurs d'après le point (ii) de la définition précédente, ξ et ${}^{\sigma}\xi$ sont isomorphes si et seulement si leurs images par f dans $M(\overline{K})$ sont égales, c'est à dire si et seulement si $x = x \circ \widehat{\sigma}$, *i.e.* le point x est défini sur $\overline{K}^{\langle\sigma\rangle}$. $\square$

Exemple 2.15. — Le champ des courbes lisses de genre g n'admet pas, comme nous l'avons vu, d'espace des modules fins. Mais il admet un espace des modules grossiers M_g ([DelMum], [Mum]).

2.5. Champs algébriques. — On a vu dans la section précédente que les schémas pouvaient être considérés comme des cas particuliers de champs. De même le quotient d'un schéma par un groupe agissant sur ce schéma. Ce sont des exemples typiques de champs *algébriques*. Pour la définition générale de la notion de champs algébriques, nous renvoyons à l'exposé de J.-C. Douai dans ce même volume et au livre de Laumon et Moret-Bailly sur la théorie des champs [LaMo-Ba]. Contentons nous de dire que les champs dont nous nous occuperons ici, champ de Hurwitz et champ des modèles sont des champs algébriques, dont nous esquisserons une présentation dans le paragraphe 5.

3. Champ de Hurwitz ouvert

3.1. La catégorie des (G-) revêtements de la droite projective. — On se donne un schéma de base S irréductible et régulier de corps des fonctions k (par exemple S sera $\mathrm{Spec}(A)$ (où A est un anneau régulier), un corps ou un localisé de $\mathbb{Z}$). Passons en revue quelques définitions de base.

Définition 3.1. — Un S-revêtement algébrique de la droite projective $\mathbb{P}^1_S$ sur S est un S-morphisme fini et plat $f : Y \to \mathbb{P}^1$, où Y est un S-schéma réduit et normal de dimension 1, et tel que l'extension associée $k(Y)/k(t)$ soit séparable.

Définition 3.2. — Un morphisme $\varphi : Y \to Z$ est un morphisme du revêtement $f : Y \to \mathbb{P}^1$ vers le revêtement $g : Z \to \mathbb{P}^1$ si $g \circ \varphi = f$.

Remarque 3.3. — Il arrivera souvent que S ne soit pas mentionné, parce que le schéma de base est clair d'après le contexte. Ce sera le cas par exemple lorsque $S = \operatorname{Spec}\mathbb{C}$, où l'on parlera de revêtements définis sur $\mathbb{C}$.

Un certain nombre d'invariants sont attachés à un revêtement.

Le *degré du revêtement* f est le degré d de l'extension $k(Y)/k(t)$.

Si y est un point de Y d'image x, l'anneau local $O_{Y,y}$ de Y en y est une extension de l'anneau local $O_{\mathbb{P}_1,x}$ de $\mathbb{P}_1$ en x. Le point y sera dit *non ramifié* si $\mathfrak{M}_x O_{Y,y} = \mathfrak{M}_y$, où $\mathfrak{M}_x$ et $\mathfrak{M}_y$ désignent respectivement les idéaux maximaux de ces anneaux locaux, et si l'extension des corps résiduels est séparable. En dehors des points de ramification, le morphisme f est *étale*. Le *théorème de pureté* de Nagata-Zariski [SGA1], assure que le revêtement n'est ramifié qu'en des points de codimension 1.

Les points images des points de ramification sont les *points de branchement*. On définit ainsi le *lieu de branchement*; c'est le support de l'idéal engendré par le discriminant $\delta(f)$ de f (*cf.* [Fu]). *On demande que $\delta(f)$ soit un diviseur de Cartier relatif.* Soit η le point générique de S, le cardinal r du lieu de branchement du revêtement $Y_\eta \to \mathbb{P}^1{}_\eta$ est le *nombre de points de branchement*.

Soit a un point de codimension 1 appartenant au lieu de branchement, et b un point de codimension 1 de Y dans la fibre de a. Les complétés des anneaux locaux de $\mathbb{P}^1$ et Y en a et b sont des anneaux de valuation discrète ; si v et w sont les valuations correspondantes, et π une uniformisante locale de l'anneau local de $\mathbb{P}^1$ en a, $w(\pi) = ev(\pi)$. L'entier e ainsi défini est l' *indice de ramification* de b. Le point b est ramifié si et seulement si cet indice est plus grand que 1.

Soient $\{a_1, \dots, a_r\}$ les r points de branchement de $Y_\eta \to \mathbb{P}^1{}_\eta$, et soit Y_0 le complémentaire dans Y_η des points de ramification, le revêtement $Y_0 \to \mathbb{P}^1{}_\eta - \{a_1, \dots, a_r\}$ est un revêtement étale. Il lui correspond, d'après la théorie du groupe fondamental de Grothendieck, pour tout choix d'un point base x_0 distinct des points de branchement, un morphisme de groupes

$$\pi_1(\mathbb{P}^1{}_\eta - \{a_1, \dots, a_r\}, x_0) \longrightarrow S_d,$$

où S_d désigne le groupe symétrique et d le degré du revêtement, la fibre du point géométrique x_0 étant identifiée avec $\{1, \dots, d\}$ ([SGA], [Méz]). Le *groupe de monodromie* G du revêtement est par définition l'image de ce morphisme (défini à conjugaison près dans S_d). Dans le cas où le corps des fractions de S est le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, on retrouve la théorie classique du groupe fondamental topologique, le groupe $\pi_1(\mathbb{P}^1{}_\mathbb{C} - \{a_1, \dots, a_r\}, x_0)$ étant le complété profini du groupe fondamental topologique de $\mathbb{P}^1{}_\mathbb{C} - \{a_1, \dots, a_r\}$, soit le groupe profini libre à $r-1$ générateurs.

Le revêtement $Y_0 \to \mathbb{P}^1{}_\eta - \{a_1, \dots, a_r\}$ est connexe si le groupe de monodromie est transitif. Les éléments du groupe $\operatorname{Aut}(Y/\mathbb{P}^1)$ commutent avec les éléments du groupe de monodromie dans leur action sur la fibre de x_0. Lorsque Y est connexe, le groupe $\operatorname{Aut}(Y/\mathbb{P}^1)$ agit simplement sur la fibre de x_0. Lorsque cette action est de plus transitive, on dit que le revêtement est *galoisien.* Il revient au même de dire que l'extension de corps des fonctions $k(Y_0)/k(t)$ est galoisienne et l'on a alors un anti-isomorphisme naturel entre $\mathrm{Aut}(Y/\mathbb{P}^1)$ et $\mathrm{Gal}(k(Y_0)/k(t))$. Par ailleurs, pour tout choix d'un point dans la fibre géométrique de x_0, on a un anti-isomorphisme entre le groupe de monodromie G et $\mathrm{Aut}(Y/\mathbb{P}^1)$, et donc un isomorphisme entre G et $\mathrm{Gal}(k(Y_0)/k(t))$. Toujours dans le cas galoisien, si b est un point de codimension 1 de Y et a son image dans $\mathbb{P}^1$, on peut définir le groupe d'inertie $I_{b/a}$ comme le sous-groupe du groupe $\mathrm{Aut}(Y/\mathbb{P}^1)$ des éléments qui fixent la valuation associée à b et qui induisent l'identité sur le corps résiduel (d'après les remarques précédentes, $I_{b/a}$ peut être aussi bien vu comme un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(k(Y_0)/k(t))$). Le cardinal du groupe d'inertie est égal à l'indice de ramification $e_{b/a}$ introduit précédemment.

On dira que le revêtement est *modéré* si pour tout point b de codimension 1 d'image a, l'indice de ramification $e_{b/a}$ est premier à la caractéristique résiduelle, et si l'extension correspondante des corps résiduels est séparable. Si le revêtement est galoisien et si d'une part l'ordre du groupe de monodromie n'est divisible par aucune caractéristique résiduelle et d'autre part tous les corps résiduels de S sont parfaits, le revêtement est modéré.

Soit G un groupe fixé. Un *G-revêtement* est la donnée d'un revêtement galoisien de groupe de Galois isomorphe à G et les morphismes entre G-revêtements sont les morphismes de revêtements qui respectent ces isomorphismes donnés.

Le terme (G-) revêtement sera utilisé dans la suite pour désigner indifféremment un revêtement ou un G-revêtement, pour donner des énoncés unifiés valables pour les deux catégories.

3.2. Théorème de spécialisation. — Au cours d'une déformation, les notions que nous avons introduites dans la section précédente (degré, nombre de points de branchement, groupe de monodromie) sont des invariants.

Définition 3.4. — Soit $Y_0 \to \mathbb{P}^1{}_k$ un (G-) revêtement connexe de degré d défini sur un corps k. Une déformation de ce (G-) revêtement est la donnée d'un schéma S muni d'un point s_0 de corps résiduel isomorphe à k et d'un (G-) revêtement $Y \to \mathbb{P}^1{}_S$ de degré d, ramifié le long d'un diviseur D de degré r lisse sur S, ainsi que d'un isomorphisme de (G-) revêtements entre $Y_{s_0} \to \mathbb{P}^1{}_k$ et $Y_0 \to \mathbb{P}^1{}_k$.

Un morphisme entre deux S-déformations $Y \to \mathbb{P}^1{}_S$ et $Y' \to \mathbb{P}^1{}_S$ est un morphisme de (G-) revêtements compatible avec les isomorphismes entre $Y_{s_0} \to \mathbb{P}^1{}_k$ et $Y_0 \to \mathbb{P}^1{}_k$ d'une part et $Y'_{s_0} \to \mathbb{P}^1{}_k$ et $Y_0 \to \mathbb{P}^1{}_k$ d'autre part.

Le théorème de spécialisation de Grothendieck [Ra], [Fu], [Em2] a pour conséquence que, quitte à faire certaines restrictions sur les revêtements que l'on considère, il n'y a, à isomorphisme près, qu'une déformation possible. On ne donne ici qu'une version restreinte adaptée aux hypothèses que l'on fera dans la suite (l'ordre du groupe de monodromie n'est pas divisible par les caractéristiques résiduelles).

Théorème 3.5. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme propre, séparable, à fibres géométriquement connexes. Soit D un diviseur relatif lisse sur S. Soient s_0 et s_1 deux points de S tels que s_0 soit une spécialisation de s_1 (*i.e. *s_0 appartient à l'adhérence de Zariski de s_1) ; soient X_0 et X_1 les fibres géométriques de X et D_0 et D_1 celles de D au-dessus de s_0 et s_1, et a_0 et a_1 des points géométriques de $X_0 - D_0$ et $X_1 - D_1$. Désignons par π'_1 le groupe paramétrant les revêtements tels que l'ordre du groupe de monodromie n'est divisible par aucune caractéristique résiduelle. Il existe alors un morphisme de spécialisation (défini à conjugaison près) $\pi'_1(X_1 - D_1, a_1) \to \pi_1(X_0 - D_0, a_0)$, qui est un isomorphisme.*

On applique ce théorème à la situation suivante : $X = \mathbb{P}^1{}_S$ et $Y \to X$ est une déformation ramifiée le long du diviseur D du (G-) revêtement $Y_0 \to \mathbb{P}^1{}_k$, lequel est ramifié le long du diviseur D_0, spécialisation de D en s_0 (par exemple S est le spectre d'une anneau de valuation discrète de point générique s_1 et point spécial s_0). Alors la fibre générique géométrique du revêtement $Y \to X$ est donnée par le morphisme $\pi'_1(X_1 - D_1, a_1) \to S_d$, qui se déduit via l'isomorphisme $\pi'_1(X_1 - D_1, a_1) \simeq \pi'_1(X_0 - D_0, a_0)$ du morphisme $\pi'_1(X_0 - D_0, a_0) \to S_d$ décrivant le revêtement initial. La déformation est donc déterminée (à isomorphisme près) par le revêtement initial.

Le théorème de spécialisation va nous permettre de définir un autre invariant, à savoir les classes de conjugaison de *générateurs distingués* de l'inertie.

Pour cela nous avons besoin d'un système de générateurs privilégié du groupe $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{a_1, \ldots, a_r\})$, que nous appellerons un *bouquet*. Commençons par le cas des (G-) revêtements de $\mathbb{P}^1{}_{\mathbb{C}}$. On peut choisir un système de générateurs $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ du groupe $\pi_1(\mathbb{P}^1{}_{\mathbb{C}} - \{a_1, \ldots, a_r\})$ avec la seule relation $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_r = 1$, le lacet γ_i étant dans la classe de conjugaison des lacets tournant une fois dans le sens trigonométrique autour de a_i. Un tel système est appelé un *bouquet*.

Soit S un schéma irréductible de point générique η et s_0 un point de S de corps résiduel k. On suppose ici que le corps des fonctions de S est de caractéristique 0. Soit D un diviseur de $\mathbb{P}^1{}_S$ lisse sur S et $Y \to \mathbb{P}^1{}_S$ un (G-) revêtement dont l'ordre du groupe de monodromie n'est divisible par aucune caractéristique résiduelle de S, (automatiquement modérément) ramifié le long de D. Pour tout point s de S, on note $D_s = \{a_1^s, \ldots, a_r^s\}$ la fibre en s de D. Soit a_η et a_{s_0} des points géométriques de $\mathbb{P}^1{}_\eta - \{a_1^\eta, \ldots, a_r^\eta\}$ et $\mathbb{P}^1{}_{s_0} - \{a_1^{s_0}, \ldots, a_r^{s_0}\}$ respectivement. Le théorème de spécialisation donne un isomorphisme, défini à conjugaison près $\pi_1(\mathbb{P}^1{}_\eta - \{a_1^\eta, \ldots, a_r^\eta\}, a_\eta) \simeq \pi_1(\mathbb{P}^1{}_{s_0} - \{a_1^{s_0}, \ldots, a_r^{s_0}\}, a_{s_0})$.

Par ailleurs, si l'on choisit un plongement de la clôture algébrique $\overline{k(\eta)}$ dans $\mathbb{C}$, on a un isomorphisme $\pi_1(\mathbb{P}^1{}_\eta - \{a_1^\eta, \ldots, a_r^\eta\}, a_\eta) \simeq \pi_1(\mathbb{P}^1{}_{\mathbb{C}} - \{a_1^{\mathbb{C}}, \ldots, a_r^{\mathbb{C}}\}, a_{\mathbb{C}})$. On peut donc, un bouquet $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ étant choisi comme générateurs de $\pi_1(\mathbb{P}^1{}_{\mathbb{C}} - \{a_1^{\mathbb{C}}, \ldots, a_r^{\mathbb{C}}\}, a_{\mathbb{C}})$, considérer les images par ces isomorphismes des lacets du bouquet, et l'on obtient ainsi une famille de *générateurs distingués* $\{{\gamma_1}^{s_0}, \ldots, {\gamma_r}^{s_0}\}$ de $\pi_1(\mathbb{P}^1{}_{s_0} - \{a_1^{s_0}, \ldots, a_r^{s_0}\}, a_{s_0})$ pour toute les spécialisations s_0, définie à conjugaison près. Les images $\{g_1, \ldots, g_r\}$ dans le groupe de monodromie G sont les *générateurs distingués* de l'inertie. Dans le cas galoisien ils engendrent les groupes d'inertie au dessus des différents points de branchement. Posons C_i la classe de conjugaison de g_i dans G. La discussion précédente montre la propriété suivante.

Proposition 3.6. — *L'ensemble $\underline{C} = \{C_1, \ldots, C_r\}$ est un invariant du (G-) revêtement au cours d'une déformation au-dessus d'un schéma S connexe.*

En résumé, le degré d, le nombre r de points de branchement, le groupe de monodromie G muni de sa représentation $G \subset S_d$, les classes de conjugaison $\{C_1, \ldots, \mathbb{C}_r\}$ de générateurs distingués de l'inertie sont des invariants d'un (G-) revêtement au cours d'une déformation. Il en est de même du genre de la courbe calculé à l'aide de la formule de Riemann-Hurwitz. Cela justifie que dans la suite nous restreignons la catégorie considérée à celle des (G-) revêtements d'invariants fixés.

Soit d, $r \geqslant 3$ des entiers, G un groupe fini muni d'une représentation $G \subset S_d$. On se donne un schéma de base S dont les degrés résiduels ne divisent pas l'ordre de G. Nous noterons $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) la catégorie des S-revêtements (resp. S-G-revêtements) de $\mathbb{P}^1$ d'invariants $\{d, r, G \subset S_d, \boldsymbol{C}\}$. La droite $\mathbb{P}^1$ munie du diviseur de branchement d'un tel revêtement est une droite projective r-marquée. Si l'on se donne en plus un ordre sur les points de branchement, on obtient une droite projective r-pointée. La catégorie des S-revêtements (resp. S-G-revêtements) de $\mathbb{P}^1$ d'invariants $\{d, r, G \subset S_d, \boldsymbol{C}\}$ avec lieu de branchement ordonné sera notée $\mathcal{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$).

Théorème 3.7. — *Les catégories $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) et $\mathcal{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) sont des champs algébriques.*

La propriété essentielle à vérifier pour s'assurer qu'il s'agit d'un champ, est la propriété de « faisceau » pour les objets, c'est à dire le fait que toute donnée de descente est effective. Cette propriété pour les revêtements est une conséquence facile de la propriété correspondante pour les schémas, à savoir le fait qu'un morphisme de schémas $T \to S$ fidèlement plat quasi compact est un morphisme de descente stricte [Gr]. Pour plus de détails voir [Do] dans ce volume, ainsi que [DeDoEm] et [We].

Pour montrer que c'est un champ algébrique, une méthode consiste à revêtir la catégorie considérée par une catégorie dont les objets sont plus rigides, et qui admet, elle un espace des modules fins. Cet espace des modules fins fournira une présentation algébrique du champ. Par exemple dans le cas des G-revêtements, de groupe de monodromie G, le groupe des automorphismes s'identifie au centre $Z(G)$ du groupe G. Comme nous l'avons vu, si $Z(G)$ est non trivial, la catégorie ne peut admettre d'espace des modules fins. Mais tout groupe fini G peut être vu comme le quotient d'un groupe fini $\widetilde{G}$ de centre trivial [FrVö]. La catégorie $\mathcal{H}_{\widetilde{G}}(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$ admet un espace des modules fins $H_{\widetilde{G}}(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}} \to \mathcal{H}_{\widetilde{G}}(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$, qui donne une présentation $H_{\widetilde{G}}(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}} \to \mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$

[Fr1], [FrVö]. Une autre façon de rigidifier la catégorie est de considérer des (G-) revêtements pointés, ce qui n'autorise que les automorphismes triviaux [CoHa], [Em]. (Dans tous ces articles la question n'est traitée que sur un corps de caractéristique 0)

W. Fulton a développé une autre approche [Fu]. Il construit des espaces de Hurwitz sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, en vue de montrer l'irréductibilité de l'espace des modules M_g des courbes de genre g. Les revêtements considérés dans [Fu] sont des revêtements *simples*, *i.e.* admettant un seul point de ramification au-dessus de chaque point de branchement avec un indice de ramification 2 ; de tels revêtements de degré d ont pour groupe de monodromie S_d et n'ont pas d'automorphisme non trivial ; pour d et r fixés, ils admettent un espace des modules fins sur $\mathbb{Z}$. Récemment S. Wewers a repris cette construction dans le cas général [We1], en proposant de plus une compactification naturelle des espaces de Hurwitz.

C'est aussi dans la perspective d'une compactification des espaces de Hurwitz que J. Bertin a proposé une autre méthode encore [Be]. Un (G-)revêtement $Y \to \mathbb{P}^1$ est considéré comme une courbe Y munie d'une action du groupe fini G. Bertin développe une version G- équivariante de la théorie des modules de Deligne-Mumford [DeMu] pour les courbes de genre g. Nous y reviendrons au paragraphe 5 à propos de la compactification des espaces de Hurwitz. Une compactification des espaces de Hurwitz est aussi expliquée (dans le langage des champs) dans [Ek].

3.3. Espaces de Hurwitz. — En fait les catégories introduites à la section précédente, dont on a vu qu'elles sont des champs algébriques, admettent des schémas de modules grossiers, appelé *espaces de Hurwitz*, au-dessus desquels elles apparaissent comme des *gerbes* (de façon générale, un champ admet un espace des modules grossiers, qui est un espace algébrique [Ke-Mo] ; ici ces espaces de Hurwitz sont des schémas). Remarquons d'abord que nous avons un foncteur naturel de catégories fibrées « points de branchement » $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{U}_r$ (resp. $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}} \to \mathcal{U}_r$) et $\mathcal{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{U}^r$ (resp. $\mathcal{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}} \to \mathcal{U}^r$) qui à un ($G$-) revêtement (éventuellement avec points de branchement ordonnés) associe son lieu de branchement (éventuellement ordonné). Dans l'énoncé suivant, S désigne toujours un schéma dont les caractéristiques résiduelles ne divisent pas l'ordre de G (par exemple $\mathbb{Z}[1/|G|]$).

Théorème 3.8

(1) *Les catégories $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) et $\mathcal{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) admettent des espaces des modules grossiers $H_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $H_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) et $H'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $H'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) appelés espaces de Hurwitz.*

(2) *Ces espaces sont munis de morphismes $H_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}} \to U_r$ (resp. $H_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}} \to U_r$) et $H'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}} \to U^r$ (resp. $H'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}} \to U^r$) qui correspondent aux foncteurs « points de branchement », qui en font des revêtements finis étales de U_r (ou U^r suivant le cas) au-dessus de S.*

(3) *Les catégories $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) et $\mathcal{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) sont des gerbes au-dessus des espaces de Hurwitz au sens de la topologie étale.*

Le dernier point mérite une explication. Une *gerbe* au-dessus du schéma M (pour la topologie étale) est un champ $\mathcal{C}$ au-dessus de M, qui vérifie de plus les deux propriétés suivantes :

(i) Deux objets ξ et η de $\mathcal{C}$ au-dessus de $T \to M$ sont localement isomorphes, *i.e.* il existe un raffinement étale $(T_i \to T)$ au-dessus de M et des isomorphismes $\xi_{|T_i} \simeq \eta_{|T_i}$.

(ii) Les fibres sont localement non vides, *i.e.* étant donné $T \to M$, il existe un raffinement étale $(T_i \to T)$ au-dessus de M tel que $\mathcal{C}(T_i)$ n'est pas vide.

Le théorème précédent est contenu dans [Fu] pour le cas particulier des revêtements simples. Sa généralisation est due à [We1]. Les points (1) et (2) (la construction des espaces de Hurwitz) ont fait l'objet de nombreux travaux, dans le cas où $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}$; le premier en date étant [Fr]. On peut encore citer [CoHa], [FrVö], [Em].

Le point (3) est l'objet de [DeDoEm] dans le cas où $S = \operatorname{Spec}(\mathbb{Q})$. Voir aussi [We1]. Nous appellerons *gerbe de Hurwitz* la gerbe $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) et $\mathcal{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) au-dessus de l'espace de Hurwitz. Si $T \to H$ est un schéma, les objets de $\mathcal{H}(T)$ seront appelées *familles de Hurwitz* d'espace de paramètre T (on note pour simplifier $\mathcal{H}$ l'une des catégories $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) et $\mathcal{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) et H l'espace de Hurwitz correspondant). Bien qu'il n'existe pas en général de famille de Hurwitz sur tout l'espace de Hurwitz, le (3) du théorème affirme qu'il en existe toujours localement pour la topologie étale, et que, de plus, deux telles familles sont toujours localement isomorphes.

Lorsque $T = \operatorname{Spec}(K)$, où K est un corps algébriquement clos dont la caractéristique résiduelle ne divise pas l'ordre de G, les objets de $\mathcal{H}(T)$ sont simplement les (G-) revêtements de la catégorie considérée définis sur le corps K. Comme il a été dit dans la définition d'un espace des modules grossiers, les classes d'isomorphismes de tels objets sont en correspondance bijective avec les points K-rationnels de H. Si K n'est pas algébriquement clos, ce n'est plus le cas. A un point $x \in H(K)$ ne correspond pas nécessairement un (G-) revêtement défini sur K. Mais il en existe sur une extension finie de K. Autrement dit le corps des modules du (G-) revêtement qui est comme on l'a vu le corps résiduel du point correspondant de l'espace des modules H (Proposition 2.14), n'est pas en général un corps de définition (mais une extension finie de ce corps des modules est un corps de définition).

La question du corps de rationalité de points de l'espace de Hurwitz pose celle du corps de définition de l'espace de Hurwitz lui-même. Pour en traiter, nous devons dire un mot de l'action galoisienne sur $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{a_1, \ldots, a_r\})$.

3.4. Action galoisienne sur le groupe fondamental. — Soit k un corps parfait et $\{a_1, \ldots, a_r\}$ un diviseur de ${\mathbb{P}^1}_k$ rationnel sur k. Notons comme précédemment π'_1 le quotient du groupe fondamental paramétrant les revêtements dont l'ordre du groupe de monodromie géométrique est premier à la caractéristique résiduelle de k.

Théorème 3.9. — *On a une suite exacte de groupes fondamentaux*

$$1 \to \pi'_1({\mathbb{P}^1}_{\overline{k}} - \{a_1, \ldots, a_r\}) \to \pi'_1({\mathbb{P}^1}_k - \{a_1, \ldots, a_r\}) \to \operatorname{Gal}(\overline{k}/k) \to 1.$$

De cette suite exacte, on déduit une action extérieure de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur le groupe $\pi_1'(\mathbb{P}^1{}_{\overline{k}} - \{a_1, \ldots, a_r\})$ (si $\gamma \in \pi_1'(\mathbb{P}^1{}_{\overline{k}} - \{a_1, \ldots, a_r\})$ et $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, on notera ${}^{\sigma}\gamma$ l'image (définie à conjugaison près) de γ par l'action extérieure de σ). Son interprétation est la suivante. Si $\varphi : \pi_1'(\mathbb{P}^1{}_{\overline{k}} - \{a_1, \ldots, a_r\}) \to G \subset S_d$ est la représentation de monodromie du (G-) revêtement $f : Y \to \mathbb{P}^1{}_{\overline{k}}$ défini sur $\overline{k}$, et si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, la représentation de monodromie associée au revêtement ${}^{\sigma}f : {}^{\sigma}Y \to \mathbb{P}^1{}_{\overline{k}}$ conjugué par σ est la composée de φ avec l'action extérieure de σ. L'énoncé suivant précise cette action.

Proposition 3.10. — *Soit $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ un bouquet générateur du groupe fondamental $\pi_1'(\mathbb{P}^1{}_{\overline{k}} - \{a_1, \ldots, a_r\})$, alors $\{{}^{\sigma}\gamma_1, \ldots, {}^{\sigma}\gamma_r\}$ sont conjugués (à l'ordre près) de $\{\gamma_1^{\chi(\sigma)}, \ldots, \gamma_r^{\chi(\sigma)}\}$, où χ désigne le caractère cyclotomique.*

Remarque 3.11. — *A priori* $\{{}^{\sigma}\gamma_1, \ldots, {}^{\sigma}\gamma_r\}$ sont conjugués de $\{\gamma_{\widehat{\sigma}(1)}^{\chi(\sigma)}, \ldots, \gamma_{\widehat{\sigma}(r)}^{\chi(\sigma)}\}$, où $\widehat{\sigma}$ est une permutation de $\{1, \ldots, r\}$ déterminée par l'action de σ sur les points $\{a_1, \ldots, a_r\}$. Si les points a_i sont individuellement rationnels sur k, l'énoncé précédent est vrai sans la mention « à l'ordre près ».

Il résulte de ce qui précède que si on se donne un (G-) revêtement objet de la catégorie $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) ou $\mathcal{H}_G'(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}_G'(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$), dont le diviseur de ramification (ou les points de ramification) est (sont) rationnel(s) sur un corps k (dont la caractéristique résiduelle ne divise pas $|G|$), son conjugué par un élément $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ appartiendra à la catégorie $\mathcal{H}_G({}^{\sigma}\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}_G({}^{\sigma}\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) ou $\mathcal{H}_G'({}^{\sigma}\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathcal{H}_G'({}^{\sigma}\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$), où ${}^{\sigma}\boldsymbol{C}$ désigne $\{C_{\widehat{\sigma}(1)}^{\chi(\sigma)}, \ldots, C_{\widehat{\sigma}(r)}^{\chi(\sigma)}\}$ (l'ensemble ou l'ensemble ordonné suivant les cas). Il est donc naturel, pour toute caractéristique p ne divisant pas l'ordre de G, et si l'on note $k = \mathbb{F}_p$ ($k = \mathbb{Q}$ si $p = 0$), de considérer le sous-groupe H de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ des σ pour lesquels ${}^{\sigma}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}$.

Définition 3.12. — On dit que la famille $\boldsymbol{C}$ est *rationnelle* sur le corps K de caractéristique 0 si pour tout élément σ de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, ${}^{\sigma}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}$.

Remarque 3.13. — On s'est contenté de donner cette définition pour un corps de caractéristique 0. La définition s'étend de façon évidente, pour le problème des modules des (G-) revêtements de groupe de monodromie G, au cas général d'un corps dont la caractéristique ne divise pas l'ordre de G.

Proposition 3.14. — *L'espace de Hurwitz $H_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $H_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) ou $H_G'(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $H_G'(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) est défini sur une extension cyclotomique de k ($k = \mathbb{Q}$ ou $k = \mathbb{F}_p$), à savoir $\overline{k}^H$.*

On trouvera la preuve de cet énoncé, dans le cas de la caractéristique 0 dans [FrVö] ou [Em].

Remarque 3.15. — Cet énoncé ne dit rien du corps de définition des différentes composantes irréductibles des espaces de Hurwitz. Cette question, et en particulier celle de l'irréductibilité de l'espace de Hurwitz, sera traitée dans la section 6.

3.5. Description du revêtement $H \to U_r$. — Les espaces de Hurwitz sont considérés dans ce paragraphe sur un corps de base algébriquement clos (de caractéristique ne divisant pas l'ordre du groupe de monodromie.)

Le point (2) du théorème 3.8 affirme que les espaces de Hurwitz sont munis de morphismes $H_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}} \to U_r$ (resp. $H_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}} \to U_r$) et $H'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}} \to U^r$ (resp. $H'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}} \to U^r$) qui en font des revêtements finis étales de U_r (ou U^r suivant le cas) au-dessus de S. Le but de ce paragraphe est de donner une description de ces revêtements en termes de l'action du groupe fondamental de l'espace U_r (ou U^r) sur la fibre du revêtement. Pour cela on est amené à introduire les ensembles suivants, dits ensembles des *classes de Nielsen* qui décrivent ces fibres.

$$\mathrm{ni}_G(\boldsymbol{C}) = \left\{ (g_1, \dots, g_r) \in G^r \;\middle|\; \begin{array}{l} g_1 \cdots g_r = 1 \\ \langle g_1, \dots, g_r \rangle = G \\ g_i \in C_i \ \text{(à l'ordre près)} \end{array} \right\}$$

et $\mathrm{ni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}} = \mathrm{ni}_G(\boldsymbol{C}) \ / \ \mathrm{Nor}_{S_d}(G)$ (où le groupe $\mathrm{Nor}_{S_d}(G)$ agit par conjugaison, composante par composante[(1)]). Sans la mention « à l'ordre près », on obtient des sous-ensembles de $\mathrm{ni}_G(\boldsymbol{C})$ et $\mathrm{ni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$, que l'on note $\mathrm{sni}_G(\boldsymbol{C})$ et $\mathrm{sni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$. Pour les G-revêtements, nous aurons besoin aussi des ensembles $\mathrm{ni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$ et $\mathrm{sni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$ définis de façon similaire à $\mathrm{ni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ et $\mathrm{sni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$, la différence étant qu'on quotiente cette fois par l'action de la conjugaison par des éléments de G.

Proposition 3.16. — *Les ensembles* $\mathrm{ni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ *(resp.* $\mathrm{ni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$*) et* $\mathrm{sni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ *(resp.* $\mathrm{sni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$*) sont en bijection avec les fibres géométriques des revêtements étales* $H_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}} \to U_r$ *(resp.* $H_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}} \to U_r$*) et* $H'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}} \to U^r$ *(resp.* $H'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}} \to U^r$*).*

Les groupes fondamentaux $B_r = \pi_1(U_r)$ (resp. $P_r = \pi_1(U^r)$) des espaces de configurations de points sont appelés *groupe des tresses* (resp. *groupe des tresses pures*). Ils admettent des présentations classiques [Bir] :

B_r est engendré par $r-1$ générateurs σ_i (les points i et $i+1$ tournent l'un par rapport à l'autre et s'échangent) avec deux types de relations :

(i) $|i-j| \geqslant 2 \quad \sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i$

(ii) $1 \leqslant i \leqslant r-1 \quad \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$.

Le groupe P_r est engendré par des éléments $\xi_{i,j}$ (les points i et j tournent l'un par rapport à l'autre sans tourner autour des autres points et reviennent à leur position initiale). Pour les relations *cf.* [Bir].

---

(1) *Stricto sensu* ce n'est pas le normalisateur $\mathrm{Nor}_{S_d}(G)$ qui agit mais le sous-groupe des éléments qui laissent globalement invariant l'ensemble $\{C_1, \dots, C_r\}$.

Les groupes des tresses ont une action extérieure fidèle sur le groupe $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{a_1, \ldots, a_r\})$ provenant de la suite exacte courte d'homotopie associée à la fibration $U^{r+1} \to U^r$ (oubli de la dernière coordonnée) :

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^1 - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_{r+1}) \longrightarrow \pi_1(U^{r+1}, (a_1, \ldots, a_r, a_{r+1})) \longrightarrow \pi_1(U^r, (a_1, \ldots, a_r)) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^1 - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_{r+1}) \longrightarrow \pi_1(U'^{r+1}, (a_1, \ldots, a_r, a_{r+1})) \longrightarrow \pi_1(U_r, \{a_1, \ldots, a_r\}) \longrightarrow 1$$

(pour le cas non ordonné, où U'^{r+1} est le quotient de U^{r+1} par S_r agissant sur les r premières coordonnées.)

Les groupes B_r et P_r peuvent être caractérisés ainsi comme sous-groupes du groupe $\mathrm{Out}(\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_{r+1}))$; on se donne un bouquet $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ générateur de $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_{r+1})$ et

$$B_r = \{\sigma \in \mathrm{Out}(\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_{r+1})); \quad \sigma\gamma_i \equiv \gamma_{\widehat{\sigma}(i)}\}$$

$$P_r = \{\sigma \in \mathrm{Out}(\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_{r+1})); \quad \sigma\gamma_i \equiv \gamma_i\}$$

où $\widehat{\sigma}$ est la permutation de S_r associée à la tresse σ et $\equiv$ désigne l'égalité à conjugaison près.

Un point h d'un espace de Hurwitz H au-dessus du point $\{a_1, \ldots, a_r\} \in U_r$ (resp. $(a_1, \ldots, a_r) \in U^r$) correspond à un ($G$-) revêtement, c'est à dire à un morphisme $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^1 - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_{r+1}) \to G \subset S_d$. La tresse σ dans son action sur la fibre de $\{a_1, \ldots, a_r\}$ (resp. $(a_1, \ldots, a_r)$) envoie h sur ${}^{\sigma}h$ correspondant au morphisme ${}^{\sigma}\varphi$ composé de φ avec l'action décrite plus haut de σ sur $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_{r+1})$. Ainsi cette action induit une action des tresses sur les ensembles $\mathrm{ni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathrm{ni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) ou $\mathrm{sni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\mathrm{sni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) qui à la classe du r-uplet $(g_1, \ldots, g_r)$ associe la classe d'un r-uplet $(g'_1, \ldots, g'_r)$, où g'_i est conjugué de g_i (ou de $g_{\widehat{\sigma}(i)}$).

L'irréductibilité de l'espace H est équivalente à la connexité de H. Vue les considérations précédentes, on obtient la caractérisation suivante, de nature combinatoire.

Proposition 3.17. — *L'espace de Hurwitz H est absolument irréductible si et seulement si le groupe des tresses B_r (ou P_r suivant les cas) agit transitivement sur l'ensemble des classes de Nielsen.*

Un exemple d'application de ce critère est fourni par [Fu]. Fulton ne considère que des revêtements simples, pour lesquels $G = S_d$ et $C_1 = \cdots = C_r$ est la classe de conjugaison des transpositions. Des calculs anciens montrent que l'action du groupe des tresses sur l'ensemble des classes de Nielsen correspondant est transitive. On en déduit alors le résultat suivant [Fu].

Théorème 3.18. — *L'espace de Hurwitz des revêtements simples de degré d à r points de branchement est absolument irréductible.*

Le théorème de connexité de Zariski appliqué à l'espace de Hurwitz défini sur $\mathbb{Z}[1/d!]$ donne l'absolue irréductibilité de l'espace de Hurwitz construit par Fulton en toute caractéristique ne divisant pas $d!$. Ce résultat, allié au fait que toute courbe de genre $g \geqslant 1$ est un revêtement de degré $d \geqslant g+1$ de $\mathbb{P}^1$ ramifié en $r = 2g + 2d - 2$ points, permet de prouver le théorème suivant [Fu].

Théorème 3.19. — *L'espace des modules des courbes de genre g est absolument irréductible en toute caractéristique p telle que $p \geqslant g+1$.*

4. Champ de Hurwitz complet

L'objet du présent paragraphe est de décrire une compactification de l'espace de Hurwitz avec une interprétation modulaire, les points du bord correspondant aux (G-) revêtements dégénérés obtenus comme limite de (G-) revêtements lorsque les points de branchement coalescent. La première étape est de décrire la compactification des espaces U_r et U^r.

4.1. Compactification stable des espaces de base $M_{0,r}$, $\mathcal{U}_r$, $\mathcal{U}^r$. — Lorsque quelques uns des points marqués d'une courbe de genre 0 r-marquée (ou r-pointée) définie sur un schéma T coalescent en t_0, on peut les séparer par une série d'éclatements. Le résultat est une courbe de genre 0 singulière stable r-marquée (ou r-pointée).

Définition 4.1. — Une courbe stable r-pointée de genre 0 sur un schéma T est un morphisme propre et plat $X \to T$, où X est réduit, dont les fibres géométriques sont des courbes de genre arithmétique 0, n'ayant pour singularités que des points doubles ordinaires, munis de r sections $s_i : T \to \mathbb{P}^1{}_T$ deux à deux disjointes et disjointes des points singuliers et telles que, sur chaque composante irréductible la somme du nombre de points marqués et du nombre de singularités soit supérieure à 3.

Définition 4.2. — Une courbe stable r-marquée de genre 0 sur un schéma T est un morphisme propre et plat $X \to T$, où X est réduit, dont les fibres géométriques sont des courbes de genre arithmétique 0, n'ayant pour singularités que des points doubles ordinaires, muni d'un diviseur de Cartier relatif de degré r dont le support est disjoint des points singuliers et telles que, sur chaque composante irréductible la somme du nombre de points marqués et du nombre de singularités soit supérieure à 3.

Les morphismes sont les morphismes de T-courbes qui respectent le pointage (resp. le marquage).

Le champ $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ des courbes stables de genre g, r-marquées, a été étudié dans [DelMum]. Dans le cas particulier de $\overline{\mathcal{M}}_{0,r}$, le résultat est le suivant.

Théorème 4.3. — *Soit r un entier $\geqslant 3$; le champ $\overline{\mathcal{M}}_{0,r}$ est un champ algébrique représentable par un schéma $\overline{M}_{0,r}$ lisse sur* $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ *de dimension $r-3$.*

Une description explicite de $\overline{M}_{0,r}$ est donnée dans [GeHeVdP]. L'espace $\overline{M}_{0,r}$ est une compactification naturelle de l'espace des modules $M_{0,r}$ des courbes lisses de genre 0. On a un morphisme naturel $U^r \to M_{0,r}$, correspondant au foncteur naturel $\mathcal{U}^r \to \mathcal{M}_{0,r}$ (à une courbe X de genre 0 r-pointée, munie d'un isomorphisme $X \simeq \mathbb{P}^1$ on associe la courbe X r-pointée en oubliant l'isomorphisme avec la droite projective). Pour obtenir une compactification de U^r (ou de U_r), [We1] adapte la construction de [GeHeVdP], en conservant trace dans les déformations de l'isomorphisme initial entre la courbe X et $\mathbb{P}^1$ (qui dans le cas d'une courbe stable dégénérée devient un isomorphisme entre $\mathbb{P}^1$ et une composante irréductible de la courbe appelée « racine »). Une telle courbe stable sera dite *épinglée*. Pour les définitions précises, on renvoie à [We1], qui définit ainsi deux champs algébriques $\overline{\mathcal{U}}^r$ et $\overline{\mathcal{U}}_r$ et, en utilisant le résultat correspondant sur $\mathcal{M}_{0,r}$ montre le théorème suivant.

Théorème 4.4. — *Les champs $\overline{\mathcal{U}}^r$ et $\overline{\mathcal{U}}_r$ sont des champs algébriques lisses et propres sur $\mathbb{Z}$. De plus $\overline{\mathcal{U}}^r$ est représentable par un schéma $\overline{U^r}$ lisse et projectif sur $\mathbb{Z}$. Le complémentaire Δ de U^r dans $\overline{U^r}$ est un diviseur à croisements normaux.*

Le champ $\overline{\mathcal{U}}_r$ n'est pas représentable, pour la même raison pour laquelle $\mathcal{U}_r$ n'est pas représentable (l'existence d'automorphismes qui permutent les points marqués).

Les composantes du bord de l'espace $\overline{U}^r$ s'interprètent elles-même comme des espaces de modules en dimension inférieure [We1].

4.2. Revêtements admissibles. — Après avoir complété les espaces U^r et U_r, on cherche maintenant à compléter les espaces de Hurwitz. Quels types de (G-) revêtements dégénérés vont interpréter les points du bord ? La situation naturelle est de considérer un objet de $\overline{\mathcal{U}}_r$ par exemple, *i.e.* une courbe stable de genre 0 épinglée, $X \to \operatorname{Spec}(R)$ où R est un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel algébriquement clos, de fibre générique X_η lisse et de fibre spéciale X_s singulière, munie d'un diviseur de Cartier relatif D de degré r, et de se donner un (G-) revêtement $Y_\eta \to X_\eta$ de la fibre générique modérément ramifié le long de D_η. On suppose comme d'habitude que l'ordre du groupe de monodromie de ce (G-) revêtement est premier à la caractéristique résiduelle de l'anneau R. On regarde la clôture intégrale de X dans le corps des fonctions de Y_η. La fibre spéciale $Y_s \to X_s$ possède des propriétés particulières, qui conduisent à la définition de (G-) revêtements *admissibles* [We1], [Sa1] (où ils sont appelés revêtements *kummeriens*). En tout point singulier (intersection donc de deux branches), un générateur de l'inertie le long d'une branche est égal à l'inverse d'un générateur de l'inertie le long de l'autre branche. Ce sont les revêtements modérés de la fibre spéciale, qui s'étendent sur une certaine extension de l'anneau de Witt du corps résiduel en des revêtements modérés de fibre générique lisse.

Proposition 4.5. — *Avec les hypothèses et notations précédentes, il existe une extension R' de l'anneau R de corps des fractions K' telle que la clôture intégrale de $X' = X_{R'}$ dans le corps des fonctions de $Y_\eta \times_K K'$ donne un revêtement admissible $Y' \to X'$.*

On se donne comme plus haut un groupe fini $G \subset S_d$, un entier $r \geqslant 3$, et une famille $\boldsymbol{C}$ de classes de conjugaison de G. La catégorie des (G-) revêtements admissibles de courbes stables épinglées r-marquées (ou r-pointées) est un champ algébrique sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/|G|])$ [We1] noté $\overline{\mathcal{H}}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\overline{\mathcal{H}}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$) et $\overline{\mathcal{H}}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{ab}}$ (resp. $\overline{\mathcal{H}}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$). L'énoncé suivant résume les résultats sur ces champs de Hurwitz complets (notés $\overline{\mathcal{H}}$ pour unifier les résultats) [We1]. Nous l'énonçons dans le cas des points de branchement ordonnés pour simplifier.

Théorème 4.6

(i) $\overline{\mathcal{H}}$ admet un espace des modules grossiers $\overline{H}$ propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/|G|])$ *;*

(ii) H est un ouvert de $\overline{H}$ et le complémentaire est un diviseur à croisements normaux ;

(iii) $\overline{H}$ est muni d'un morphisme naturel $\overline{H} \to \overline{U}^r$ correspondant au foncteur qui à un revêtement admissible de courbe stable de genre 0 *épinglée r-pointée fait correspondre cette dernière, et $\overline{H} \to \overline{U}^r$ est un revêtement fini modérément ramifié le long de Δ.*

(iv) $\overline{H}$ est normal à fibres $\overline{H} \times \mathbb{Q}$ et $\overline{H} \times \mathbb{F}_p$ normales (p est un nombre premier ne divisant pas l'ordre du groupe de monodromie).

(v) Le champ $\mathcal{H}$ est une gerbe au-dessus de l'espace des modules grossiers H.

(vi) Le champ $\mathcal{H}$ est représentable si et seulement si les objets n'ont pas d'automorphisme non trivial, i.e. *dans le cas des revêtements si* $\mathrm{Cen}_{S_d}(G) = 1$ *et dans le cas des G-revêtements si le centre $Z(G)$ de G est trivial.*

Corollaire 4.7. — *Les composantes géométriquement irréductibles de $H \times \mathbb{Q}$ sont en correspondance bijective avec celles de $H \times \mathbb{F}_p$ (pour p ne divisant pas l'ordre du groupe de monodromie).*

Démonstration [We1]. — On utilise le fait que $\overline{H} \times \mathbb{Q}$ est normal, et donc ses composantes géométriquement irréductibles sont ses composantes géométriquement connexes ; idem pour $\overline{H} \times \mathbb{F}_p$. Par ailleurs, $H \times \mathbb{Q}$ (resp. $H \times \mathbb{F}_p$) est dense dans $\overline{H} \times \mathbb{Q}$ (resp. $\overline{H} \times \mathbb{F}_p$). Donc les composantes géométriquement irréductibles de $H \times \mathbb{Q}$ (resp. $H \times \mathbb{F}_p$) sont en correspondance bijective avec les composantes géométriquement connexes de $\overline{H} \times \mathbb{Q}$ (resp. $\overline{H} \times \mathbb{F}_p$). Or $\overline{H}$ est propre sur $\mathbb{Z}[1/|G|]$. D'après le théorème de connexité de Zariski, les composantes géométriquement connexes de $\overline{H} \times \mathbb{Q}$ et $\overline{H} \times \mathbb{F}_p$ se correspondent.

Remarque 4.8. — On retrouve, dans le cas particulier des revêtements simples, le Corollaire 7.5 de Fulton [Fu].

5. Une autre construction du champ de Hurwitz complet

J. Bertin a donné une autre construction de la compactification des espaces de Hurwitz, qui reprend en l'adaptant la construction de [DeMum] de l'espace des modules de courbes [Be]. Nous donnons ici les grandes lignes de la méthode dans le cas des G-revêtements.

Le point de départ de la construction de [DeMum] est de considérer les courbes stables de genre g *plongées m-canoniquement* dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$ (en fait $\mathbb{P}(H^0(X,\omega_X^{\otimes m}))$ où ω_X est le faisceau dualisant et $m \geqslant 3$ un entier). Les isomorphismes entre courbes stables plongées m-canoniquement dans $\mathbb{P}^N$ s'interprètent comme la restriction d'automorphismes linéaires de $\mathbb{P}^N$. En particulier une courbe stable m-canoniquement plongée n'a pas d'automorphisme non trivial. Cela permet de montrer que le champ $\overline{\mathcal{H}ILB}_g$ des courbes stables de genre g plongées m-canoniquement dans $\mathbb{P}^N$ est représentable par un schéma noté $\overline{Hilb}_g$ (dont un ouvert $Hilb_g$ correspond aux courbes lisses), muni d'une famille universelle $\overline{X}_g$. Le groupe $PGL(N)$ agit sur $\overline{Hilb}_g$ et sur X_g, et le champ $\overline{\mathcal{M}}_g$ des courbes stables de genre g apparaît comme le quotient $[\overline{\mathcal{H}ILB}_g/\,PGL(N)]$.

On se donne un groupe fini G et l'on considère la catégorie des courbes stables $X \to T$ munies d'une action de G (certaines hypothèses sur cette action sont nécessaires ; *cf.* [Be]) ; on suppose comme précédemment que l'ordre de G est premier aux caractéristiques résiduelles de T. A cette donnée est associé un revêtement $X \to X/G$ (les isomorphismes entre deux tels revêtements diffèrent de ceux que nous avons considérés jusqu'ici : ce sont les couples d'isomorphismes $f : X \to Y$ commutant à l'action de G, $\varphi : X/G \to Y/G$ qui rendent le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/G & \to & Y/G \end{array}$$

On verra un peu plus loin comment pallier cette difficulté, pour se ramener au champ de Hurwitz).

A partir d'une telle G-courbe, on a une représentation naturelle de G dans les espaces $H^0(X,\omega_X^{\otimes m})$, appelée représentation de Hurwitz, sur laquelle on peut lire toutes les données de ramification du revêtement (dont le degré r du diviseur de branchement), et donc, par la formule de Riemann-Hurwitz, le genre de la courbe X/G. Cette représentation est constante le long des fibres géométriques.

On se fixera une classe de représentations $[\rho]$ de G telle que si X est une G-courbe stable dont la représentation de Hurwitz est dans la classe de $[\rho]$, la courbe X/G est de genre 0. Et l'on considère la catégorie $\overline{\mathcal{J}}$ de ces G-courbes stables de représentation de Hurwitz fixée $[\rho]$ et la catégorie $\overline{\mathcal{H}ILB}_g^G$ dont les objets sont ceux de $\mathcal{J}$ avec la donnée supplémentaire d'un plongement m-canonique de la G-courbe, ce qui revient au choix d'une base des sections globales $H^0(X,\omega_X^{\otimes m})$. Ce sont les objets de $\overline{\mathcal{H}ILB}_g$ qui admettent G comme sous-groupe du groupe des automorphismes, et pour lesquels le plongement $G \subset PGL_N$ correspondant est dans la classe de la représentation projective associée à $[\rho]$. Cette catégorie est un champ algébrique représenté par $Hilb_g^G$, où l'on désigne ainsi le sous-espace de $Hilb_g$ constitué des points fixés par les exemplaires de G contenus dans PGL_N et tels que $G \subset PGL_N$ soit associé à la classe de la représentation $[\rho]$. De plus la catégorie $\overline{\mathcal{J}}$ apparaît comme le quotient $\overline{Hilb}_g^G / PGL_N$.

On dispose d'un foncteur naturel de catégories fibrées $\overline{\mathcal{J}} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,r}$ qui associe à l'objet X la courbe quotient X/G. Pour retrouver le champ de Hurwitz (la base du (G-) revêtement est une courbe stable de genre 0 avec la donnée d'un isomorphisme d'une composante irréductible avec $\mathbb{P}^1$), on va procéder de la façon suivante.

On dispose aussi d'un foncteur naturel de catégories fibrées $\overline{\mathcal{U}}_r \to \overline{\mathcal{M}}_{0,r}$ (ou $\overline{\mathcal{U}}^r \to \overline{\mathcal{M}}_{0,r}$ dans le cas des points de branchement ordonnés). On peut alors considérer le produit fibré des deux catégories fibrées $\overline{\mathcal{J}} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{0,r}} \overline{\mathcal{U}}_r$ (ou $\overline{\mathcal{J}} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{0,r}} \overline{\mathcal{U}}^r$ dans le cas des points de branchement ordonnés) (*cf.* [SGA] ou [LauMo] pour la définition du produit fibré de deux catégories). On vérifie sans mal le fait suivant.

Lemme 5.1. — *Les champs $\overline{\mathcal{H}}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$ et $\overline{\mathcal{J}} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{0,r}} \overline{\mathcal{U}}_r$ (resp. $\overline{H}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$ et $\overline{\mathcal{J}} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{0,r}} \overline{\mathcal{U}}^r$) sont équivalents.*

De la présentation décrite plus haut du champ $\overline{\mathcal{J}}$, on déduit une présentation du champ de Hurwitz. Par exemple dans le cas des points de branchement ordonnés, on obtient le résultat suivant :

Proposition 5.2

$$\overline{Hilb}_g^G \times_{\overline{\mathcal{M}}_{0,r}} \overline{U}^r \longrightarrow \overline{\mathcal{J}} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{0,r}} \overline{\mathcal{U}}^r \simeq \overline{\mathcal{H}}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$$

est une présentation du champ de Hurwitz. Posons $\overline{H}_g^G = \overline{Hilb}_g^G \times_{\overline{\mathcal{M}}_{0,r}} \overline{U}^r$. Le groupe PGL_N agit sur le schéma $\overline{H}_g^G$ et le champ $\overline{\mathcal{H}}'_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$ est le quotient $\overline{H}_g^G / PGL_N$.

6. Irréductibilité de l'espace de Hurwitz

On a vu à la section 3.5 un critère de nature combinatoire (portant sur l'action du groupe des tresses sur l'ensemble des classes de Nielsen) pour l'absolue irréductibilité de l'espace de Hurwitz. On obtient ainsi par exemple l'irréductibilité dans le cas des revêtements simples [Fu]. Le but de cette section est de présenter d'autres cas où l'espace de Hurwitz est absolument irréductible.

6.1. Le critère de Conway-Parker. — Le critère suivant est utilisé dans [FrVö] dans la perspective du problème inverse de Galois. On se donne un groupe G de centre trivial et l'on suppose que le multiplicateur de Schur de G est engendré par les commutateurs. Alors si chaque classe de conjugaison C_i de $\boldsymbol{C}$ est répétée suffisamment souvent, le groupe des tresses agit transitivement sur l'ensemble des classes de Nielsen, et donc l'espace $H_G^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{C})$ est absolument irréductible. L'inconvénient de ce critère est qu'il nécessite un grand nombre de points de branchement, et que le nombre de fois qu'il faut répéter chaque classe de conjugaison n'est pas effectif.

6.2. Inertie de type Harbater-Mumford. — La notion d'inertie d'Harbater-Mumford a été introduite par Fried [Fr3].

Définition 6.1. — Un élément $\boldsymbol{g}$ de $\mathrm{Ni}_G(\boldsymbol{C})$ est dit de type Harbater-Mumford s'il est de la forme $\boldsymbol{g} = (g_1, g_1^{-1}, \ldots, g_s, g_s^{-1})$.

En particulier le nombre de points de branchement d'un tel revêtement $r = 2s$ est pair. Fried montre que sous certaines hypothèses, le groupe des tresses agit de façon transitive sur les éléments de type Harbater-Mumford. D'où l'existence d'une composante connexe de l'espace de Hurwitz, dite de Harbater-Mumford, contenant tous les points de type Harbater-Mumford.

Proposition 6.2. — *La composante de Harbater-Mumford est définie sur* $\mathbb{Q}$.

Nous donnons ici une esquisse de la preuve. Elle repose sur le fait que la dégénérescence des revêtements de Harbater-Mumford, lorsque les $r = 2s$ points de branchement coalescent deux à deux est d'un type bien particulier, et que la famille des revêtements dégénérés de ce type est stable sous-l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Considérons d'abord un type de courbes stables maximalement dégénérées que nous appellerons *peignes*. Ce sont des objets de $\overline{\mathcal{U}}_r$, dont la racine est une droite projective Y rencontrant s autres composantes Y_i isomorphes à $\mathbb{P}^1$ en s points distincts $b_1, \ldots, b_s$, chacune des s composantes étant marquées, outre par le point d'intersection avec la racine, par deux points distincts et distincts de cette intersection, a_i et a'_i.

Considérons un objet de X de $\overline{\mathcal{U}}_r$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(R)$, où R est un anneau de valuation discrète complet de corps des fractions K algébriquement clos et de corps résiduel k algébriquement clos, et notons X_η et X_s sa fibre générique et sa fibre spéciale. Notons D le diviseur de Cartier relatif constitué par les points marqués, D_η et D_s sa trace sur les fibres génériques et spéciales respectivement. La catégorie des revêtements de X_η ramifiés le long de D_η (resp. la catégorie des revêtements admissibles de X_s ramifiés le long de D_s) de groupes de monodromie d'ordre premier à la caractéristique résiduelle, sont des catégories galoisiennes paramétrées par des groupes fondamentaux $\pi'_1(X_\eta - D_\eta)$ (resp. $\pi_1^{\mathrm{ad}}(X_s - D_s)$) et le foncteur réduction induit un isomorphisme

$$\pi_1^{\mathrm{ad}}(X_s - D_s) \longrightarrow \pi'_1(X_\eta - D_\eta)$$

Dans le cas où X_s est un peigne, on peut expliciter la flèche précédente ; soit Y_0 la racine du peigne et Y_i ($1 \leqslant i \leqslant s$) les composantes qui lui sont attachées ; on note $D_\eta = \{a_1, a'_1, \ldots, a_s, a'_s\}$ et $D_s = \{a_{1s}, a'_{1s}, \ldots, a_{ss}, a'_{ss}\}$. Le groupe $\pi_1^{\mathrm{ad}}(X_s - D_s)$ est isomorphe au produit amalgamé $\pi'_1(Y_0 - \{b_1, \ldots, b_s\}) \star \pi'_1(Y_1 - \{b_1, a_{1s}, a'_{1s}\}) \star \cdots \star \pi'_1(Y_1 - \{b_s, a_{ss}, a'_{ss}\})$ avec pour relation, si $(\delta^i, \gamma^i, \gamma'^i)$ est un bouquet générateur de $\pi'_1(Y_i - \{b'_i, a_{is}, a'_{is}\})$ avec des lacets tournant autour de $\{b'_i, a_{is}, a'_{is}\}$ respectivement, et $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$ un bouquet générateur de $\pi'_1(Y_0 - \{b_1, \ldots, b_s\})$ formés de lacets tournant respectivement autour de $\{b_1, \ldots, b_s\}$,

$$\gamma^i {\gamma'}^i \delta^i = 1, \quad \gamma_1 \cdots \gamma_s = 1, \quad \gamma_i = {\delta^i}^{-1}.$$

Quant à $\pi_1'(X_\eta - D_\eta)$, il admet un bouquet générateur $\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_s, \alpha_s'$ avec l'unique relation $\alpha_1 \cdot \alpha_1' \cdots \alpha_s \alpha_s' = 1$ et sur ces présentations, le morphisme $\pi_1'(X_\eta - D_\eta) \to \pi_1^{\mathrm{ad}}(X_s - D_s)$ envoie α_i sur γ_i et α_i' sur γ_i'.

Un revêtement de $X_\eta - D_\eta$ correspondant à un morphisme $\varphi : \pi_1'(X_\eta - D_\eta) \to G \subset S_d$ est de type Harbater-Mumford si et seulement si les images $g_i = \varphi(\alpha_i)$ et $g_i' = \varphi(\alpha_i')$ satisfont la relation $g_i g_i' = 1$. Ceci est équivalent à la condition suivante portant sur le morphisme $\overline{\varphi} : \pi_1^{\mathrm{ad}}(X_s - D_s) \to G \subset S_d$ correspondant au revêtement admissible obtenu par réduction : $\overline{\varphi}(\delta^i) = 1$, ou encore au fait que la restriction à la racine du revêtement admissible réduit est non ramifiée. En résumé nous avons obtenu la caractérisation suivante.

Proposition 6.3. — *Un revêtement de X_η modérément ramifié en $\{a_1, a_1', \ldots, a_s, a_s'\}$ est de type Harbater-Mumford si et seulement si la restriction à la racine de sa réduction est étale.*

Les revêtements admissibles de peignes dont la restriction à la racine est étale seront eux-mêmes dits de *type Harbater-Mumford*.

Soit maintenant G un groupe fini, et $\overline{H}_G^{\mathrm{in}}$ l'espace de Hurwitz complet des G-revêtements de groupe G (sans préciser les classes de Nielsen). Il est clair qu'il est défini sur $\mathbb{Q}$. Plaçons nous sous les hypothèses où il existe une composante irréductible H^{H-M} contenant les points de type Harbater-Mumford. Soit p un nombre premier ne divisant pas l'ordre de G, v une place de $\overline{\mathbb{Q}}$ au-dessus de p et G_v le groupe de décomposition de v dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Soit $Y \to \mathbb{P}^1$ un G-revêtement de groupe G dont la réduction modulo v est un revêtement admissible de type Harbater-Mumford. Il résulte de la proposition précédente que le conjugué ${}^\sigma Y \to \mathbb{P}^1$ de ce G-revêtement par un élément σ de G_v possédera la même propriété et appartiendra donc encore à $H^{H-M}(\overline{\mathbb{Q}})$. Il en résulte en particulier que ${}^\sigma H^{H-M} = H^{H-M}$ pour tout $\sigma \in G_v$. Mais cette dernière propriété étant vraie pour toute place au-dessus de tout premier en dehors du nombre fini de premiers qui divisent l'ordre de G, on en déduit que ${}^\sigma H^{H-M} = H^{H-M}$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, et donc que H^{H-M} est définie sur $\mathbb{Q}$.

L'introduction des revêtements de type Harbater-Mumford [Fr3] conduit au résultat suivant (*cf.* aussi [We1], Th. 4.2.5).

Théorème 6.4. — *Soit G un groupe fini de centre trivial. Il existe une constante $A(G)$ telle que pour tout nombre premier p ne divisant pas l'ordre de G, G a une réalisation comme G-revêtement de $\mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{F}_q$ de groupe G, pour $q = p^t > A(G)$.*

Soit $\{g_1, \ldots, g_s\}$ un système de générateurs de G. On choisit $r = 2s$. Et l'on considère la classe de Nielsen $\boldsymbol{C}$ de $\{g_1, {g_1}^{-1}, \ldots, g_s, {g_s}^{-1}\}$. Le revêtement $H_G^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{C}) \to U^r$ est fini de degré D ne dépendant que de G. La composante $H_{\mathbb{Q}}^{H-M}$ est définie sur $\mathbb{Q}$. On a donc un revêtement fini étale $H^{H-M} \to U_r$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/|G|])$ de degré $D' \leqslant D$. Pour tout nombre premier p ne divisant pas $|G|$, la réduction modulo p est encore un revêtement étale $H_p^{H-M} \to U_p^r$ de degré D'. Choisissons un $r-1$-uplet $\{a_1, \ldots, a_{r-1}\}$ de $U^{r-1}(\mathbb{Z})$ tel que l'image réciproque $H^{H-M}{}_{\{a_1,\ldots,a_{r-1}\}}$ de $(a_1, \ldots, a_{r-1}) \times \mathbb{P}^1 - \{a_1, \ldots, a_{r-1}\} \subset U^r$ dans le revêtement $H^{H-M} \to U^r$ soit encore irréductible et défini sur $\mathbb{Z}$ (c'est possible d'après le théorème de Bertini). Le morphisme $H^{H-M}{}_{\{a_1,\ldots,a_{r-1}\}} \to \mathbb{P}^1 - \{a_1, \ldots, a_{r-1}\}$ est un revêtement étale de degré D' et donc le genre g de la courbe $H^{H-M}{}_{\{a_1,\ldots,a_{r-1}\}}$ est déterminé par la formule de Riemann-Hurwitz en fonction de ce degré et des données de ramification, qui dépendent elles-même de l'action du groupe des tresses sur les classes de Nielsen. Il en est de même pour la réduction modulo un nombre premier ne divisant pas l'ordre du groupe de monodromie. Le genre de la réduction en p de la courbe irréductible $H^{H-M}{}_{\{a_1,\ldots,a_{r-1}\}}$ est donc indépendant de p. En utilisant la borne de Lang-Weil qui donne une minoration du cardinal de $H^{H-M}{}_{\{a_1,\ldots,a_{r-1}\}}(\mathbb{F}_q)$ en fonction du genre g, on en déduit l'existence d'une constante $A(G)$ indépendante de p, telle que pour tout $q = p^t \geqslant A(G)$, $H^{H-M}{}_{\{a_1,\ldots,a_{r-1}\}}(\mathbb{F}_q)$ n'est pas vide.

7. Gerbe de Hurwitz

Nous avons vu que le champ de Hurwitz (ouvert) est une gerbe au-dessus de son espace des modules grossiers H. Une *famille de Hurwitz* d'espace de paramètres T est simplement un objet du champ de Hurwitz au-dessus de T. Le morphisme $T \to H$ associé est appelé *morphisme structural* associé à la famille de Hurwitz. La question se pose de l'existence de telles familles de Hurwitz au-dessus de l'espace de Hurwitz lui-même. Une telle famille n'existe pas en général sur H, mais elle existe localement pour la topologie étale [DeDoEm]. Plus précisément :

Proposition 7.1. — *Il existe un revêtement étale $f : H' \to H$ et une famille de Hurwitz sur H' de morphisme structural f.*

De façon générale la gerbe de Hurwitz sur l'espace de Hurwitz $H_G(\boldsymbol{C})$ muni de la topologie étale se traduit dans $H^2(\pi_1(H), C)$ (C désigne ici le groupe des automorphismes des (G-) revêtements du champ, *i.e.* $C = Z(G)$ dans le cas des G-revêtements et $C = \mathrm{Cen}_{S_d}(G)$ dans le cas des revêtements). De cette expression cohomologique de l'obstruction à ce qu'il existe une famille de Hurwitz sur $H_G(\boldsymbol{C})$, on déduit par exemple la proposition suivante.

Proposition 7.2. — *Soit T une courbe affine définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique* 0 *munie d'un morphisme $f : T \to H_G(\boldsymbol{C})$. Il existe alors une famille de Hurwitz sur T de morphisme structural f.*

Le résultat suivant est en quelque sorte générique, puisqu'il concerne le corps des fonctions des composantes connexes de l'espace de Hurwitz.

Théorème 7.3. — *Soit K un corps algébriquement clos de caractéristique* 0. *On suppose ici que H est une composante connexe de l'espace des modules $H_G(\boldsymbol{C})_K$. Alors le corps des fonctions de H est l'intersection des corps de fonctions des espaces de paramètres S irréductibles définis sur K au-dessus desquels il existe une famille de Hurwitz relativement au type* $\mathrm{ni}_G(\boldsymbol{C})$ *et de morphisme structural $S \to H$ dominant.*

8. Gerbes des modèles d'un (G-) revêtement donné

Si on se donne un (G-) revêtement $Y \to \mathbb{P}^1$ de la catégorie considérée défini sur un corps algébriquement clos K, il lui correspond un morphisme structural $h : \mathrm{Spec}(K) \to H_G(\boldsymbol{C})$, c'est à dire un point géométrique de l'espace de Hurwitz. Nous avons vu que le corps résiduel $k(h)$ de ce point est le corps des modules du (G-) revêtement. Par ailleurs au-dessus de l'espace de Hurwitz $H_G(\boldsymbol{C})$ vit la gerbe de Hurwitz $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})$, dont on a vu une présentation lisse $H_g^G \to \mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})$. Il est naturel de prendre l'image réciproque de la gerbe de Hurwitz et de sa présentation par le morphisme h. On a alors le diagramme cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_h & \to & \mathcal{H}_G(\boldsymbol{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(k(h)) & \to & H_G(\boldsymbol{C}) \end{array}$$

qui définit une gerbe $\mathcal{G}_h$, qui est *la gerbe des modèles* du (G-) revêtement (*i.e.* la gerbe dont les objets au-dessus d'une extension l de $k(h)$ sont les (G-) revêtements définis sur l et isomorphes à $Y \to \mathbb{P}^1$ sur une extension de l). Le corps des modules apparaît donc pour la gerbe des modèles comme l'espace des modules grossiers.

On peut de même considérer le produit fibré au-dessus de $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})$ de la présentation $H_g^G \to \mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})$ avec $\mathcal{G}_h \to \mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})$, et l'on obtient une présentation $Z_h \to \mathcal{G}_h$ de la gerbe des modèles.

$$\begin{array}{ccc} Z_h & \to & H_g^G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_h & \to & \mathcal{H}_G(\boldsymbol{C}) \end{array}$$

De plus, pour toute extension l de $k(h)$ et tout objet $f : \mathrm{Spec}(l) \to \mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})$ au-dessus de h, induisant donc un morphisme $\mathrm{Spec}(l) \to \mathcal{G}_h$ (autrement dit un modèle sur l'extension l de la classe d'isomorphisme représentée par h), la fibre de $Z_h \to \mathcal{G}_h$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(l) \to \mathcal{G}_h$ est un torseur sous le groupe PGL_N. On peut modifier la construction précédente et obtenir une présentation de la gerbe $\mathcal{G}_h$ qui soit un espace homogène sous GL_{N+1} (au lieu de PGL_N) [DeDoMo-Ba], et dont les fibres seront des torseurs sous GL_{N+1}. L'avantage réside dans le fait que tout torseur sous le groupe linéaire sur un anneau semi-local (et donc en particulier un corps) est trivial. Ainsi, pour une telle présentation (encore notée Z_h), tout modèle $f : \mathrm{Spec}(l) \to \mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})$ se relève en un morphisme $\widetilde{f} : \mathrm{Spec}(l) \to Z_h$. On obtient ainsi une *variété des modèles* qui vérifie les propriétés suivantes [DeDoMo-Ba].

Théorème 8.1. — *Il existe une variété lisse géométriquement irréductible Z_h définie sur $k(h)$ munie d'une action transitive de GL_{N+1} avec stabilisateurs finis, et d'un morphisme $\pi : Z_h \to \mathcal{G}_h$ (*i.e.* un objet de $\mathcal{G}_h$ sur Z_h) telle que :*

(i) π induise un isomorphisme de champs entre $[Z_h/\, GL_{N+1}]$ et $\mathcal{G}_h$.

(ii) pour toute extension l de $k(h)$ et tout objet $f : \mathrm{Spec}(l) \to \mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})$ de $\mathcal{G}_h$, f se relève en un point de $Z_h(l)$.

La construction initiale à la main par P. Dèbes de la variété des modèles est expliquée dans [DeDoMo-Ba]. La présentation précédente peut être généralisée à la gerbe sur un anneau. Plaçons nous pour simplifier dans le cas de (G-) revêtements définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Le corps $k(h)$ est un corps de nombres, extension finie du corps de rationalité du diviseur de branchement du (G-) revêtement représenté par h. Soit S l'ensemble des *mauvais premiers*, c'est à dire ceux qui divisent l'ordre du groupe de monodromie géométrique G ou pour lesquels des points de branchement coalescent. Le morphisme $h : \mathrm{Spec}(k(h)) \to H_G(\boldsymbol{C})$ s'étend en un morphisme $\widetilde{h} : \mathrm{Spec}(O_h) \to H_G(\boldsymbol{C})$, où O_h est le localisé de l'anneau des entiers de $k(h)$ où l'on a inversé tous les mauvais premiers. On peut comme précédemment considérer la fibre de $\mathcal{H}_G(\boldsymbol{C}) \to H_G(\boldsymbol{C})$ au-dessus de $\widetilde{h} : \mathrm{Spec}(O_h) \to H_G(\boldsymbol{C})$, que l'on notera $\mathcal{G}_{\widetilde{h}}$, et que l'on appellera encore gerbe des modèles du (G-) revêtement correspondant à h. Ses objets sont non seulement les modèles sur un corps, mais aussi les modèles sur un anneau (ayant bonne réduction). L'énoncé suivant est la généralisation du théorème 8.1.

Théorème 8.2. — *Il existe une variété lisse géométriquement irréductible $Z_{\widetilde{h}}$ définie sur $O(h)$ munie d'une action transitive de GL_{N+1} avec stabilisateurs finis, et d'un morphisme $\pi : Z_{\widetilde{h}} \to \mathcal{G}_{\widetilde{h}}$ (*i.e.* un objet de $\mathcal{G}_{\widetilde{h}}$ sur $Z_{\widetilde{h}}$) telle que :*

(i) π induise un isomorphisme de champs entre $[Z_{\widetilde{h}}/\, GL_{N+1}]$ et $\mathcal{G}_{\widetilde{h}}$.

(ii) soit O une extension de $O(h)$ et v une place de O au-dessus d'une bonne place de $O(h)$, si l'on note R le localisé de O en v (ou son complété), alors pour tout objet $f : \mathrm{Spec}(R) \to \mathcal{H}_G(\boldsymbol{C})$ de $\mathcal{G}_{\widetilde{h}}$, f se relève en un point de $Z_{\widetilde{h}}(R)$.

Nous verrons dans le paragraphe suivant des applications arithmétiques de ces résultats.

9. Applications arithmétiques

9.1. Le problème inverse de Galois régulier. — Le *problème inverse de Galois* pour le groupe fini G et le corps K, dans sa forme régulière consiste en la question suivante :

$(1')_{K,G}$ *Existe-t-il une extension galoisienne régulière $L/K(t)$ de groupe de Galois isomorphe à G ?*

Cette question admet la reformulation géométrique suivante :

$(1)_{K,G}$ *Existe-t-il un G-revêtement de $\mathbb{P}^1$ défini sur K de groupe de Galois isomorphe à G ?*

Dans le cas de $K = \mathbb{Q}$ par exemple, une réponse positive à cette question entraînerait, via le théorème d'irréductibilité de Hilbert, une réponse positive à la question classique :

Étant donné un groupe fini G, existe-il une extension galoisienne $L/\mathbb{Q}$ de groupe de Galois G ?

Dans le cas où le groupe fini G est de centre trivial, il est immédiat que la question (1) est équivalente à la suivante :

$(2)_{K,G}$ *Existe-t-il un entier r (nombre de points de branchement) et une classe $\boldsymbol{C}$ tels que $H_G^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{C})(K) \neq \varnothing$?*

Si l'on s'intéresse à la question pour K fixé et tout groupe G, l'outil suivant [FrVö] permet de se ramener au cas d'un groupe de centre trivial.

Lemme 9.1. — *Pour tout groupe fini G il existe un groupe $\widetilde{G}$ de centre trivial (et dont les multiplicateurs de Schur sont engendrés par les commutateurs) tel que G soit isomorphe à un quotient de $\widetilde{G}$.*

On obtient alors l'équivalence entre les deux énoncés suivants relatifs au corps K fixé :

(i) Pour tout groupe fini G la réponse à la question $(1)_{K,G}$ est positive.

(ii) Pour tout groupe fini G la réponse à la question $(2)_{K,G}$ est positive.

9.1.1. Les conditions de rigidité. — Supposons que le groupe G agisse transitivement sur l'ensemble $\mathrm{sni}_G(\boldsymbol{C})^{\mathrm{in}}$ et que l'ensemble $\boldsymbol{C}$ de classes de conjugaison de G soit rationnel. Alors le morphisme ${H'}_G^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{C}) \to U^r$ est un isomorphisme. Si de plus le centre $Z(G)$ de G est trivial, l'espace ${H'}_G^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{C})$ est un espace des modules fins.

En particulier le corps de rationalité d'un point de ${H'}_G^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{C})$ est non seulement le corps des modules, mais le corps de définition d'un modèle de la classe d'isomorphisme représentée par ce point. Il suffit donc de choisir un point rationnel sur K de U_r. audessus de ce point se trouve un point K-rationnel de ${H'}_G^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{C})$, qui donne lieu à un G-revêtement de $\mathbb{P}^1$ de groupe G défini sur K.

Bien que très contraignantes, ces conditions sont réalisées pour certains choix de r et de $\boldsymbol{C}$ pour un certain nombre de groupes, pour lesquels le problème inverse de Galois régulier admet une réponse positive ; par exemple S_n, $PSL_2(\mathbb{F}_p)$, $SL_2(\mathbb{F}_8)$ [Th], [MaMa] ; *cf.* [Se] pour un survol de la question.

9.1.2. Un cas de rationalité. — On se place ici dans le cas où les points de branchement sont ordonnés. Supposons que $H'_G(\boldsymbol{C})$ soit irréductible. Dans le morphisme $H'_G(\boldsymbol{C}) \to U^r$ on peut privilégier une variable, par exemple la dernière, et considérer $H'_G(\boldsymbol{C}) \to U^r$ comme une famille de revêtements $X_{\boldsymbol{t}} \to \mathbb{P}^1$ paramétrés par $\boldsymbol{t} = \{t_1, \ldots, t_{r-1}\} \in U^{r-1}$. Le lieu de branchement de ce revêtement est $\boldsymbol{t} = \{t_1, \ldots, t_{r-1}\}$, et les indices de ramification se calculent à partir de l'action du groupe des tresses sur les classes de Nielsen (le groupe $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{t_1, \dots, t_{r-1}\}, t_r)$ étant vu comme un sous-groupe du groupe des tresses $\pi_1(U^r, (t_1, \dots, t_r)))$. La formule de Riemann-Hurwitz permet de calculer le genre de $X_{\boldsymbol{t}}$. L'étude approfondie de la ramification permet dans certains cas de trouver dans le revêtement $X_{\boldsymbol{t}} \to \mathbb{P}^1$ correspondant au point $\boldsymbol{t}$ générique un point de ramification rationnel. Lorsque le genre de $X_{\boldsymbol{t}}$ est nul, cela prouve que $H'_G(\boldsymbol{C})$ est une variété rationnelle [Fr], [FrBi]

Cette méthode et des variantes sont à la base de nombreux calculs qui ont permis de réaliser un certain nombre de groupes comme groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ [Ma], [Ma-Mal].

9.1.3. Points p-adiques. — Un des résultats les plus frappants sur la question de Galois inverse est le théorème suivant dû à D. Harbater [Ha].

Théorème 9.2. — *Tout groupe fini est réalisable comme groupe de Galois d'une extension régulière de* $\mathbb{Q}_p(t)$.

Autrement dit, dans le cas de $\mathbb{Q}_p$ la réponse aux questions $(1)_{\mathbb{Q}_p,G}$ et $(1')_{\mathbb{Q}_p,G}$ est positive. Le lecteur trouvera dans l'exposé de Q. Liu, dans le même volume, une introduction à la preuve de ce théorème, qui utilise la géométrie rigide.

On peut donner une idée d'une construction qui aboutit à la réalisation du groupe G sur $\mathbb{Q}_p$ dans des termes champêtres, au moins dans le cas où p ne divise pas l'ordre du groupe G. La première étape est de construire un revêtement dégénéré (admissible) de groupe G sur $\mathbb{F}_p$, obtenu en recollant des morceaux lisses qui sont des revêtements cycliques de $\mathbb{P}^1$ de groupe de Galois engendrés par des générateurs de G. La deuxième étape consiste à déformer ce revêtement dégénéré en un revêtement lisse. En les termes utilisés dans le paragraphe 5, le revêtement dégénéré correspond à un point $\overline{f} : \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \to \overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{in}}_G(\boldsymbol{C})$ du bord du champ de Hurwitz complet relatif à certaines données de Hurwitz $\boldsymbol{C}$. On en déduit un point $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \to \overline{H}^G_g$ du schéma $\overline{H}^G_g$ qui est une présentation du champ de Hurwitz complet. Le schéma $\overline{H}^G_g$ est lisse ainsi que sa réduction modulo p. Par le lemme de Hensel, le point $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \to \overline{H}^G_g$ s'étend en un morphisme $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p) \to \overline{H}^G_g$; on peut imposer que le morphisme correspondant $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p) \to \overline{\mathcal{U}}_r$ envoie le point générique $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ dans l'ouvert $\mathcal{U}_r$, l'image du point générique dans le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p) \to \overline{H}^G_g$ sera dans l'ouvert H^G_g, correspondant à des revêtements lisses, et donne donc un objet $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{H}^{\mathrm{in}}_G(\boldsymbol{C})$, c'est à dire un G-revêtement de $\mathbb{P}^1$ de groupe G défini sur $\mathbb{Q}_p$.

Remarque 9.3. — Le théorème d'Harbater donne une réalisation du groupe G comme groupe de Galois d'un (G-) revêtement de $\mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{Q}_p$, qui a mauvaise réduction en p, c'est à dire dont la réduction modulo p n'est pas lisse. On peut se demander si l'on peut construire, au moins pour p ne divisant pas l'ordre du groupe G, des réalisations ayant bonne réduction en p ; cela revient à la question de la réalisabilité de G sur $\mathbb{F}_p$ (*cf.* Théorème 6.4).

Comme nous l'avons vu, la réalisation de G comme groupe de Galois d'un G-revêtement de $\mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{Q}_p$ donne un point $\mathbb{Q}_p$-rationnel d'un certain espace de Hurwitz (question $(2)_{\mathbb{Q}_p,G}$). L'énoncé suivant précise le théorème d'Harbater, en ce sens qu'il affirme que les données de Hurwitz dans la réalisation de G sur $\mathbb{Q}_p$ peuvent être prises indépendantes de p [Des].

Théorème 9.4. — *Soit G un groupe fini. On suppose que le centre $Z(G)$ est trivial et que le groupe des multiplicateurs de Shur est engendré par les commutateurs. Il existe alors $r \geqslant 3$ et $\boldsymbol{C}$ une donnée de Hurwitz tels que l'espace $H_G^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{C})$ soit irréductible défini sur $\mathbb{Q}$ et tels que pour tout nombre premier p, $H_G^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{C})$ possède un point $\mathbb{Q}_p$-rationnel.*

Remarque 9.5. — L'hypothèse faite sur le groupe ($Z(G)$ est trivial et le groupe des multiplicateurs de Shur est engendré par les commutateurs) est utilisé pour montrer l'irréductibilité de l'espace $H_r^{\mathrm{in}}(G,\boldsymbol{C})$. Cette hypothèse n'est pas vraiment restrictive pour la question posée (la réalisation de G sur $\mathbb{Q}_p$) en vertu du lemme 9.1.

Remarque 9.6. — De la preuve de l'énoncé précédent, il ressort que dans la réalisation de G comme groupe de Galois d'un (G-) revêtement de $\mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{Q}_p$, les points de branchement peuvent être pris rationnels sur $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$.

9.1.4. Points rationnels sur un un corps PAC

Définition 9.7. — Un corps K sera dit pseudo-algébriquement clos (en abrégé PAC) si toute variété algébrique de dimension au moins 1 définie sur K a au moins un point K-rationnel.

Il est évident d'après les développements précédents, que tout groupe fini est réalisable sur un corps PAC. Un exemple de corps PAC donné par [FrJa] (sorte de produit infini des corps finis $\mathbb{F}_p$) donne le résultat suivant :

Théorème 9.8. — *Pour tout groupe fini G, il existe un ensemble fini S de premiers tel que tout nombre premier $p \notin S$, G est réalisable sur $\mathbb{F}_p$.*

Sous cette forme le résultat n'est pas effectif (comparer au Théorème 6.4.).

9.1.5. Points rationnels sur un corps large

Définition 9.9. — Un corps K est dit *large* (Pop), ou *ample* (Jarden), ou *épais* (Colliot-Thélène), ou *fertile* (Moret-Bailly) s'il vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

(i) pour tout K-schéma lisse connexe V, si $V(K) \neq \varnothing$, alors $V(K)$ est Zariski-dense dans V.

(ii) pour tout K-schéma de type fini sur K, si $V(K((t))) \neq \varnothing$, alors $V(K) \neq \varnothing$.

(iii) pour toute K-courbe lisse et connexe V, si $V(K) \neq \varnothing$, alors $V(K)$ est Zariski-dense dans V.

Exemple 9.10

(a) Tout corps séparablement clos est large.

(b) Tout corps hensélien pour une valeur absolue (par exemple $\mathbb{Q}_p$).

(c) Le corps $\mathbb{Q}^{tp}$ des nombres algébriques dont tous les conjugués dans tous les plongements dans $\mathbb{C}_p$ sont dans $\mathbb{Q}_p$. De même le corps $\mathbb{Q}^{tr}$ des nombres totalement réels.

(d) Toute extension algébrique d'un corps large est large.

***Théorème 9.11* (Pop).** — *Tout groupe fini G est réalisable sur un corps large.*

Des cas particuliers de ce résultat avaient été démontrés : sur $\mathbb{Q}^{tr}$ [DeFr], sur $\mathbb{Q}^{tp}$ [De2], et bien sur sur $\mathbb{Q}_p$ [Ha].

On peut donner une idée des arguments qui conduisent à la preuve en utilisant la présentation de la gerbe de Hurwitz donnée dans le paragraphe 5. On commence par construire une réalisation dégénérée de G sur K, ce qui est toujours possible (rapprocher de la preuve du théorème d'Harbater, dont la première étape consiste en la construction d'un revêtement dégénéré sur $\mathbb{F}_p$). On en déduit l'existence d'un point K- rationnel sur une composante $\overline{V}$ de la présentation de Hilbert $\overline{H}_g^G$ du champ de Hurwitz complet $\overline{\mathcal{H}}_G^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{C})$ correspondant. Comme $\overline{V}$ est lisse, la propriété (i) de la définition entraîne que $\overline{V}(K)$ est dense dans $\overline{V}$. En particulier $\overline{V}(K)$ rencontre l'ouvert V de $\overline{V}$ paramétrant les revêtements lisses. D'où l'existence d'un (G-) revêtement (lisse) de $\mathbb{P}_1$ défini sur K.

9.1.6. Réalisations fortes

***Définition 9.12*.** — Soit G un groupe fini, K un corps, et L/K une K-algèbre finie étale galoisienne de groupe G. Soit $Y \to \mathbb{P}^1$ un G-revêtement défini sur K de groupe de Galois G. On dira que c'est une réalisation forte de G sur K relativement à L/K s'il existe un point x_O de $\mathbb{P}^1(K)$ tel que la fibre en x_O de $Y \to \mathbb{P}^1$ soit isomorphe à L/K en tant que K-algèbre.

***Théorème 9.13* (Colliot-Thélène, Moret-Bailly).** — *Si le corps K est large, pour tout groupe fini G et pour toute K-algèbre finie étale L/K galoisienne de groupe G, G admet une réalisation forte relative à L/K.*

La question appelée dans [De4], problème de Beckmann-Black, a reçu des réponses partielles pour certains groupes ou pour certain types de corps. L'énoncé le plus général est démontré dans [Mo-Ba3], qui utilise des arguments du style de ceux présentés précédemment pour le théorème 9.11.

9.2. Corps des modules d'un (G-) revêtement. — La définition générale de corps des modules (définition 2.19) se traduit ainsi dans le cas des (G-) revêtements. On se donne un (G-) revêtement $Y \to \mathbb{P}^1$ défini sur une extension galoisienne L/K, où K est un corps parfait. On note H le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(L/K)$ des éléments $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ tels que les (G-) revêtements $Y \to \mathbb{P}^1$ et $Y^\sigma \to \mathbb{P}^1$ soient isomorphes.

Définition 9.14. — Le corps des modules du (G-) revêtement $Y \to \mathbb{P}^1$ est par définition le corps L^H des éléments de L fixés par H.

Le corps des modules du (G-) revêtement $Y \to \mathbb{P}^1$ est contenu dans tout corps de définition. C'est aussi le corps résiduel du point correspondant dans l'espace des modules grossiers correspondant.

Plaçons nous dans le cas où le (G-) revêtement $Y \to \mathbb{P}^1$ est défini sur une extension algébrique de $\mathbb{Q}$. Notons $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ et considérons le corps des modules M de $Y \to \mathbb{P}^1$ relativement à l'extension $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$. C'est une extension finie de $\mathbb{Q}$ qui contient le corps K de rationalité du diviseur de branchement D. Rappelons que l'ensemble fini S des *mauvaises places* de K est constitué des places qui divisent l'ordre du groupe de monodromie, et de celles en lesquelles D n'est pas lisse (*i.e.* les places où deux des points de branchement se rencontrent).

Théorème 9.15. — *Les seules places éventuellement ramifiées dans l'extension M/K sont les places de S.*

Cet énoncé, démontré par S. Beckmann dans [Bec1], peut être vu comme une conséquence de l'existence d'un espace des modules grossiers $\overline{H}$ pour la catégorie des (G-) revêtements considérés, $\overline{H}$ étant vu comme un revêtement de $\overline{U}_r$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ modérément ramifié le long de la diagonale (*cf.* exposé de S. Flon dans ce volume).

Le théorème précédent est en fait une conséquence d'un résultat plus précis qui concerne la gerbe des modèles [Em2].

Théorème 9.16. — *Sous les hypothèses de l'énoncé précédent, si v n'appartient pas à S, il existe un modèle sur l'extension maximale non ramifiée K_v^{nr} du complété K_v de K en v. De plus il existe un tel modèle qui a bonne réduction en v, et ce modèle est unique à isomorphisme près défini sur K_v^{nr}.*

Contrairement au Théorème 9.15, cet énoncé ne se déduit pas de considérations sur l'espace des modules grossiers. On doit considérer la gerbe au-dessus de l'espace de Hurwitz (en fait la gerbe des modèles sur un anneau suffit ici).

Corollaire 9.17. — *Sous les hypothèses du théorème précédent, si w est une place du corps des modules M au-dessus d'une place de K qui n'est pas une mauvaise place, alors il existe un modèle du (G-) revêtement sur M_w, ayant bonne réduction en w.*

Le modèle obtenu sur K_v^{nr} est « stable », au sens où son corps des modules relativement à l'extension K_v^{nr}/K_v est le même que le corps des modules relativement à l'extension $\overline{K_v}/K_v$. Le corollaire est alors une conséquence facile de l'expression cohomologique (dans un H^2) de l'obstruction à ce que le corps des modules soit un corps de définition, et du fait que le groupe $\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{nr}}/K_v)$ est de dimension cohomologique 1. Comme $\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{nr}}/K_v) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, où k est le corps résiduel, les données de descente sur la fibre générique induisent des données de descente sur la fibre spéciale. D'où la bonne réduction du modèle sur K_v^{nr}.

Remarque 9.18. — Le corollaire a été obtenu initialement pour les G-revêtements de la droite projective seulement [DeHa]. La preuve repose sur des résultats de Beckmann.

On peut aussi regarder plusieurs bonnes places à la fois en utilisant un théorème d'approximation (« raffinement » du théorème de Rumily de Moret-Bailly [Mo-Ba1]).

Théorème 9.19. — *Soit Σ un ensemble fini de bonnes places de K pour le (G-) revêtement $Y \to \mathbb{P}^1$. Il existe alors un modèle sur l'extension maximale de K non ramifiée en les places de Σ, ayant bonne réduction en toute les bonnes places. On peut choisir un tel modèle sur l'extension maximale de M où toutes les places de Σ se décomposent totalement.*

Démonstration. — Soit Σ' l'ensemble des places du corps des modules M au-dessus de Σ. Soit R l'anneau des entiers du corps M où l'on a inversé tous les mauvais premiers. Le Corollaire 9.17 assure que pour toute place v de Σ', il existe un modèle du (G-) revêtement sur le complété R_v de R en v, c'est à dire un objet $\mathrm{Spec}(R_v) \to \mathcal{G}$ de la gerbe des modèles. On en déduit un point $x_v : \mathrm{Spec}(R_v) \to Z$ du schéma (lisse) de présentation de la gerbe $\mathcal{G}$. Soit alors $R^{\Sigma'}$ la clôture intégrale de R dans le corps $M^{\Sigma'}$, extension maximale de M décomposant toutes les places de Σ'. Le Théorème 1.3 de [Mo-Ba1] assure alors l'existence d'un point $x : \mathrm{Spec}\, R^{\Sigma'} \to Z$, approximant v-adiquement les points x_v en toute place v de Σ', et pour tout plongement de $M^{\Sigma'}$ dans M_v. On retiendra de cette conclusion le fait que le point x donne lieu à un (G-) revêtement de la gerbe des modèles défini sur $R^{\Sigma'}$. En particulier ce modèle a bonne réduction en toutes les places de $R^{\Sigma'}$, c'est à dire en toutes les bonnes places. Et l'extension $M^{\Sigma'}/K$ est non ramifiée en les places de Σ, puisque les extensions intermédiaires $M^{\Sigma'}/M$ et M/K sont non ramifiées au-dessus de Σ' et Σ respectivement.

Si on ne se limite plus à la bonne réduction, et que l'on étudie les places v de K où il y a dégénérescence du lieu de branchement (en maintenant la condition que v ne divise pas l'ordre de G), on peut généraliser le théorème 9.15, et calculer explicitement les indices de ramification de v dans l'extension M/K en fonction des indices de ramification géométriques du revêtement $\overline{H} \to \overline{U}^r$ et des ordres de rencontre en v des différents points de branchement.

Dans le précédent Théorème on peut par exemple considérer le cas particulier où le corps des modules est $\mathbb{Q}$ et $\Sigma = \{p\}$, où p n'est pas un mauvais premier. On obtient l'énoncé suivant [DeDoMo-Ba].

Corollaire 9.20. — *Soit $f : Y \to \mathbb{P}^1$ un (G-) revêtement défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de corps des modules $\mathbb{Q}$, et p un nombre premier qui n'est pas mauvais. Alors le (G-) revêtement a un modèle sur $\mathbb{Q}^{tp}$ (qui a bonne réduction en toute les bonnes places).*

Il est intéressant de comparer cet énoncé avec ce qui peut être obtenu par la simple considération des espaces de modules grossiers. Sous les hypothèse du Corollaire, le (G-) revêtement $f : Y \to \mathbb{P}^1$ admet un modèle sur $\mathbb{Q}_p$. D'où l'existence d'un point $\mathbb{Q}_p$-rationnel sur l'espace des modules grossiers H correspondant. Or d'après [Po] une variété lisse, définie sur $\mathbb{Q}$ ayant un point $\mathbb{Q}_p$ rationnel admet un ensemble Zariski-dense de points $\mathbb{Q}^{tp}$-rationnels. Appliqué à notre espace de Hurwitz H, on en déduit qu'il existe des (G-) revêtements « proches » de corps des modules $\mathbb{Q}^{tp}$. Mais ce ne sont pas des modèles du (G-) revêtement initial.

9.3. Approximation dans la gerbe de Hurwitz. — La preuve du Théorème 9.19 et du Corollaire 9.20 repose sur l'application du théorème d'approximation de [MoBa1] à une présentation de la gerbe des modèles d'un (G-) revêtement. Le but de cette section est d'en donner quelques applications à la gerbe de Hurwitz. On utilisera la présentation de cette gerbe donnée dans le paragraphe 5. Une autre approche consiste à utiliser une généralisation de ce théorème d'approximation aux champs [Mo-Ba2], et de l'appliquer directement à la gerbe de Hurwitz [DeDoMo-Ba].

Soit G un groupe fini et $\boldsymbol{C}$ une donnée d'inertie ; et l'on suppose qu'une certaine composante H de l'espace de Hurwitz $H_G^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{C})$ (resp. $H_G^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{C})$) est définie sur $\mathbb{Q}$. Sous ces hypothèses on a le résultat suivant.

Théorème 9.21. — *Soit Σ un ensemble fini de nombres premiers qui ne divisent pas l'ordre de G. On suppose que pour tout $p \in \Sigma$, il existe un (G-) revêtement $f : Y \to \mathbb{P}^1$ défini sur $\mathbb{Q}_p$ (resp. $f : Y \to \mathbb{P}^1$ défini sur $\mathbb{Z}_p$) et correspondant à un point x_p de $H(\mathbb{Q}_p)$ (resp. $H(\mathbb{Z}_p)$). Il existe alors un (G-) revêtement de la catégorie défini sur O^{Σ} (resp. ${O'}^{\Sigma}$), où O^{Σ} (resp. ${O'}^{\Sigma}$) désigne la clôture intégrale de $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}, \frac{1}{\Sigma}]$ (resp. $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$) dans l'extension maximale de $\mathbb{Q}$ décomposant toutes les places de Σ. En particulier, le (G-) revêtement en question a bonne réduction en toute place ne divisant pas l'ordre de G et n'induisant pas une place de Σ (resp. ne divisant pas l'ordre de G).*

La preuve est similaire à celle du Théorème 9.19 ; elle utilise la présentation H_g^G de $H_G^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{C})$ (resp. $H_G^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{C})$) qui joue le rôle de Z pour la gerbe $\mathcal{G}$. Le cas particulier où $\Sigma = \varnothing$ donne le corollaire suivant.

Théorème 9.22. — *Il existe un (G-) revêtement de la catégorie $\mathcal{H}_G^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{C})$ (resp. $\mathcal{H}_G^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{C})$) ayant bonne réduction en toute place ne divisant pas l'ordre de G.*

Références

[Be] J. Bertin, *Compactification des schémas de Hurwitz*, CRAS **322** (1996), 1063–1066.

[BeMéz1] J. Bertin, A. Mézard, *Déformation formelle des revêtements sauvagement ramifiés*, Inventiones Mathematicae **141** (2000), 195–238.

[BeMéz2] J. Bertin, A. Mézard, *Déformation formelle de revêtements ; un principe local-global*, Prépublication du MSRI **055** (1999), 1–25.

[Bec1] S. Beckmann, *Ramified primes in the field of moduli of branched coverings of curves*, J. of Algebra **125** (1989), 236–255.

[Bec2] S. Beckmann, *On extensions of number fields obtained by specializing branched coverings*, J. reine und angew. Math. **419** (1991), 27–53.

[Bir] J. Birman, *Braids, links and mapping class groups*, Princeton Univ. Press, Annals of Math. Studies **82** (1974).

[CT] J-L. Colliot-Thélène, *Rational connectedness and Galois covers of the projective line*, Annals of Math., à paraître (2000).

[CoHar] K. Coombes and D. Harbater, *Hurwitz families and arithmetic Galois groups*, Duke Math. J. **52** (1985), 821–839.

[De1] P. Dèbes, *Groupes de Galois sur $K(T)$*, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux **2** (1990), 229–243.

[De2] P. Dèbes, *Covers of $\mathbb{P}_1$ over the p-adics*, Contemp. Math. **186** (1995), 217–238.

[De3] P. Dèbes, *Arithmétique et espace des modules de revêtements ; in Number theory in progress, éd. K. Györy, H. Iwaniec, J. Urbanowics*, Walter de Gruyter (1999), 75–102.

[De4] P. Dèbes, *Galois covers with prescribed fibers : the Beckmann-Black problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **28** (1999), 273–286.

[DeDo] P. Dèbes, J.-C. Douai, *Gerbes and covers*, Comm. Algebra **27** (1999), 577–594.

[DeDoEm] P. Dèbes, J.-C. Douai, M. Emsalem, *Familles de Hurwitz et cohomologie non abélienne*, Annales de l'Inst. Fourier, **50** (2000), 113–149.

[DeDoMB] P. Dèbes, J-C. Douai, L. Moret-Bailly, *Descent problems over large fields*, manuscrit (2000).

[DeHa] P. Dèbes, D. Harbater, *Fields of definition of p-adic covers*, J. rein. angew. math., **498** (1998), 223–236.

[DeFr] P. Dèbes, M. Fried, *Non rigid situations in constructive Galois theory*, Pacific J. of Math. **163** (1994), 81–122.

[DelMum] P. Deligne, D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publications Mathématiques de l'IHES **36** (1969), 75–109.

[Des] B. Deschamps, *Existence de points p-adiques pour tout p sur un espace de Hurwitz ; in Recents developments in inverse Galois theory, éd. M. Fried*, Contemp. Math., 186 (1995), 239–247.

[Do] J.-C. Douai, *Descente, champs et gerbes de Hurwitz*, dans ce volume, (2000)

[Ek] T. Ekedahl, *Boudary behaviour of Hurwitz schemes ; in the moduli spaces of curves (éd. R. Dijgraaf, C. Faber, G. van der Geers*, Progr. Math., 129 (1995), 173–198.

[Em1] M. Emsalem, *Familles de revêements de la droite projective*, Bull. Soc. Math. de France **123** (1995), 47–85.

[Em2] M. Emsalem, *On reduction of Covers of Arithmetic Surfaces*, Contemporary Mathematics, (1999).

[Fr1] M. Fried, *Fields of definition of function fields and Hurwitz families, Groups as Galois groups,* Comm. in Alg., **1** (1977), 17–82.

[Fr2] M. Fried, *On reduction of the inverse Galois problem to simple groups*, Proc. of the Rutgers group theory tear, (1985), 289–301.

[Fr3] M. Fried, *Introduction to modular towers*, Contemporary Math., **186** (1995), 111–171.

[FrBi] M. Fried, R. Biggers, *Moduli spaces of covers and Hurwitz monodromy group,* J. reine und angew. Math, **335** (1982), 87–121.

[FrJa] M. Fried, M. Jarden, *Field arithmetic*, Springer Verlag (1986).

[FrVö] M. Fried and H. Völklein, *The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces*, Math. Annalen, **290** (1991), 771–800.

[Fu] W. Fulton, *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves*, Annals of Math., **90** (1969), 543–573.

[GeHeVdP] L. Gerritzen, F. Herrlich, M. Van der Put, *Stable n-pointed trees of projective lines*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math., **50** (1988), 131–163.

[Gr] A. Grothendieck, *Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, 1, Descente par morphismes fidèlement plats*, Séminaire Bourbaki, **90** (1959).

[GrMa] B. Green, M. Matignon, *Liftings of Galois covers of smooth curves*, Comp. Math. **113** (1998), 239–274.

[GrPoRo] B. Green, F. Pop, P. Roquette, *On Rumely's local global principle*, Jahresber. Deutsch. Math. Verein. **97** (1995), 43–74.

[Ha] D. Harbater, *Galois covers of the arithmetic line*, Lecture Note in Math. **1240** (1987) (éd. D. V. et G. V. Chudnovsky), 239–274.

[HaSt] D. Harbater, K. Stevenson, *Patching and Thickening Problems*, J. of Algebra **212** (1999), 272–304.

[He] Y. Henrio, *Arbres de Hurwitz et automorphismes d'ordre p des disques et des couronnes p-adiques formels*, Thèse de Doctorat, Bordeaux (1999).

[Hur] A. Hurwitz, *Über Riemannsche Flächen mit gegeben Veitsweigungspunkten*, Math. Annalen, **39** (1891), 1–61.

[Ke-Mo] S. Keel et S. Mori, *Quotients by groupoids*, Annals of Math. **85** (1997), 193–213.

[LaMo-Ba] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Springer Verlag (2000).

[MaMa] H. Matzat, G. Malle, *Inverse Galois theory*, (1999).

[Méz] A. Mézard, *Fundamental group*, Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique, J.-B. Bost, F. Loeser, M. Raynaud éd., Progress in Math. **187** (2000), 141–155.

[Mo-Ba1] L. Moret-Bailly, *Problèmes de Skolem sur les champs algébriques*, Prépublication (1999).

[Mo-Ba2] L. Moret-Bailly, *Groupe de Picard et problèmes de Skolem*, Annales de l'E. N. S. **22** (1989), 181–194.

[Mo-Ba3] L. Moret-Bailly, *Construction de revêtements de courbes pointées*, Prépublication de l'Inst. de recherche mathématique de Rennes (2000).

[Mum] D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, Springer Verlag (1965).

[Po] F. Pop, *Embedding problems over large fields*, Annals of Math., **144** (1996), 1–35.

[Ra] Michèle Raynaud, *Propriétés cohomologiques des faisceaux d'ensembles et des faisceaux de groupes non commutatifs*, SGA 1, Exp. XIII, 344–439.

[Ray1] M. Raynaud, *p-Groupes et réduction semi-stable des courbes*, The Grothendieck Festschrift, **3** (1990), 179–197.

[Ray2] M. Raynaud, *Revêtements de la droite affine en caractéristique* $p > 0$ *et conjecture d'Abhyankar*, Inv. Math., **116** (1994), 425–462.

[Ray3] M. Raynaud, *Spécialisation de revêtements en caractéristique* p, Annales E.N.S., **22** (1999), 345–375.

[Sa1] M. Saïdi, *Revêtements modérés et groupe fondamental de graphe de groupes*, Compositio Mathematica, **107** (1997), 319–338.

[Sa2] M. Saïdi, *p-Rank and semi-stable reduction of curves II*, Math. Annal., **312** (1998), 625–639.

[Sa3] M. Saïdi, *Galois covers of degree p and semi-stable reduction of curves*, prépublication, (1999).

[Se] J.-P. Serre, *Topics in Galois theory*, Notes written by Henri Darmon, Jones and Bartlett Publ., Boston, (1992).

[SGA] A. Grothendieck, *Séminaire de Géométrie Algébrique*, Lecture Notes in Math., **224** (1971).

[Th] J.G. Thomson, *Some finite groups which occur as* $Gal(L/K)$ *where* $K \leqslant \mathbb{Q}(\mu_n)$, J. of Algebra, **89** (1984), 437–499.

[Vi] A. Vistoli, *Intersection theory on algebraic stacks and their moduli spaces*, Inv. Math., **97** (1989), 613–670.

[We1] S. Wewers, *Construction of Hurwitz spaces*, (Thèse), Inst. Exp. Math. Essen, (1998).

[We2] S. Wewers, *Exposé* II, MSRI, Berkeley.

M. Emsalem, Laboratoire AGAT, UFR de Mathématiques, USTL, 59655 Villeneuve d'Ascq, France
E-mail : emsalem@gat. univ-lille1.fr