

FONCTIONS ET INTÉGRALES ELLIPTIQUES

Ahmed Lesfari

Abstract. This paper presents the basic ideas and properties of elliptic functions and elliptic integrals as an expository essay. It explores some of their numerous consequences and includes applications to some problems such as the simple pendulum and the Euler rigid body motion.

1 Fonctions elliptiques

Les fonctions elliptiques interviennent dans des domaines très divers des mathématiques [2, 3, 6, 10, 11]. Le but ici est de montrer quelques résultats fondamentaux [1, 4, 12] sur ces fonctions et de les appliquer dans les sections suivantes à des situations concrètes. Soient ω_1 et ω_2 deux nombres complexes, \mathbb{R} -linéairement indépendants (c'est-à-dire tels que ω_2 n'est pas nulle et que le quotient $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ ne soit pas réel ou ce qui revient au même que la partie imaginaire $\text{Im} \frac{\omega_1}{\omega_2}$ du rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ n'est pas nulle). On considère le réseau

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 = \{\omega \equiv m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\},$$

c'est un sous-groupe discret de \mathbb{C} et il forme un ensemble de parallélogrammes.

Définition 1. On appelle *parallélogramme fondamental engendré par ω_1 et ω_2* tout parallélogramme Π de sommets d'affixes $z_0, z_0 + \alpha\omega_1, z_0 + \alpha\omega_2, z_0 + \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$ avec $z_0 \in \mathbb{C}, 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Autrement dit, il est défini par le compact

$$\Pi = \{z_0 + \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 : z_0 \in \mathbb{C}, \alpha, \beta \in [0, 1]\}.$$

Le quotient de \mathbb{C} par la relation d'équivalence déterminée par Λ :

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_1 \sim z_2 \text{ mod. } \Lambda \iff z_1 - z_2 \in \Lambda,$$

est un tore noté \mathbb{C}/Λ . Celui-ci est homéomorphe à $S^1 \times S^1$, visualisable par le recollement deux à deux des côtés d'un carré ou parallélogramme.

2000 Mathematics Subject Classification : 33E05.

Keywords : Elliptic functions ; Elliptic integrals.

<http://www.utgjiu.ro/math/sma>

Définition 2. On dit qu'une fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} est doublement périodique de période ω_1 et ω_2 , si et seulement si,

$$f(z + \omega_1) = f(z), \quad f(z + \omega_2) = f(z).$$

Autrement dit, si et seulement si,

$$f(z + \omega) = f(z), \quad \forall \omega \in \Lambda.$$

On dit aussi que f est Λ -périodique.

Remarque 3. Les éléments ω_1 et ω_2 ne sont pas uniques. Plus précisément, si ω_1 et ω_2 sont deux périodes de f , alors $-\omega_1$ et $-\omega_2$ sont également deux périodes de f et toute période de f s'écrit sous la forme

$$\omega = m\omega_1 + n\omega_2, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

En effet, pour les entiers positifs c'est évident. Pour les entiers négatifs, on a pour $k = 1, 2$:

$$f(z - \omega_k) = f((z - \omega_k) + \omega_k) = f(z).$$

Définition 4. On dit qu'une fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} est elliptique si et seulement si elle est méromorphe et doublement périodique.

Proposition 5. Il n'existe pas de fonction elliptique f non constante qui soit holomorphe sur \mathbb{C} . Autrement dit, toute fonction elliptique f n'ayant pas de pôles est une constante.

Démonstration. Si f n'a pas de pôles, alors elle est bornée dans le parallélogramme fondamental Π car celui-ci est compact. Or la fonction f est doublement périodique, donc elle est bornée sur \mathbb{C} car tout point de \mathbb{C} se ramène à un point de Π en lui appliquant une translation du réseau. Par conséquent, f est constante en vertu du théorème de Liouville.

Remarque 6. On déduit de la proposition précédente qu'une fonction elliptique non constante possède au moins un pôle dans le parallélogramme fondamental.

Proposition 7. Toute fonction elliptique non constante a un nombre fini de pôles et un nombre fini de zéros dans un parallélogramme fondamental.

Démonstration. Rappelons qu'un point $a \in \Omega \subset \mathbb{C}$ est un point d'accumulation s'il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\Omega \setminus \{a\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Soit $P(f) \equiv f^{-1}(\{\infty\})$ l'ensemble des pôles de la fonction $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Comme f est méromorphe, alors l'ensemble $P(f)$ n'admet pas de point d'accumulation. Donc f a un nombre fini de pôles car sinon $P(f)$ doit contenir le point limite (point d'accumulation) et cela est impossible car le point d'accumulation des pôles est une

singularité essentielle. Soit maintenant $Z(f) = \{b \in \Omega : f(b) = 0\}$, l'ensemble des zéros de f . Comme f n'est pas constante, l'ensemble $Z(f)$ n'admet pas de point d'accumulation. Dès lors, pour tout point $b \in Z(f)$, il existe un unique entier positif N tels que : $f(z) = (z - b)^N g(z)$ où g est une fonction holomorphe sur Ω avec $g(b) \neq 0$. En fait l'ensemble $Z(f)$ est au plus dénombrable.

Remarque 8. *Comme remarque, notons que le nombre de zéros et de pôles d'une fonction elliptique non constante est dénombrable. En effet, l'ensemble des parallélogrammes fondamentals forme un recouvrement dénombrable de \mathbb{C} et le résultat découle de la proposition précédente.*

Proposition 9. *Soit f une fonction elliptique et désignons par b_1, \dots, b_m les pôles de f (chaque pôle étant compté avec multiplicité), alors*

$$\sum_{k=1}^m \text{Rés}(f, b_k) = 0.$$

Démonstration. Soit $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ la frontière du parallélogramme fondamental Π relativement au réseau Λ , avec

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= [z_0, z_0 + \omega_1], \\ \gamma_2 &= [z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2], \\ \gamma_3 &= [z_0 + \omega_1 + \omega_2, z_0 + \omega_2], \\ \gamma_4 &= [z_0 + \omega_2, z_0]. \end{aligned}$$

Supposons tout d'abord que f n'a pas de pôles sur la frontière γ . D'après le théorème des résidus, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \text{Rés}(f, b_k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz, \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz \right). \end{aligned}$$

En vertu de la périodicité de f et des sens opposés de l'intégrale de f sur γ_1 et γ_2 ,

on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_3} f(z)dz &= \int_{[z_0+\omega_1+\omega_2, z_0+\omega_2]} f(z)dz, \\
 &= \int_{[z_0+\omega_1, z_0]} f(u + \omega_2)du, \quad u \equiv z - \omega_2, \\
 &= \int_{[z_0+\omega_1, z_0]} f(u)du, \\
 &= - \int_{[z_0, z_0+\omega_1]} f(u)du, \\
 &= - \int_{\gamma_1} f(z)dz.
 \end{aligned}$$

De même, on a

$$\int_{\gamma_4} f(z)dz = - \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

et par conséquent $\sum_{k=1}^m \text{Rés}(f, b_k) = 0$. Passons maintenant au cas où il y'a des pôles sur la frontière γ du parallélogramme fondamental Π . Alors dans ce cas, on considère un autre parallélogramme proche de Π contenant tous les pôles se trouvant dans Π et de telle façon que sa frontière ne contienne plus de pôles. On peut toujours, d'après la proposition 7, obtenir ce parallélogramme (et donc sa frontière) par translation du sommet d'affixe z_0 de Π . Le reste consiste à utiliser un raisonnement similaire au précédent.

Remarque 10. *Notons que d'après la remarque 8 et la proposition précédente, il n'existe pas de fonction elliptique de premier ordre, i.e., une fonction elliptique ne peut pas avoir un pôle simple dans un parallélogramme fondamental. Elle doit avoir au moins deux pôles simples ou au moins un pôle non simple dans un parallélogramme fondamental. En effet, avec les notations de la proposition précédente, si $m = 1$ alors cela signifie que la fonction f a un pôle simple dans le parallélogramme fondamental, ce qui contredit le résultat de la proposition.*

Remarque 11. *L'ensemble des fonctions elliptiques par rapport à Λ est un sous corps du corps des fonctions méromorphes (la somme, le produit et le quotient de deux fonctions elliptiques de mêmes périodes est une fonction elliptique). En dérivant l'expression*

$$f(z + \omega) = f(z), \quad \forall \omega \in \Lambda,$$

on obtient

$$f^{(n)}(z + \omega) = f^{(n)}(z), \quad \forall \omega \in \Lambda,$$

ce qui montre que la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction elliptique est aussi une fonction elliptique.

Proposition 12. *Soit f une fonction elliptique non constante. Désignons par a_1, \dots, a_l les zéros de f de multiplicité n_1, \dots, n_l respectivement et par b_1, \dots, b_m les pôles de f de multiplicité p_1, \dots, p_m respectivement. Alors*

$$\sum_{k=1}^l n_k = \sum_{k=1}^m p_k.$$

Autrement dit, le nombre de zéros d'une fonction elliptique non constante est égal au nombre de ses pôles dans le parallélogramme fondamental.

Démonstration. D'après le principe de l'argument, on a

$$\begin{aligned} \text{Nombre de zéros de } f - \text{Nombre de pôles de } f &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \\ &= \sum_{k=1}^m \text{Rés} \left(\frac{f'}{f}, b_k \right), \\ &= 0, \end{aligned}$$

en vertu de la proposition 9 car d'après la proposition précédente $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est une fonction elliptique et a les mêmes périodes que $f(z)$. Par conséquent, $\sum_{k=1}^l n_k = \sum_{k=1}^m p_k$.

Proposition 13. *Soit f une fonction elliptique. Désignons par a_1, \dots, a_l les zéros de f de multiplicité n_1, \dots, n_l respectivement et par b_1, \dots, b_m les pôles de f de multiplicité p_1, \dots, p_m respectivement. Alors*

$$\sum_{k=1}^l n_k a_k - \sum_{k=1}^m p_k b_k = \text{période}.$$

Démonstration. Rappelons que si une fonction $\varphi(z)$ est holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$ et continue sur \bar{D} , alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^l n_k \varphi(a_k) - \sum_{k=1}^m p_k \varphi(b_k).$$

On pose dans la suite $\varphi(z) = z$ et on utilise les mêmes notations et arguments de la preuve de la proposition 12. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l n_k a_k - \sum_{k=1}^m p_k b_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{\gamma_3} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta &= \int_{\gamma_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{\gamma_1} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta, \quad \zeta \equiv z + \omega_2, \\
 &= \int_{\gamma_1} (z - \zeta) \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \\
 &= -\omega_2 \int_{z_0}^{z_0 + \omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \\
 &= -\omega_2 \ln \frac{f(z_0 + \omega_1)}{f(z_0)}, \\
 &= 2\pi i n' \omega_2, \quad n' \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\int_{\gamma_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{\gamma_4} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 2\pi i n \omega_2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^l n_k a_k - \sum_{k=1}^m p_k b_k &= n\omega_1 + n'\omega_2, \\
 &= \omega, \\
 &= \text{période}.
 \end{aligned}$$

Proposition 14. Soient f et g deux fonctions elliptiques ayant mêmes périodes. Alors, il existe une relation algébrique de la forme

$$P(f(z), g(z)) = 0,$$

où P est un polynôme à deux indéterminées et à coefficients constants.

Démonstration. Soient a_k , $1 \leq k \leq m$, les points du parallélogramme fondamental en lesquels f et (ou) g ont des pôles d'ordre maximum p_k , $1 \leq k \leq m$. Soit $Q(Z, W)$ un polynôme sans terme constant, de degré n par rapport à Z et W . L'idée de la preuve est la suivante : On construit le polynôme Q de telle façon que les hypothèses de la proposition 5 concernant la fonction

$$F(z) = Q[f(z), g(z)],$$

soient satisfaites. La fonction $F(z)$ se réduit donc à une constante C et il suffit de choisir $P = Q - C$. En effet, la fonction $F(z)$ est elliptique avec les mêmes périodes que les fonctions $f(z)$, $g(z)$ et ne peut admettre de pôles qu'aux points a_k . Les développements des fonctions f et g en séries de Laurent au voisinage de a_k ne

contiennent que des termes en $\frac{1}{(z-a_k)^j}$ avec $j \leq p_k$. La fonction $F(z)$ ne peut avoir des pôles qu'aux points a_k et son développement en série de Laurent au voisinage de a_k ne contient que des termes en $\frac{1}{(z-a_k)^j}$ avec $j \leq p$ où n est le degré du polynôme Q et $p = p_1 + \dots + p_m$ est la somme des ordres maximaux des fonctions f, g aux points a_k . On choisit les coefficients du polynôme Q de manière à ce que les parties principales de son développement en série de Laurent au voisinage de a_k soient nulles. Autrement dit, de sorte que le développement en question ne contient pas des termes en $\frac{1}{(z-a_k)^j}$ avec $j \leq p$. Donc l'élimination des pôles de la fonction $F(z)$ fournira un système homogène de np équations linéaires par rapport aux coefficients du polynôme Q . Ce dernier étant de degré n et comme il est supposé sans terme constant, on aura donc $\frac{n(n+3)}{2}$ coefficients. En prenant $\frac{n(n+3)}{2} > np$, on en déduit que le nombre des coefficients (inconnues) est supérieur à celui des équations. Par conséquent, le système en question admet au moins une solution non triviale (i.e., non nulle). Finalement d'après la proposition 5, la fonction $F(z) = Q[f(z), g(z)]$, est une constante C et il suffit de choisir $P = Q - C$.

Corollaire 15. *Toute fonction elliptique $f(z)$ satisfait à une équation différentielle de la forme*

$$P(f(z), f'(z)) = 0,$$

où P est un polynôme à deux indéterminées et à coefficients constants.

Démonstration. D'après la remarque 11, la dérivée $f'(z)$ de la fonction elliptique $f(z)$ est aussi une fonction elliptique et il suffit de poser $g(z) = f'(z)$ dans la proposition précédente.

2 Fonctions de Weierstrass

Dans cette section on étudiera tout d'abord la fonction \wp de Weierstrass [5]; c'est une fonction elliptique d'ordre 2 qui a un pôle double à l'origine en tout point du parallélogramme fondamental. Ensuite on introduit les deux autres fonctions de Weierstrass : la fonction ζ et la fonction σ . Contrairement à la fonction \wp , la fonction ζ est une fonction méromorphe avec un pôle simple dans le parallélogramme fondamental tandis que la fonction ζ est une fonction holomorphe partout. Les fonctions de Weierstrass interviennent souvent lors de la résolution de problèmes théoriques.

2.1 Fonction \wp de Weierstrass

La fonction \wp de Weierstrass est définie par

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \quad (1)$$

où $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{\omega = m\omega_1 + n\omega_2, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$, est le réseau engendré par deux nombres complexes ω_1 et ω_2 différents de 0 tels que : $\text{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$.

Proposition 16. *La série (1) converge normalement sur tout compact ne rencontrant pas le réseau Λ , i.e., sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \Lambda$.*

Démonstration. On montre que la série converge normalement sur tout disque compact $\{z : |z| \leq r\}$. Notons que tout disque fermé ne contient qu'un nombre fini d'éléments de Λ et que la nature de la série ne change évidemment pas si on enlève ces éléments. Pour $|\omega|$ suffisamment grand, on choisit $|\omega| \geq 2r$ pour tous les ω sauf un nombre fini ; ceux qui sont dans le disque. (Notons que $|x\omega_1 + y\omega_2|$ est une norme sur \mathbb{R}^2 . Comme elle est équivalente à $\sqrt{x^2 + y^2}$, on peut donc trouver un $c > 0$ tel que : $|m\omega_1 + n\omega_2| \geq c\sqrt{m^2 + n^2}, \forall m, n$.) On a

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \frac{|z|}{|\omega^3|} \cdot \frac{|2 - \frac{z}{\omega}|}{|1 - \frac{z}{\omega}|^2}.$$

Or $|z| \leq r, |2 - \frac{z}{\omega}| \leq \frac{5}{2}, |1 - \frac{z}{\omega}| \geq \frac{1}{2}$, donc

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \leq \frac{10r}{|\omega|^3},$$

et il suffit de prouver que la série

$$\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^3},$$

converge. Pour celà, considérons le parallélogramme

$$\Lambda_k = \{x\omega_1 + y\omega_2 : \sup\{|x|, |y|\} = k\},$$

où n est un entier. Sur le parallélogramme Λ_1 de cotés $2\omega_1$ et $2\omega_2$ dont le centre est 0, il y a 8 points de Λ . Soit d la plus courte distance du point $z = 0$ aux points de Λ_1 . Pour chacun de ces 8 points, la distance à 0 est $\geq d$, d'où $\frac{1}{|\omega|^3} \leq \frac{1}{d^3}$ et

$$\sum_{\omega \in \Lambda_1 \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \frac{8}{d^3}.$$

Sur le parallélogramme Λ_2 (image de Λ_1 dans l'homothétie de centre 0, de rapport 2), il y a $8 \times 2 = 16$ points de Λ . Soit $2d$ la plus courte distance du point $z = 0$ aux points de Λ_2 . Pour chacun de ces 8 points, la distance à 0 est $\geq 2d$, d'où

$$\sum_{\omega \in \Lambda_2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \frac{8 \times 2}{2^3 d^3} = \frac{8}{2^2 d^3}.$$

En général sur le parallélogramme Λ_k (image de Λ_1 dans l'homothétie de centre 0, de rapport k), il y a $8k$ points de Λ et pour chacun de ces points, la distance à 0 est $\geq kd$. Dès lors,

$$\sum_{\omega \in \Lambda_k \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \frac{8k}{k^3 d^3} = \frac{8}{k^2 d^3}.$$

Ainsi la série

$$\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega^3|},$$

est majorée par la série convergente

$$\frac{8}{d^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

et par conséquent elle converge aussi en vertu du critère de comparaison.

Proposition 17. $\wp(z)$ est une fonction elliptique de périodes ω_1 et ω_2 . Elle est paire et admet des pôles doubles aux points $\omega \in \Lambda$, dont le résidu est nul. En outre, $\wp'(z)$ est une fonction doublement périodique et elle est impaire.

Démonstration. Notons tout d'abord que la fonction $\wp(z)$ est paire :

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - (-\omega))^2} - \frac{1}{(-\omega)^2} \right) = \wp(z),$$

car il suffit de remplacer ω par $-\omega$. La dérivée de la fonction $\wp(z)$ est

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z - \omega)^3} = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3}.$$

La fonction $\wp'(z)$ est doublement périodique de périodes ω_1 et ω_2 . En effet, on a

$$\wp'(z + \omega_1) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - (\omega - \omega_1))^3} = \wp'(z), \quad (2)$$

car $\omega - \omega_1$ est aussi une période. De façon analogue, on montre que

$$\wp'(z + \omega_2) = \wp'(z), \quad (3)$$

et donc

$$\wp'(z + \omega) = \wp'(z), \quad \forall \omega \in \Lambda.$$

En outre la fonction $\wp'(z)$ est impaire :

$$\wp'(-z) = -\wp'(z).$$

Montrons maintenant que $\wp(z)$ est une fonction elliptique de périodes ω_1 et ω_2 . En intégrant les relations (2) et (3), on obtient

$$\wp(z + \omega_1) - \wp(z) = C_1,$$

$$\wp(z + \omega_2) - \wp(z) = C_2,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. Posons $z = -\frac{\omega_1}{2}$ et $z = -\frac{\omega_2}{2}$ (rappelons que ces points ne sont pas des pôles de $\wp(z)$) dans la première et seconde équation respectivement :

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) = C_1,$$

$$\wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\omega_2}{2}\right) = C_2.$$

Or on a vu ci-dessus que la fonction $\wp(z)$ est paire, donc $C_1 = C_2 = 0$ et par conséquent

$$\wp(z + \omega_1) = \wp(z),$$

$$\wp(z + \omega_2) = \wp(z),$$

i.e., la fonction $\wp(z)$ est doublement périodique de périodes ω_1 et ω_2 . D'après la proposition 16, la série (1) de fonctions méromorphes converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ et par conséquent sa somme $\wp(z)$ est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} . On en déduit que $\wp(z)$ est une fonction elliptique de périodes ω_1 et ω_2 . Notons enfin qu'au voisinage de $z = \omega$, on a

$$\wp(z) = \frac{1}{(z - \omega)^2} + \text{fonction holomorphe},$$

ce qui signifie que les points $\omega \in \Lambda$ sont des pôles doubles dont le résidu est nul.

Proposition 18. *Le développement de $\wp(z)$ en série de Laurent au voisinage du point 0 est donné par*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)G_{2k+2}z^{2k},$$

où

$$G_k \equiv G_k(\Lambda) = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^k}, \quad k \geq 4$$

et $G_k = 0$ pour k impaire.

Démonstration. Au voisinage de $z = 0$, on a

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + f(z),$$

où $f(z)$ est une fonction holomorphe. On a

$$f(z) = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

avec $f(0) = 0$. Comme $\wp(z)$ est une fonction paire, alors au voisinage de $z = 0$ le développement de $f(z)$ en série de Laurent a la forme

$$f(z) = a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots + a_{2k} z^{2k} + \dots,$$

avec

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{g''(0)}{2} = 3 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \\ a_4 &= \frac{g^{(4)}(0)}{4!} = 5 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}, \\ &\vdots \\ a_{2k} &= \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} = (2k + 1)! \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^{2k+2}}, \end{aligned}$$

Donc au voisinage de $z = 0$, $\wp(z)$ admet un développement en série de Laurent :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k + 1) G_{2k+2} z^{2k},$$

avec

$$G_k \equiv G_k(\Lambda) = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^k}, \quad k \geq 4.$$

Remarque 19. *Donnons une autre preuve similaire à la précédente. Rappelons que :*

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad |z| < 1,$$

et

$$\frac{1}{(1 - z)^2} = \left(\frac{1}{1 - z} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1) z^k, \quad |z| < 1.$$

Donc pour $|z| < \omega$, on a

$$\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\omega}\right)^2} - 1 \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + 1}{\omega^{k+2}} z^k.$$

Dès lors

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{\omega^{k+2}} z^k.$$

En tenant compte du fait que la fonction $\wp(z)$ est paire et que cette double série est absolument convergente, on obtient

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3z^2 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4} + 5z^4 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6} + \dots$$

Définition 20. Les deux nombres complexes g_2 et g_3 définis par les séries (dites d'Eisenstein) :

$$g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4},$$

$$g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6},$$

s'appellent invariants (de Weierstrass) de la fonction $\wp(z)$.

Proposition 21. La fonction $\wp(z)$ est solution dans Λ de l'équation différentielle :

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - g_2\wp(z) - g_3, \quad (4)$$

où g_2 et g_3 sont les invariants de la fonction $\wp(z)$.

Démonstration. En utilisant les notations g_2 et g_3 introduites dans la définition 20, on réécrit la fonction $\wp(z)$ sous la forme

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \dots$$

Les conditions de dérivation terme à terme de cette série étant satisfaites, on obtient

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + \frac{g_2}{10}z + \frac{g_3}{7}z^3 + \dots$$

En élevant $\wp'(z)$ au carré et $\wp(z)$ au cube, on obtient

$$(\wp'(z))^2 = \frac{4}{z^6} \left(1 - \frac{g_2}{10}z^4 - \frac{g_3}{7}z^6 + \dots \right),$$

et

$$(\wp(z))^3 = \frac{1}{z^6} \left(1 + \frac{3g_2}{20}z^4 - \frac{3g_3}{28}z^6 + \dots \right).$$

Dès lors,

$$(\wp'(z))^2 - 4(\wp(z))^3 + g_2\wp(z) = -g_3 + \frac{g_2^2}{20}z^2 + \frac{g_2g_3}{28}z^4 + \dots$$

La fonction

$$(\wp'(z))^2 - 4(\wp(z))^3 + g_2\wp(z) + g_3 = \frac{g_2^2}{20}z^2 + \frac{g_2g_3}{28}z^4 + \dots$$

est holomorphe au voisinage de $z = 0$ et elle est nulle en ce point. Or cette fonction est doublement périodique, donc elle est holomorphe au voisinage de tout point du parallélogramme fondamentale et par conséquent elle est holomorphe dans tout \mathbb{C} . Comme elle n'a pas de pôles, elle est bornée dans le parallélogramme fondamentale (un compact) et donc bornée dans \mathbb{C} . D'après le théorème de Liouville, cette fonction est constante et puisqu'elle est nulle en 0, elle est donc identiquement nulle.

Proposition 22. *La fonction $\wp'(z)$ s'annule au point $a \in \mathbb{C}$ tel que : $-a \equiv a \pmod{\Lambda}$, i.e, $2a \in \Lambda$, $a \notin \Lambda$. Autrement dit, modulo Λ , $\wp'(z)$ a trois zéros simples : $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$. En outre, en posant $e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$, $e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$, on obtient*

$$e_1 \neq e_2 \neq e_3,$$

et

$$\begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0, \\ e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{g_2}{4}, \\ e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}. \end{cases}$$

Démonstration. En tenant compte du fait que la fonction $\wp'(z)$ est impaire et qu'elle est doublement périodique, on obtient

$$\begin{aligned} \wp'\left(\frac{\omega_k}{2}\right) &= -\wp'\left(-\frac{\omega_k}{2}\right), \\ &= -\wp'\left(-\frac{\omega_k}{2} + \omega_k\right), \\ &= -\wp'\left(\frac{\omega_k}{2}\right), \end{aligned}$$

où $k = 1, 2$ et donc $\wp'\left(\frac{\omega_k}{2}\right) = 0$. De même, on a

$$\begin{aligned} \wp'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) &= -\wp'\left(-\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \\ &= -\wp'\left(-\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \omega_1 + \omega_2\right), \\ &= -\wp'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \end{aligned}$$

et donc $\wp' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) = 0$. D'après la proposition 21, on a

$$\begin{aligned} (\wp'(z))^2 &= 4(\wp(z))^3 - g_2\wp(z) - g_3, \\ &= 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3). \end{aligned}$$

Montrons que : $e_1 \neq e_2 \neq e_3$. En effet, on a vu que la fonction $\wp(z) - e_j$, ($j = 1, 2, 3$), est elliptique, possède un pôle double et un zéro double. Dès lors, les relations : $\wp(\frac{\omega_1}{2}) - e_1 = 0$ et $\wp'(\frac{\omega_1}{2}) = 0$ signifient que la fonction $\wp(z) - e_1$ a un zéro double en $\frac{\omega_1}{2}$ ce qui implique que : $e_1 \neq e_2$ et $e_1 \neq e_3$ car sinon la fonction $\wp(z)$ aurait plus d'un zéro double, ce qui contredit la multiplicité. Pour les points $\frac{\omega_2}{2}$ et $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ il suffit de faire un raisonnement similaire au précédent. Par conséquent, $e_1 \neq e_2 \neq e_3$. Les autres relations entre les coefficients de l'équation (4) et ses racines, découlent immédiatement des propriétés des racines des équations algébriques.

Remarque 23. En posant $w = \wp(z)$, l'équation (4) s'écrit

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = 4w^3 - g_2w - g_3.$$

Or $z \rightarrow 0$ lorsque $w \rightarrow \infty$, donc

$$z = \int_{\infty}^w \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2w - g_3}}. \quad (5)$$

Autrement dit, la fonction $w = \wp(z)$ s'obtient par inversion de l'intégrale (5) (dite intégrale elliptique sous forme de Weierstrass). Réciproquement, si le polynôme $4w^3 - g_2w - g_3$ n'a pas de zéros multiples (i.e., son discriminant est non nul : $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$), alors l'inversion de l'intégrale (5) conduit à la fonction $\wp(z)$ de Weierstrass.

Proposition 24. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}/\Lambda &\longrightarrow \mathbb{CP}^2, & z &\longmapsto [1, \wp(z), \wp'(z)], z \neq 0, \\ & & 0 &\longmapsto [0, 0, 1], \end{aligned}$$

est un isomorphisme entre le tore complexe \mathbb{C}/Λ et la courbe elliptique \mathcal{E} d'équation affine :

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3. \quad (6)$$

Démonstration. Il suffit de poser $x = \wp(z)$, $y = \wp'(z)$ et d'utiliser l'équation différentielle (4).

Proposition 25. Soient $u, v \notin \Lambda$ et $u \pm v \notin \Lambda$, alors la fonction $\wp(z)$ vérifie la loi d'addition

$$\wp(u) + \wp(v) + \wp(u+v) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right)^2,$$

ainsi que la formule de duplication

$$\wp(2z) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right)^2 - 2\wp(z).$$

Géométriquement, si P_1 et P_2 sont deux points distincts de la courbe elliptique \mathcal{E} d'équation affine (6), alors \mathcal{E} a trois points d'intersection avec la droite sécante $L = P_1P_2$ qui passe par P_1 et P_2 . Dans le cas où $P_1 = P_2$, alors L est la tangente à la courbe au point $P_1 = P_2$. Les coordonnées du 3^{ème} point d'intersection s'expriment comme fonctions rationnelles des deux autres.

Démonstration. Considérons la courbe elliptique \mathcal{E} d'équation affine

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Soient P_1 et P_2 deux points distincts de \mathcal{E} , ayant pour coordonnées $(x_1 = \wp(u), y_1 = \wp'(u))$ et $(x_2 = \wp(v), y_2 = \wp'(v))$ respectivement. Soit $y = ax + b$ l'équation de la droite sécante $L = P_1P_2$ qui passe par P_1 et P_2 . Cette droite coupe la courbe \mathcal{E} de telle façon que :

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 = (ax + b)^2,$$

ou ce qui revient au même

$$\varphi(x) \equiv 4x^3 - g_2x - g_3 - (ax + b)^2 = 0.$$

Considérons maintenant la fonction elliptique

$$f(z) = \wp'(z) - a\wp(z) - b.$$

Comme $\wp'(z)$ a un pôle d'ordre 3 à l'origine, il en est donc de même pour $f(z)$. Cette fonction a donc trois zéros dont deux sont connus : $z = u$, $z = v$ et un troisième que nous noterons provisoirement $z = t$. D'après la proposition 12, la somme des pôles est égale à celui des zéros, d'où

$$0 + 0 + 0 = u + v + t, \quad (\text{mod.}\Lambda),$$

et donc $t = -u - v$. Dès lors,

$$\begin{aligned} 0 &= f(u) = \wp'(u) - a\wp(u) - b, \\ 0 &= f(v) = \wp'(v) - a\wp(v) - b, \\ 0 &= f(-u - v) = -\wp'(-u - v) - a\wp(-u - v) - b, \end{aligned} \tag{7}$$

en tenant compte du fait que $\wp(z)$ est paire et $\wp'(z)$ est impaire. On déduit immédiatement des deux premières équations que :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}, \\ b &= \frac{\wp'(v)\wp(u) - \wp'(u)\wp(v)}{\wp(u) - \wp(v)}. \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans la troisième équation du système (7), on obtient la relation

$$\wp'(u+v) = -\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\wp(u+v) - \frac{\wp'(v)\wp(u) - \wp'(u)\wp(v)}{\wp(u) - \wp(v)}. \quad (8)$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\wp(z)) &= 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 - (a\wp(z) + b)^2, \\ &= 4\wp^3(z) - a^2\wp^2(z) - (g_2 + 2ab)\wp(z) - g_3 - b^2, \end{aligned}$$

et puisque

$$\varphi(\wp(u)) = \varphi(\wp(v)) = \varphi(\wp(u+v)) = 0,$$

alors

$$\wp(u) + \wp(v) + \wp(u+v) = \frac{a^2}{4}.$$

En remplaçant a par sa valeur obtenue précédemment, on obtient

$$\wp(u) + \wp(v) + \wp(u+v) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right)^2. \quad (9)$$

Rappelons que la courbe \mathcal{E} a deux points d'intersection P_1 de coordonnées $(x_1 = \wp(u), y_1 = \wp'(u))$ et P_2 de coordonnées $(x_2 = \wp(v), y_2 = \wp'(v))$ avec la droite sécante $L = P_1P_2$ passant par P_1 et P_2 . On sait qu'il existe un troisième point unique $P_3 \in \mathcal{E} \cap L$ de coordonnées $(x_3 = \wp(w), y_3 = \wp'(w))$. D'après le système (7), les coordonnées (x_3, y_3) s'expriment en fonction de (x_1, y_1) et (x_2, y_2) comme suit

$$\begin{aligned} x_3 &= -(x_1 + x_2) + \frac{1}{4} \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)^2, \\ y_3 &= ax_3 + b = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) \left[-(x_1 + x_2) + \frac{1}{4} \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)^2 \right] + \frac{y_2x_1 - y_1x_2}{x_1 - x_2}. \end{aligned}$$

Dans la formule (9), divisons le numérateur et le dénominateur par $u - v$,

$$\wp(u) + \wp(v) + \wp(u+v) = \frac{1}{4} \left[\frac{\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{u-v}}{\frac{\wp(u) - \wp(v)}{u-v}} \right]^2.$$

En faisant tendre u et v vers z , on obtient

$$\wp(2z) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right)^2 - 2\wp(z),$$

et les coordonnées (x_3, y_3) du troisième point $P_3 \in \mathcal{E} \cap L$ deviennent

$$\begin{aligned} x_3 &= -2x_1 + \frac{1}{4} \left(\frac{12x_1^2 - g_2}{2y_1} \right)^2, \\ y_3 &= -y_1 + \frac{1}{4} \left(\frac{12x_1^2 - g_2}{2y_1} \right) (x_1 - x_3). \end{aligned}$$

Remarque 26. Notons que nous avons choisi a et b de telle façon que :

$$\begin{aligned} 0 &= f(u) = \wp'(u) - a\wp(u) - b, \\ 0 &= f(v) = \wp'(v) - a\wp(v) - b. \end{aligned}$$

Il faut donc que

$$\det \begin{pmatrix} \wp(u) & 1 \\ \wp(v) & 1 \end{pmatrix} = \wp(u) - \wp(v) \neq 0.$$

Evidemment si $\wp(u) - \wp(v) = 0$, alors il suffit de déplacer u et v légèrement de façon à avoir $\wp(u) - \wp(v) \neq 0$. Le système (7) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \wp'(u) & \wp(u) & 1 \\ \wp'(v) & \wp(v) & 1 \\ -\wp'(u+v) & \wp(u+v) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

et comme le déterminant ci-dessus est $\neq 0$, alors on obtient la condition

$$\det \begin{pmatrix} \wp'(u) & \wp(u) & 1 \\ \wp'(v) & \wp(v) & 1 \\ -\wp'(u+v) & \wp(u+v) & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

i.e., la relation (8) obtenue précédemment.

Soit \mathcal{E}_Λ l'ensemble des fonctions elliptiques. Cet ensemble est un espace vectoriel (et même un corps). On note $\mathbb{C}(X)$ l'ensemble des fonctions rationnelles d'une variable.

Proposition 27. On a $\mathcal{E}_\Lambda = \mathbb{C}(\wp, \wp')$, i.e., toute fonction elliptique pour Λ est une fonction rationnelle de $\wp(z)$ et $\wp'(z)$. Plus précisément, l'application

$$\mathbb{C}(X) \times \mathbb{C}(X) \longrightarrow \mathcal{E}_\Lambda, \quad (g, h) \longmapsto f(z) = g(\wp(z)) + \wp'(z)h(\wp(z)),$$

est un isomorphisme entre espaces vectoriels.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{E}_\Lambda$. On peut évidemment écrire f comme une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

$$f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \frac{f(z) - f(-z)}{2}.$$

La fonction $\wp'(z)$ étant impaire, on réécrit la fonction f sous la forme :

$$f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \wp'(z) \left(\frac{f(z) - f(-z)}{2\wp'(z)} \right).$$

Comme les fonctions $\frac{f(z)+f(-z)}{2}$ et $\wp'(z) \left(\frac{f(z)-f(-z)}{2\wp'(z)} \right)$ sont paires, il suffit donc de démontrer que le sous-corps des fonctions elliptiques paires par rapport à Λ est engendré par $\wp(z)$. Soit donc f une fonction elliptique paire telle que : $f \neq 0$, $f \neq \infty$ aux points du parallélogramme des périodes. (i.e., f n'a ni pôle, ni zéro sur le réseau). Si z est un point tel que : $f(z) = 0$, alors comme f est paire, $f(-z) = 0$ et on aura un ordre pair. Dès lors, on peut toujours choisir des points : $z_1, \dots, z_k, -z_1, \dots, -z_k$ qui sont des zéros de f et des points $p_1, \dots, p_k, -p_1, \dots, -p_k$ qui sont des pôles de f . Considérons la fonction

$$g(z) = \prod_{j=1}^k \frac{\wp(z) - \wp(z_j)}{\wp(z) - \wp(p_j)}.$$

La fonction $\wp(z)$ étant paire, alors les zéros (resp. pôles) de $g(z)$ sont $z = z_j$ (resp. p_j) et $z = -z_j$ (resp. $-p_j$). La fonction elliptique $g(z)$ a les mêmes pôles et les mêmes zéros que $f(z)$. Dès lors, la fonction $\frac{g(z)}{f(z)}$ n'a pas de pôles et n'a pas de zéros et d'après le théorème de Liouville elle est constante. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(z) &= Cg(z), \quad (C = \text{constante}), \\ &= C \prod_{j=1}^k \frac{\wp(z) - \wp(z_j)}{\wp(z) - \wp(p_j)}, \\ &= \text{fonction rationnelle de } \wp(z). \end{aligned}$$

Notons que si f a un pôle ou un zéro dans le parallélogramme des périodes, alors pour se débarrasser du pôle ou du zéro, il suffit de multiplier $f(z)$ par $(\wp(z))^j$. Autrement dit, la fonction $f(z)(\wp(z))^j$ est paire, sans pôles, ni zéros en $(0, 0)$ et c'est une fonction rationnelle de $\wp(z)$.

Remarque 28. Posons $\mathcal{E}_\Lambda^+ = \{f \in \mathcal{E}_\Lambda : f \text{ paire}\}$. Dans la preuve précédente, on a montré que : $\mathcal{E}_\Lambda^+ = \mathbb{C}(\wp)$, i.e., le sous-corps des fonctions elliptiques paires par rapport à Λ est engendré par $\wp(z)$.

Remarque 29. D'après la proposition 27, pour caractériser le corps des fonctions elliptiques on forme l'anneau quotient $\mathbb{C}[X, Y]$ par l'idéal principal correspondant à l'équation

$$Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3.$$

Plus précisément, on a

$$\mathcal{E}_\Lambda = \mathbb{C}(\wp, \wp') \simeq \mathbb{C}[X, Y] / (Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3),$$

où $\wp = X$ et \wp' est identifiée à l'image de Y dans le quotient.

2.2 Fonction ζ de Weierstrass

La fonction ζ de Weierstrass (à ne pas confondre avec la fonction ζ de Riemann) est définie par

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \left(\wp(z) - \frac{1}{z^2} \right) dz. \quad (10)$$

Notons que la dérivée de cette fonction est

$$\zeta'(z) = -\wp(z). \quad (11)$$

En remplaçant $\wp(z)$ par (1) et après intégration on obtient

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right). \quad (12)$$

Proposition 30. a) La fonction $\zeta(z)$ est impaire.

b) $\zeta(z)$ n'est pas une fonction elliptique.

c) La fonction $\zeta(z)$ n'est pas périodique et on a

$$\zeta(z + \omega_k) - \zeta(z) = \tau_k, \quad (k = 1, 2) \quad (13)$$

où τ_k sont des constantes.

d) Les nombres ω_k et τ_k sont liés par la relation de Legendre :

$$\tau_1 \omega_2 - \tau_2 \omega_1 = 2\pi i.$$

Démonstration. a) En utilisant (11) et la parité de $\wp(z)$, on obtient

$$\begin{aligned} (\zeta(z) + \zeta(-z))' &= \zeta'(z) - \zeta'(-z), \\ &= -\wp(z) + \wp(z), \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\zeta(z) + \zeta(-z) = C,$$

où C est une constante. En remplaçant $\zeta(z)$ par son expression (10), on obtient

$$\int_{-z}^z \left(\wp(z) - \frac{1}{z^2} \right) dz = C,$$

et

$$0 = \lim_{z \rightarrow 0} \int_{-z}^z \left(\wp(z) - \frac{1}{z^2} \right) dz = C.$$

Par conséquent $\zeta(z) = -\zeta(-z)$, i.e., la fonction $\zeta(z)$ est impaire.

b) En effet, $\zeta(z)$ a des pôles simples en ω et d'après la remarque 10, il n'existe pas

de fonction elliptique de premier ordre.

c) D'après (11) et la fait que $\wp(z)$ est doublement périodique, on a

$$\begin{aligned}(\zeta(z + \omega_k) - \zeta(z))' &= -\wp(z + \omega_k) + \wp(z), \\ &= -\wp(z) + \wp(z), \\ &= 0,\end{aligned}$$

et par conséquent $\zeta(z + \omega_k) - \zeta(z) = \tau_k$, ($k = 1, 2$) où τ_k sont des constantes.

d) Comme dans la preuve de la proposition 9, soit $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ la frontière du parallélogramme fondamental Π relativement au réseau Λ , avec $\gamma_1 = [z_0, z_0 + \omega_1]$, $\gamma_2 = [z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2]$, $\gamma_3 = [z_0 + \omega_1 + \omega_2, z_0 + \omega_2]$ et $\gamma_4 = [z_0 + \omega_2, z_0]$. Supposons que l'unique pôle $z = 0$ de $\zeta(z)$ soit à l'intérieur de ce parallélogramme, sinon on peut toujours en vertu de la proposition 7 choisir un autre parallélogramme proche du précédent de façon à ce que le pôle en question soit à son intérieur. Le résidu de $\zeta(z)$ au point $z = 0$ étant égal à 1, on déduit du théorème des résidus que :

$$\sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} \zeta(z) dz = 2\pi i. \quad (14)$$

Notons que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \zeta(z) dz &= \int_{[z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2]} \zeta(z) dz, \\ &= \int_{[z_0, z_0 + \omega_2]} \zeta(u + \omega_1) du, \quad u \equiv z - \omega_1, \\ &= \int_{[z_0, z_0 + \omega_2]} \zeta(z + \omega_1) dz,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} \zeta(z) dz &= \int_{[z_0 + \omega_1 + \omega_2, z_0 + \omega_2]} \zeta(z) dz, \\ &= \int_{[z_0 + \omega_1, z_0]} \zeta(v + \omega_2) du, \quad v \equiv z - \omega_2, \\ &= - \int_{[z_0, z_0 + \omega_1]} \zeta(z + \omega_2) dz.\end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans eqrefe2.14, on obtient

$$\int_{[z_0, z_0 + \omega_1]} (\zeta(z) - \zeta(z + \omega_2)) dz + \int_{[z_0, z_0 + \omega_2]} (\zeta(z + \omega_1) - \zeta(z)) dz = 2\pi i,$$

et d'après (13),

$$\int_{[z_0, z_0 + \omega_1]} (-\tau_2) dz + \int_{[z_0, z_0 + \omega_2]} \tau_1 dz = 2\pi i,$$

i.e., $\tau_1 \omega_2 - \tau_2 \omega_1 = 2\pi i$.

2.3 Fonction σ de Weierstrass

La fonction σ de Weierstrass est définie par

$$\sigma(z) = ze^{\int_0^z (\zeta(z) - \frac{1}{z}) dz}, \quad (15)$$

et sa dérivée logarithmique est

$$(\ln \sigma(z))' = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z). \quad (16)$$

En remplaçant $\zeta(z)$ par son expression (12), on obtient

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2}. \quad (17)$$

Proposition 31. a) $\sigma(z)$ est une fonction impaire.

b) La fonction $\sigma(z)$ vérifie la relation

$$\sigma(z + \omega_k) = -e^{\tau_k(z + \frac{\omega_k}{2})} \cdot \sigma(z), \quad (k = 1, 2),$$

où τ_k sont des constantes.

Démonstration. a) D'après (17), on a

$$\begin{aligned} \sigma(-z) &= -z \prod_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 + \frac{z}{\omega}\right) e^{-\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2}, \\ &= -z \prod_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\eta}\right) e^{\frac{z}{\eta} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\eta}\right)^2}, \quad \eta \equiv -\omega, \\ &= -\sigma(z). \end{aligned}$$

Une autre preuve consiste à utiliser l'autre définition (15) de $\sigma(z)$. On a

$$\begin{aligned} \sigma(-z) &= -ze^{\int_0^{-z} (\zeta(u) - \frac{1}{u}) du}, \\ &= -ze^{-\int_0^z (\zeta(-v) + \frac{1}{v}) dv}, \quad v \equiv -u \\ &= -ze^{-\int_0^z (-\zeta(v) + \frac{1}{v}) dv}, \quad (\zeta \text{ est impaire}) \\ &= -ze^{\int_0^z (\zeta(v) - \frac{1}{v}) dv}, \\ &= -\sigma(z). \end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned} \frac{\sigma'(z + \omega_k)}{\sigma(z + \omega_k)} &= \zeta(z + \omega_k), \quad \text{d'après (16)} \\ &= \zeta(z) + \tau_k, \quad \text{d'après (13)} \\ &= \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} + \tau_k, \quad \text{d'après (16)}. \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient

$$\ln \sigma(z + \omega_k) = \ln \sigma(z) + \tau_k z C_k, \quad C_k \equiv \text{constante}$$

d'où

$$\sigma(z + \omega_k) = e^{\tau_k z + C_k} \cdot \sigma(z).$$

Pour $z = -\frac{\omega_k}{2}$, on a

$$\sigma\left(\frac{\omega_k}{2}\right) = e^{-\frac{\tau_k \omega_k}{2}} e^{C_k} \sigma\left(-\frac{\omega_k}{2}\right).$$

Or $\sigma(z)$ est impaire, donc

$$e^{C_k} = -e^{\frac{\tau_k \omega_k}{2}},$$

et par conséquent $\sigma(z + \omega_k) = -e^{\tau_k(z + \frac{\omega_k}{2})} \cdot \sigma(z)$, ($k = 1, 2$).

Proposition 32. Soit f une fonction elliptique d'ordre n . Désignons par a_1, \dots, a_n (resp. b_1, \dots, b_n) les zéros (resp. pôles) de f dans le parallélogramme des périodes. Ici tous les zéros et les pôles sont comptés avec leurs ordres de multiplicités. Alors

$$f(z) = C \sigma\left(z + \sum_{j=2}^n a_j - \sum_{j=1}^n b_j\right) \frac{\prod_{j=2}^n \sigma(z - a_j)}{\prod_{j=1}^n \sigma(z - b_j)},$$

où C est une constante.

Démonstration. D'après la proposition 13, on a

$$\sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=1}^n b_j = \text{période} \equiv \omega.$$

D'où

$$\sum_{j=2}^n a_j - \sum_{j=1}^n b_j = \omega - a_1.$$

Considérons la fonction

$$g(z) = \sigma(z + \omega - a_1) \frac{\prod_{j=2}^n \sigma(z - a_j)}{\prod_{j=1}^n \sigma(z - b_j)}.$$

D'après la proposition 31 (point b)), on a

$$\sigma(z + \omega_k) = -e^{\tau_k(z + \frac{\omega_k}{2})} \cdot \sigma(z), \quad (k = 1, 2),$$

et comme $\sigma(z)$ est une fonction impaire, alors

$$\begin{aligned} g(z + \omega_k) &= e^{\tau_k(\sum_{j=1}^n b_j - a_1 + \omega - \sum_{j=2}^n a_j)} \sigma(z + a_1 + \omega) \frac{\prod_{j=2}^n \sigma(z - a_j)}{\prod_{j=1}^n \sigma(z - b_j)}, \\ &= g(z). \end{aligned}$$

La fonction $\frac{f(z)}{g(z)}$ n'a pas de pôles dans le parallélogramme des périodes. Puisque cette fonction est doublement périodique, alors elle est bornée sur \mathbb{C} et par conséquent, elle est constante en vertu du théorème de Liouville.

3 Intégrales elliptiques et fonctions de Jacobi

Dans cette section, on va étudier les fonctions de Jacobi. Ce sont des fonctions elliptiques du second ordre qui ont deux pôles simples dans le parallélogramme des périodes. Ces fonctions interviennent souvent lors de la résolution de problèmes pratiques.

On appelle en général intégrale elliptique [1] une intégrale de la forme

$$\int R(s, \sqrt{P(s)}) ds,$$

où R est une fonction rationnelle à deux variables et $P(s)$ un polynôme de degré 3 ou 4 avec des racines simples. En général, cette intégrale ne s'exprime pas au moyen de fonctions élémentaires c'est-à-dire celles que l'on obtient en appliquant à la variable s les opérations algébriques (addition, soustraction, multiplication, division) en nombre fini, ainsi que les fonctions logarithmiques, trigonométriques et leurs inverses. Nous verrons que les fonctions inverses de ces intégrales elliptiques sont des fonctions elliptiques. On montre qu'à l'aide de transformations élémentaires, une intégrale elliptique se ramène à l'une des formes canoniques (de Legendre) :

$$\begin{aligned} & \int \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}, \\ & \int \sqrt{\frac{1-k^2s^2}{1-s^2}} ds, \\ & \int \frac{ds}{(1+ls^2)\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}, \end{aligned}$$

où k et l sont des constantes. La première de ces intégrales est dite intégrale elliptique de première espèce, la seconde intégrale elliptique de seconde espèce et la troisième intégrale elliptique de troisième espèce. On peut écrire ces intégrales sous une forme un peu différente, en posant $s = \sin \varphi$, et les intégrales précédentes s'écrivent

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \\ & \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \\ & \int \frac{d\varphi}{(1+l \sin^2 \varphi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

En général, on adopte les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 F(k, \varphi) &= \int_0^{\sin \varphi} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \\
 E(k, \varphi) &= \int_0^{\sin \varphi} \sqrt{\frac{1-k^2s^2}{1-s^2}} ds = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \\
 \Pi(k, l, \varphi) &= \int_0^{\sin \varphi} \frac{ds}{(1+ls^2)\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+l \sin^2 \varphi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.
 \end{aligned}$$

On rencontre souvent des intégrales où la borne supérieure est $\varphi = \frac{\Pi}{2}$. Dans ce cas, on écrit

$$\begin{aligned}
 F(k) &= \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \\
 E(k) &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2s^2}{1-s^2}} ds = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,
 \end{aligned}$$

et ces intégrales sont dites intégrales elliptiques complètes respectivement de première et de seconde espèce. On montre que

$$\begin{aligned}
 F(k) &= \frac{\Pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \dots \right), \\
 E(k) &= \frac{\Pi}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right).
 \end{aligned}$$

Considérons des intégrales elliptiques de la forme

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}, \quad 0 \leq k \leq 1$$

et voyons avec un peu plus de détail les propriétés de cette intégrale de première espèce tout en sachant que les propriétés des autres intégrales s'obtiennent de façon similaire. Nous avons vu ci-dessus que le changement de variable $s = \sin \varphi$, ramène cette intégrale à la forme

$$t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Nous envisagerons tout d'abord le cas où $k \neq 0$ et $k \neq 1$. La fonction $t(\varphi)$ définie par cette intégrale est strictement croissante et dérivable. Elle possède donc un inverse, qu'on appelle amplitude de t et qui se note

$$\varphi = \mathbf{am} t = \mathbf{am}(t; k).$$

Notons que si $k = 0$, alors

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \arcsin s,$$

d'où $s = \sin t$. Pour $k \neq 0$, on note par analogie la fonction inverse de l'intégrale en question par

$$s = \mathbf{snt} = \mathbf{sn}(t; k),$$

que l'on nomme fonction elliptique de Jacobi (Lire s, n, t en détachant les lettres). Le nombre k est appelé module de la fonction. Lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur le module k , on écrit tout simplement \mathbf{snt} au lieu de $\mathbf{sn}(t; k)$.

La fonction $\varphi = \mathbf{amt}$ est une fonction impaire strictement croissante de t . Elle satisfait à

$$\mathbf{am}(0) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{am}}{\partial t}(0) = 1.$$

Comme $s = \sin \varphi$, on peut donc écrire $s = \mathbf{snt} = \sin(\mathbf{amt})$.

La deuxième et troisième fonction elliptique de Jacobi sont définies respectivement par

$$\mathbf{cnt} = \mathbf{cn}(t; k) = \cos \mathbf{amt},$$

et

$$\mathbf{dnt} = \mathbf{dn}(t; k) = \sqrt{1 - k^2 \mathbf{sn}^2 t}.$$

Pour \mathbf{cnt} , lire c, n, t en détachant les lettres. De même, pour \mathbf{dnt} , lire d, n, t en détachant les lettres. Là aussi lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur le module k , on écrit tout simplement \mathbf{cnt} (resp. \mathbf{dnt}) au lieu de $\mathbf{cn}(t; k)$ (resp. $\mathbf{dn}(t; k)$).

Proposition 33. *On a*

$$\begin{aligned} \mathbf{sn}^2 t + \mathbf{cn}^2 t &= 1, \\ \mathbf{dn}^2 t + k^2 \mathbf{sn}^2 t &= 1. \end{aligned}$$

Démonstration. En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{cnt} &= \cos \mathbf{amt}, \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 \mathbf{amt}}, \\ &= \sqrt{1 - \mathbf{sn}^2 t}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{dnt} &= \sqrt{1 - k^2 \mathbf{sn}^2 t}, \\ &= \sqrt{1 - k^2(1 - \mathbf{cn}^2 t)}, \\ &= \sqrt{1 - k^2 \mathbf{sn}^2 t}. \end{aligned}$$

Remarque 34. Les périodes de la fonction $\mathbf{sn}t$ sont $4K$ et $2iK$ avec

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = F(k),$$

et

$$K' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-k^2s^2)}} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-r^2)(1-k'^2r^2)}} = F(k'),$$

où $k' = \sqrt{1-k^2}$ et $s = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2r^2}}$. De même, les périodes de \mathbf{cnt} sont $4K$ et $2K+2iK'$ et celles de \mathbf{dnt} sont $2K$ et $4iK'$.

Proposition 35. On a

$$\mathbf{sn}(0) = 0, \quad \mathbf{cn}(0) = 1, \quad \mathbf{dn}(0) = 1.$$

La fonction $\mathbf{sn}t$ est impaire tandis que les fonctions \mathbf{cnt} et \mathbf{dnt} sont paires :

$$\mathbf{sn}(-t) = -\mathbf{sn}t, \quad \mathbf{cn}(-t) = \mathbf{cnt}, \quad \mathbf{dn}(-t) = \mathbf{dnt}.$$

Démonstration. En effet, les trois premières relations sont évidentes. En ce qui concerne les autres, par définition si

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}},$$

alors $s = \mathbf{sn}t$. Dès lors,

$$-t = \int_0^{-s} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}},$$

autrement dit, $\mathbf{sn}(-t) = -s = -\mathbf{sn}t$. Des relations $\mathbf{sn}^2t + \mathbf{cn}^2t = 1$ et $\mathbf{dn}^2t + k^2\mathbf{sn}^2t = 1$, on déduit aisément que

$$\mathbf{cn}(-t) = \sqrt{1 - \mathbf{sn}^2(-t)} = \sqrt{1 - \mathbf{sn}^2t} = \mathbf{cnt},$$

et

$$\mathbf{dn}(-t) = \sqrt{1 - k^2\mathbf{sn}^2(-t)} = \sqrt{1 - k^2\mathbf{sn}^2t} = \mathbf{dnt}.$$

Proposition 36. Les dérivées des trois fonctions elliptiques de Jacobi sont données par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{sn}t &= \mathbf{cnt}.\mathbf{dnt}, \\ \frac{d}{dt}\mathbf{cnt} &= -\mathbf{sn}t.\mathbf{dnt}, \\ \frac{d}{dt}\mathbf{dnt} &= -k^2\mathbf{sn}t.\mathbf{cnt}. \end{aligned}$$

Démonstration. En effet, par définition si

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k'^2s^2)}},$$

alors $s = \mathbf{sn}t$ et on a

$$\frac{d}{dt}\mathbf{sn}t = \sqrt{(1-\mathbf{sn}^2t)(1-k'^2\mathbf{sn}^2t)} = \mathbf{cnt}.\mathbf{dnt}.$$

Comme $\mathbf{sn}^2t + \mathbf{cn}^2t = 1$, alors

$$\mathbf{sn}t \frac{d}{dt}\mathbf{sn}t + \mathbf{cnt} \frac{d}{dt}\mathbf{cnt} = 0,$$

$$\mathbf{sntcntdnt} + \mathbf{cnt} \frac{d}{dt}\mathbf{cnt} = 0,$$

$$\mathbf{sntdnt} + \frac{d}{dt}\mathbf{cnt} = 0.$$

De même, de la relation $\mathbf{dn}^2t + k^2\mathbf{sn}^2t = 1$, on déduit que

$$\mathbf{dnt} \frac{d}{dt}\mathbf{dnt} + k^2\mathbf{sn}t \frac{d}{dt}\mathbf{sn}t = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{dnt} + k^2\mathbf{sntcnt} = 0.$$

Proposition 37. *Les fonctions elliptiques de Jacobi vérifient les équations différentielles :*

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\mathbf{sn}t\right)^2 &= (1-\mathbf{sn}^2t)(1-k^2\mathbf{sn}^2t), \\ \left(\frac{d}{dt}\mathbf{cnt}\right)^2 &= (1-\mathbf{cn}^2t)(k'^2+k^2\mathbf{cn}^2t), \\ \left(\frac{d}{dt}\mathbf{dnt}\right)^2 &= (1-\mathbf{dn}^2t)(\mathbf{dn}^2t-k'^2), \mathbf{cnt}. \end{aligned}$$

où $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Démonstration. En effet, la première équation a été obtenue dans la preuve de la proposition précédente. Concernant les deux autres équations, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\mathbf{cnt}\right)^2 &= \mathbf{sn}^2t.\mathbf{dn}^2t, \quad (\text{proposition 36}) \\ &= (1-\mathbf{cn}^2t)(1-k^2\mathbf{sn}^2t), \quad (\text{proposition 33}) \\ &= (1-\mathbf{cn}^2t)(1-k^2(1-\mathbf{cn}^2t)), \quad (\text{proposition 33}) \\ &= (1-\mathbf{cn}^2t)(k'^2+k^2\mathbf{cn}^2t), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt}\mathbf{dnt}\right)^2 &= k^4\mathbf{sn}^2t.\mathbf{cn}^2t, \quad (\text{proposition 36}) \\
 &= k^2(1-\mathbf{dn}^2t)(1-\mathbf{sn}^2t), \quad (\text{proposition 33}) \\
 &= (1-\mathbf{dn}^2t)(k^2-(1-\mathbf{dn}^2t)), \quad (\text{proposition 33}) \\
 &= (1-\mathbf{dn}^2t)(\mathbf{dn}^2t-k'^2).
 \end{aligned}$$

Corollaire 38. *Les fonctions elliptiques de Jacobi : \mathbf{snt} , \mathbf{cnt} et \mathbf{dnt} s'obtiennent par inversion respectivement des intégrales :*

$$\begin{aligned}
 t &= \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \\
 t &= \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(k'^2+k^2w^2)}}, \\
 t &= \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(w^2-k'^2)}}.
 \end{aligned}$$

où $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Démonstration. En posant $w = \mathbf{sn}$ dans la première équation différentielle (proposition 37), on obtient

$$\frac{dw}{dt} = \sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)},$$

et il suffit de noter que :

$$\begin{aligned}
 w(0) &= \mathbf{sn}(0) = 0, \quad (\text{proposition 35}) \\
 \frac{dw}{dt}(0) &= \mathbf{sn}'(0), \\
 &= \mathbf{cn}(0).\mathbf{dn}(0), \quad (\text{proposition 36}) \\
 &= 1, \quad (\text{proposition 35}).
 \end{aligned}$$

De même, en posant $w = \mathbf{cn}$ dans la seconde équation différentielle (proposition précédente), on obtient

$$\frac{dw}{dt} = \sqrt{(1-w^2)(k'^2+k^2w^2)},$$

et il suffit de noter que :

$$\begin{aligned}
 w(0) &= \mathbf{cn}(0) = 1, \quad (\text{proposition 35}) \\
 \frac{dw}{dt}(0) &= \mathbf{cn}'(0), \\
 &= -\mathbf{sn}(0).\mathbf{dn}(0), \quad (\text{proposition 3.3}) \\
 &= 0, \quad (\text{proposition 35}).
 \end{aligned}$$

Et enfin, en posant $w = \mathbf{dn}$ dans la troisième équation différentielle (proposition précédente), on obtient

$$\frac{dw}{dt} = \sqrt{(1-w^2)(w^2-k'^2)},$$

et il suffit de noter que :

$$\begin{aligned} w(0) &= \mathbf{dn}(0) = 1, & (\text{proposition 35}) \\ \frac{dw}{dt}(0) &= \mathbf{dn}'(0), \\ &= -k^2 \mathbf{sn}(0) \cdot \mathbf{cn}(0), & (\text{proposition 3.3}) \\ &= 0 & (\text{proposition 35}). \end{aligned}$$

Examinons enfin le cas où $k = 0$ et $k = 1$.

Proposition 39. a) Quand $k = 0$, on a

$$\mathbf{am}(t; 0) = t, \quad \mathbf{sn}(t; 0) = \sin t, \quad \mathbf{cn}(t; 0) = \cos t, \quad \mathbf{dn}(t; 0) = 1.$$

b) Lorsque $k = 1$, on a

$$\mathbf{sn}(t; 1) = \tanh t, \quad \mathbf{cn}(t; 1) = \frac{1}{\cosh t}, \quad \mathbf{dn}(t; 1) = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

Démonstration. En effet, les deux premières relations s'obtiennent directement en utilisant la définition de ces intégrales tandis que les autres découlent des relations $\mathbf{sn}^2 t + \mathbf{cn}^2 t = 1$ et $\mathbf{dn}^2 t + k^2 \mathbf{sn}^2 t = 1$ (proposition 33).

b) En effet, pour $k = 1$ on a

$$t = \int_0^s \frac{ds}{1-s^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+s}{1-s} \right) = \arg \tanh s, \quad s^2 < 1,$$

et alors $s = \mathbf{sn} t = \tanh t$. Pour les autres relations, on a

$$\mathbf{cn}(t; 1) = \sqrt{1 - \mathbf{sn}^2(t; 1)} = \sqrt{1 - \tanh^2 t} = \frac{1}{\cosh t},$$

et

$$\mathbf{dn}(t; 1) = 1 - \mathbf{sn}^2(t; 1) = 1 - \tanh^2 t = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

Proposition 40. Les fonctions $\mathbf{sn}t$, $\mathbf{cn}t$, $\mathbf{dn}t$ satisfont respectivement aux formules d'addition suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{sn}(t + \tau) &= \frac{\mathbf{sn}t \mathbf{cn}\tau \mathbf{dn}\tau + \mathbf{sn}\tau \mathbf{cn}t \mathbf{dn}t}{1 - k^2 \mathbf{sn}^2 t \mathbf{sn}^2 \tau}, \\ \mathbf{cn}(t + \tau) &= \frac{\mathbf{cn}t \mathbf{cn}\tau - \mathbf{sn}t \mathbf{sn}\tau \mathbf{dn}t \mathbf{dn}\tau}{1 - k^2 \mathbf{sn}^2 t \mathbf{sn}^2 \tau}, \\ \mathbf{dn}(t + \tau) &= \frac{\mathbf{dn}t \mathbf{dn}\tau - k^2 \mathbf{sn}t \mathbf{sn}\tau \mathbf{cn}t \mathbf{cn}\tau}{1 - k^2 \mathbf{sn}^2 t \mathbf{sn}^2 \tau}. \end{aligned}$$

Démonstration. Considérons l'équation d'Euler [13] :

$$\frac{ds}{\sqrt{P(s)}} + \frac{dr}{\sqrt{P(r)}} = 0,$$

où $P(\xi) = (1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)$, $0 < k < 1$. L'intégrale de cette équation peut s'écrire sous la forme

$$t + \tau = C_1, \quad (18)$$

où C_1 est une constante et

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{P(s)}}, \quad \tau = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{P(r)}},$$

avec $s = \mathbf{sn}t$ et $r = \mathbf{sn}\tau$. Considérons maintenant le système différentiel

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dz} &= \sqrt{P(s)}, \\ \frac{dr}{dz} &= \sqrt{P(r)}. \end{aligned} \quad (19)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dz^2} &= s(2k^2s^2 - 1 - k^2), \\ \frac{d^2r}{dz^2} &= r(2k^2r^2 - 1 - k^2), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r \frac{d^2s}{dz^2} - s \frac{d^2r}{dz^2} &= 2k^2sr(s^2 - r^2), \\ r^2 \left(\frac{ds}{dz} \right)^2 - s^2 \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 &= (r^2 - s^2)(1 - k^2s^2r^2). \end{aligned}$$

Notons que

$$\frac{\frac{d}{dz} \left(r \frac{ds}{dz} - s \frac{dr}{dz} \right)}{\left(r \frac{ds}{dz} + s \frac{dr}{dz} \right) \left(r \frac{ds}{dz} - s \frac{dr}{dz} \right)} = \frac{r \frac{d^2s}{dz^2} - s \frac{d^2r}{dz^2}}{r^2 \left(\frac{ds}{dz} \right)^2 - s^2 \left(\frac{dr}{dz} \right)^2},$$

donc

$$\frac{\frac{d}{dz} \left(r \frac{ds}{dz} - s \frac{dr}{dz} \right)}{r \frac{ds}{dz} - s \frac{dr}{dz}} = \frac{2k^2sr}{k^2s^2r^2 - 1} \left(r \frac{ds}{dz} + s \frac{dr}{dz} \right).$$

En intégrant, on obtient

$$\frac{d}{dz} \ln \left(r \frac{ds}{dz} - s \frac{dr}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \ln (k^2s^2r^2 - 1),$$

d'où

$$r \frac{ds}{dz} - s \frac{dr}{dz} = C_2 (1 - k^2 s^2 r^2),$$

où C_2 est liée à C_1 par une relation de la forme : $C_2 = f(C_1)$ avec f une fonction à déterminer. En tenant compte de (19), on obtient

$$r\sqrt{P(s)} + s\sqrt{P(r)} = C_2 (1 - k^2 s^2 r^2). \quad (20)$$

Or

$$\begin{aligned} \sqrt{P(s)} &= \sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}, \\ &= \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 t)(1-k^2\operatorname{sn}^2 t)}, \\ &= \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t, \quad (\text{proposition 33}), \\ \sqrt{P(s)} &= \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau, \end{aligned}$$

donc l'équation (20) devient

$$\operatorname{sn} t \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau + \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t = C_2 (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t \operatorname{sn}^2 \tau).$$

Rappelons que $C_2 = f(C_1) = f(t + \tau)$ (d'après (18)). Dès lors pour $\tau = 0$, on a $f(t) = \operatorname{sn} t$. Donc

$$\frac{\operatorname{sn} t \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau + \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t \operatorname{sn}^2 \tau} = \operatorname{sn}(t + \tau).$$

Pour les deux autres formules, il suffit d'utiliser un raisonnement similaire au précédent.

Remarque 41. *En un certain sens, les fonctions elliptiques de Jacobi $\operatorname{sn} t$ et $\operatorname{cn} t$ généralisent les fonctions trigonométriques sinus et cosinus.*

4 Applications

4.1 Le pendule simple

Le pendule simple [2] est constitué par un point matériel suspendu à l'extrémité d'un fil (ou une tige théoriquement sans masse) astreint à se mouvoir sans frottement sur un cercle vertical. On désigne par l la longueur du fil (i.e., le rayon du cercle), g l'accélération de la pesanteur et x l'angle instantané du fil avec la verticale. L'équation du mouvement est

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin x = 0. \quad (21)$$

Posons $\theta = \frac{dx}{dt}$, l'équation (21) s'écrit

$$\theta d\theta + \frac{g}{l} \sin x dx = 0.$$

En intégrant, on obtient

$$\frac{\theta^2}{2} = \frac{g}{l} \cos x + C,$$

où C est une constante. Pour déterminer cette dernière, notons que lorsque $t = 0$, $x = x_0$ (angle initial), alors $\theta = 0$ (la vitesse est nulle), d'où

$$C = -\frac{g}{l} \cos x_0.$$

Par conséquent

$$\frac{l}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{l}{2g} \theta^2 = \cos x - \cos x_0. \quad (22)$$

Nous allons étudier plusieurs cas :

a) Considérons le cas d'un mouvement oscillatoire, i.e., le cas où la masse passe de $x = x_0$ (le plus grand angle atteint par le pendule ; il y correspond une vitesse $\theta = 0$) à $x = 0$ (vitesse maximale). Comme $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, alors l'équation (22) devient

$$\frac{l}{4g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \sin^2 \frac{x_0}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}. \quad (23)$$

Posons

$$\sin \frac{x}{2} = \sin \frac{x_0}{2} \sin \varphi,$$

d'où

$$\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \sin \frac{x_0}{2} \cos \varphi d\varphi,$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{x}{2}} dx = \sin \frac{x_0}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{x_0}{2} \sin^2 \varphi} dx = \sin \frac{x_0}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

et donc

$$dx = \frac{2 \sin \frac{x_0}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{x_0}{2} \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

Par substitution dans (23), on obtient

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{g}{l} (1 - k^2 \sin^2 \varphi),$$

où

$$k = \sin \frac{x_0}{2}.,$$

est le module et $\frac{x_0}{2}$ l'angle modulaire. Notons que pour $x = 0$ on a $\varphi = 0$ et dès lors

$$t = \pm \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

D'après la section 3, on a donc

$$\begin{aligned}\varphi &= \pm \mathbf{am} \sqrt{\frac{g}{l}} t, \\ \sin \varphi &= \pm \sin \mathbf{am} \frac{g}{l} t = \pm \mathbf{sn} \sqrt{\frac{g}{l}} t,\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sin \frac{x_0}{2} \mathbf{sn} \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

b) Considérons le cas d'un mouvement circulaire. On écrit l'équation (22) sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{l}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} - \cos x_0, \\ &= (1 - \cos x_0) \left(1 - k^2 \sin^2 \frac{x}{2} \right),\end{aligned}$$

où

$$k^2 = \frac{2}{1 - \cos x_0},$$

avec k positif et $0 < k < 1$. En tenant compte de la condition initiale $x(0) = 0$, on obtient

$$dt = \pm \sqrt{\frac{2l}{g(1 - \cos x_0)}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \varphi = \frac{x}{2}.$$

Donc

$$\varphi = \pm \mathbf{am} \sqrt{\frac{g(1 - \cos x_0)}{2l}} t,$$

et

$$x = \pm 2 \mathbf{am} \sqrt{\frac{g(1 - \cos x_0)}{2l}} t.$$

c) Considérons enfin le cas d'un mouvement asymptotique. C'est le cas où $x_0 = \pm \pi$ et l'équation (22) s'écrit

$$\frac{l}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \cos x + 1 = 2 \cos^2 \frac{x}{2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} t &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^x \frac{dx}{\cos \frac{x}{2}}, \\ &= \pm \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \tan \left(\frac{x}{\pi} + \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

et

$$x = 4 \arctan e^{\pm \sqrt{\frac{g}{l}} t} - \pi.$$

On vérifie que $x \rightarrow \pm\pi$ quand $t \rightarrow \infty$.

Remarque 42. Pour des petites oscillations, on peut approcher $\sin x$ par x et l'équation (21) se ramène à une équation linéaire,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0,$$

dont la solution générale est immédiate :

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2 \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t,$$

où $C_1 = x(0)$ et $C_2 = \frac{dx}{dt}(0)$. Pour des petites oscillations la période du pendule (le temps nécessaire pour une oscillation complète ; un aller-retour) est $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Par contre, dans le cas des oscillations qui ne sont pas nécessairement petites, la période vaut d'après ce qui précède $4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$ avec $k = \sin \frac{x_0}{2}$.

4.2 Equations d'Euler

Les équations d'Euler (On parle aussi de mouvement d'Euler-Poinsot du solide) du mouvement de rotation d'un solide autour d'un point fixe, pris comme origine du repère lié au solide, lorsqu'aucune force extérieure n'est appliquée au système, peuvent s'écrire sous la forme [7, 8, 9] :

$$\begin{cases} \frac{dm_1}{dt} = (\lambda_3 - \lambda_2) m_2 m_3, \\ \frac{dm_2}{dt} = (\lambda_1 - \lambda_3) m_1 m_3, \\ \frac{dm_3}{dt} = (\lambda_2 - \lambda_1) m_1 m_2. \end{cases} \quad (24)$$

où (m_1, m_2, m_3) est le moment angulaire du solide et $\lambda_i \equiv I_i^{-1}$, I_1, I_2 et I_3 étant les moments d'inertie. Ces équations admettent deux intégrales premières quadratiques :

$$H_1 = \frac{1}{2} (\lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + \lambda_3 m_3^2),$$

et

$$H_2 = \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2).$$

Nous supposons que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont tous différents de zero (c'est-à-dire que le solide n'est pas réduit à un point et n'est pas non plus concentré sur une droite). Dans ces conditions, $H_1 = 0$ entraîne $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ et donc $H_2 = 0$; le solide est au repos. Nous écartons ce cas trivial et supposons dorénavant que $H_1 \neq 0$ et $H_2 \neq 0$. Lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, les équations (24) montrent évidemment que m_1, m_2 et m_3 sont des constantes. Supposons par exemple que $\lambda_1 = \lambda_2$, les équations (24) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= (\lambda_3 - \lambda_1) m_2 m_3, \\ \frac{dm_2}{dt} &= (\lambda_1 - \lambda_3) m_1 m_3, \\ \frac{dm_3}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

On déduit alors que $m_3 = \text{constante} \equiv A$ et

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= A(\lambda_3 - \lambda_1) m_2, \\ \frac{dm_2}{dt} &= A(\lambda_1 - \lambda_3) m_1. \end{aligned}$$

Notons que

$$\frac{d}{dt}(m_1 + im_2) = iA(\lambda_1 - \lambda_3)(m_1 + im_2),$$

on obtient $m_1 + im_2 = Ce^{iA(\lambda_1 - \lambda_3)t}$, où C est une constante et donc

$$m_1 = C \cos A(\lambda_1 - \lambda_3)t, \quad m_2 = C \sin A(\lambda_1 - \lambda_3)t$$

L'intégration des équations d'Euler est délicate dans le cas général où λ_1, λ_2 et λ_3 sont tous différents; les solutions s'expriment à l'aide de fonctions elliptiques. Dans la suite nous supposons que λ_1, λ_2 et λ_3 sont tous différents et nous écartons les autres cas triviaux qui ne posent aucune difficulté pour la résolution des équations en question. Pour fixer les idées nous supposons dans la suite que : $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Géométriquement, les équations

$$\lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + \lambda_3 m_3^2 = 2H_1, \tag{25}$$

et

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 2H_2 \equiv r^2, \tag{26}$$

représentent respectivement les équations de la surface d'un ellipsoïde de demi-axes : $\sqrt{\frac{2H_1}{\lambda_1}}$ (demi grand axe), $\sqrt{\frac{2H_1}{\lambda_2}}$ (demi axe moyen), $\sqrt{\frac{2H_1}{\lambda_3}}$ (demi petit axe), et d'une

sphère de rayon r . Donc le mouvement du solide s'effectue sur l'intersection d'un ellipsoïde avec une sphère. Cette intersection a un sens car en comparant (25) à (26), on voit que $\frac{2H_1}{\lambda_1} < r^2 < \frac{2H_1}{\lambda_3}$, ce qui signifie géométriquement que le rayon de la sphère (26) est compris entre le plus petit et le plus grand des demi-axes de l'ellipsoïde (25). Pour étudier l'allure des courbes d'intersection de l'ellipsoïde (25) avec la sphère (26), fixons $H_1 > 0$ et faisons varier le rayon r . Comme $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, les demi-axes de l'ellipsoïde seront $\frac{2H_1}{\lambda_1} > \frac{2H_1}{\lambda_2} > \frac{2H_1}{\lambda_3}$. Si le rayon r de la sphère est inférieur au demi petit axe $\frac{2H_1}{\lambda_3}$ ou supérieur au demi grand axe $\frac{2H_1}{\lambda_1}$, alors l'intersection en question est vide (et aucun mouvement réel ne correspond à ces valeurs de H_1 et r). Lorsque le rayon r est égal à $\frac{2H_1}{\lambda_3}$, alors l'intersection est composée de deux points. Lorsque le rayon r augmente ($\frac{2H_1}{\lambda_3} < r < \frac{2H_1}{\lambda_2}$), on obtient deux courbes autour des extrémités du demi petit axe. De même si $r = \frac{2H_1}{\lambda_1}$, on obtient les deux extrémités du demi grand axe et si r est légèrement inférieur à $\frac{2H_1}{\lambda_1}$, on obtient deux courbes fermées au voisinage de ces extrémités. Enfin, si $r = \frac{2H_1}{\lambda_2}$ alors l'intersection en question est constituée de deux cercles.

Proposition 43. *Les équations différentielles (24) d'Euler, s'intègrent au moyen de fonctions elliptiques.*

Démonstration. A partir des intégrales premières (25) et (26), on exprime m_1 et m_3 en fonction de m_2 . On introduit ensuite ces expressions dans la seconde équation du système (24) pour obtenir une équation différentielle en m_2 et $\frac{dm_2}{dt}$ seulement. De manière plus détaillée, on tire aisément de (25) et (26) les relations suivantes

$$m_1^2 = \frac{2H_1 - r^2\lambda_3 - (\lambda_2 - \lambda_3)m_2^2}{\lambda_1 - \lambda_3}, \quad (27)$$

$$m_3^2 = \frac{r^2\lambda_1 - 2H_1 - (\lambda_1 - \lambda_2)m_2^2}{\lambda_1 - \lambda_3}. \quad (28)$$

En substituant ces expressions dans la seconde équation du système (24), on obtient

$$\frac{dm_2}{dt} = \sqrt{(2H_1 - r^2\lambda_3 - (\lambda_2 - \lambda_3)m_2^2)(r^2\lambda_1 - 2H_1 - (\lambda_1 - \lambda_2)m_2^2)}.$$

En intégrant cette équation, on obtient une fonction $t(m_2)$ sous forme d'une intégrale elliptique. Pour réduire celle-ci à la forme standard, on peut supposer que $r^2 > \frac{2H_1}{\lambda_2}$ (sinon, il suffit d'invertir les indices 1 et 3 dans toutes les formules précédentes).

On réécrit l'équation précédente, sous la forme

$$\frac{dm_2}{\sqrt{(2H_1 - r^2\lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}dt} = \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2H_1 - r^2\lambda_3}m_2^2\right)\left(1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{r^2\lambda_1 - 2H_1}m_2^2\right)}.$$

En posant

$$\begin{aligned} \tau &= t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}, \\ s &= m_2\sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2H_1 - r^2\lambda_3}}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1-s^2) \left(1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(2H_1 - r^2\lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)} s^2 \right)},$$

ce qui suggère de choisir comme module des fonctions elliptiques

$$k^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(2H_1 - r^2\lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}.$$

Les inégalités $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, $\frac{2H_1}{\lambda_1} < r^2 < \frac{2H_1}{\lambda_3}$ et $r^2 > \frac{2H_1}{\lambda_2}$ montrent qu'effectivement $0 < k^2 < 1$. On obtient donc

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}.$$

Cette équation admet la solution (on convient de choisir l'origine des temps telle que $m_2 = 0$ pour $t = 0$.)

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

La fonction inverse $s(\tau)$ constitue l'une des fonctions elliptiques de Jacobi : $s = \mathbf{sn}\tau$, qui détermine également m_2 en fonction du temps, i.e.,

$$m_2 = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}} \cdot \mathbf{sn}\tau.$$

D'après les égalités (27) et (28), on sait que les fonctions m_1 et m_3 s'expriment algébriquement à l'aide de m_2 , donc

$$m_1 = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}} \cdot \sqrt{1 - \mathbf{sn}^2\tau},$$

et

$$m_3 = \sqrt{\frac{r^2\lambda_1 - 2H_1}{\lambda_1 - \lambda_3}} \cdot \sqrt{1 - k^2\mathbf{sn}^2\tau}.$$

Compte tenu de la définition des deux autres fonctions elliptiques (voir section 3)

$$\mathbf{cn}\tau = \sqrt{1 - \mathbf{sn}^2\tau}, \quad \mathbf{dn}\tau = \sqrt{1 - k^2\mathbf{sn}^2\tau},$$

et du fait que $\tau = t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}$, on obtient finalement les formules suivantes :

$$\begin{cases} m_1 = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}} \mathbf{cn} \left(t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)} \right), \\ m_2 = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}} \mathbf{sn} \left(t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)} \right), \\ m_3 = \sqrt{\frac{r^2\lambda_1 - 2H_1}{\lambda_1 - \lambda_3}} \mathbf{dn} \left(t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)} \right). \end{cases} \quad (29)$$

Autrement dit, l'intégration des équations d'Euler s'effectue au moyen de fonctions elliptiques.

Remarque 44. Notons que pour $\lambda_1 = \lambda_2$, on a $k^2 = 0$. Dans ce cas, les fonctions elliptiques $\operatorname{sn}\tau$, $\operatorname{cn}\tau$, $\operatorname{dn}\tau$ se réduisent respectivement aux fonctions $\sin \tau$, $\cos \tau$, 1. Dès lors de (29), on tire aisément que

$$\begin{cases} m_1 = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}} \cos \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}t, \\ m_2 = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}} \sin \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}t, \\ m_3 = \sqrt{\frac{r^2\lambda_1 - 2H_1}{\lambda_1 - \lambda_3}}. \end{cases}$$

On retrouve les solutions établis précédemment avec $A = \sqrt{\frac{r^2\lambda_1 - 2H_1}{\lambda_1 - \lambda_3}}$ et $C = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}}$.

Références

- [1] N.I. Akhiezer, *Elements of the Theory of Elliptic Functions*, AMS Translations of mathematical monographs, **79** (1990). [MR1054205](#)(91k :33016). [Zbl 0694.33001](#).
- [2] J.V. Armitage and W.F. Eberlein, *Elliptic Functions*, London Mathematical Society Student Texts vol. **67**, Cambridge University Press 2006. [MR2266844](#). [Zbl 1105.14001](#).
- [3] N. Koblitz, *A course in Number Theory and Cryptography*, GTM, Vol. **114**, Springer-Verlag, 2^eed. 1994. [MR1302169](#)(95h :94023). [Zbl 0819.11001](#).
- [4] S. Lang, *Elliptic Functions*, Springer-Verlag, 2^eed. 1987. [MR0890960](#)(88c :11028). [Zbl 0615.14018](#).
- [5] M. Lavrentiev, B. Chabat, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, Editions Mir, 1977.
- [6] D.F. Lawden, *Elliptic Functions and Applications*, Applied Mathematical Sciences, Vol. **80**, Springer-Verlag, 1989. [MR1007595](#)(90h :33001). [Zbl 0689.33001](#).
- [7] A. Lesfari, *Completely integrable systems : Jacobi's heritage*, J. Geom. Phys. **31** (1999), 265-286. [MR1711527](#)(2000f :37077). [Zbl 0937.37046](#).
- [8] A. Lesfari, *Le théorème d'Arnold-Liouville et ses conséquences*, *Elem. Math.* **58**, 1 (2003), 6-20. [MR1961831](#)(2004e :37091). [Zbl 1112.37043](#).
- [9] A. Lesfari, *Etude des solutions méromorphes d'équations différentielles*, *Ren. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino*. Vol. **65**, 4 (2007).
- [10] A. Lesfari, A. Elachab, *Etude géométrique d'une famille de systèmes intégrables*, *Math. Pannon.* **15/2** (2004), 275-282. [MR2098681](#)(2005i :37067). [Zbl 1133.37330](#).

Surveys in Mathematics and its Applications **3** (2008), 27 – 65

<http://www.utgjiu.ro/math/sma>

- [11] V. Prasolov and Y. Sobolovyeu, *Elliptic Functions and Elliptic Integrals*, AMS Translations of mathematical monographs, **170** (1997). [MR1469740](#)(98k :14064). [Zbl 0946.11001](#).
- [12] C.L. Siegel, *Topics in complex function theory*, Volume I, Wiley-Interscience, 1969. [MR0257326](#)(41 #1977). [Zbl 0635.30002](#).
- [13] A. Weil, *Euler and the Jacobians of elliptic curves*, Progress in Math., Vol. **36**, 353-359, Birkhäuser, 1983. [MR0717601](#)(85d :14060). [Zbl 0554.01014](#).

Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences, Université Chouaïb Doukkali,
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
e-mail : lesfariahmed@yahoo.fr
