Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 517.925.7

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РОСТА МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В УГЛОВЫХ ОБЛАСТЯХ

А. З. Мохонько, В. Д. Мохонько

Аннотация: Получены асимптотические оценки роста мероморфных в угловой области $\{z : \alpha \leq \arg z \leq \beta\}$ решений дифференциального уравнения вида $P_n(z, \ln z, f, f') = P_{n-1}(z, \ln z, f, f', \dots, f^{(p)})$. Здесь P_n, P_{n-1} — многочлены по всем переменным, P_n имеет степень n по f и f', P_{n-1} — степень $\leq n-1$ по $f, f', \dots, f^{(p)}$. Библиогр. 7.

В работе мы используем стандартные обозначения неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций [1]. Все символы $o(1)$, $O(\dots)$ рассматриваются при $z \to \infty$. Известно, что метод Вимана — Валирона [2] описывает поведение целого решения дифференциального уравнения. Например, если f — целое решение дифференциального уравнения $P(z, f, f') = 0$, где P — многочлен по всем переменным, или f — целое решение дифференциального уравнения более высокого порядка (это дифференциальное уравнение удовлетворяет определенным условиям), то

$$\ln M(r, f) = (c + o(1))r^{\rho}, \quad M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad c, \rho = \text{const}.$$

Таким образом, этот метод дает асимптотику роста решения на кривой, где достигается максимум модуля. В этом случае поведение решения в других точках из $\mathbb{C}$ остается неизвестным. В общем случае метод Вимана — Валирона и его модификации [3] нельзя использовать для изучения мероморфных решений в $\mathbb{C}$ или решений, определяемых в более сложных областях (полуплоскости, угловой области, полуполосе).

Мы изучаем поведение мероморфных решений некоторых дифференциальных уравнений на произвольных лучах или в произвольных угловых областях. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\sum_{k+s=n} a_s(z) z^{\tau_s} (\ln z)^{\kappa_s} f^k f_1^s = \sum_{|K|<n} b_K(z) f^{k_0} f_1^{k_1} \dots f_p^{k_p}, \tag{1}$$

где $f^{(j)} = f_j$, $1 \leq j \leq p$; $n \in \mathbb{N}$; $s, k_0, k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $K = (k_0, k_1, \dots, k_p)$, $|K| = k_0 + k_1 + \dots + k_p$, $\tau_s, \kappa_s \in \mathbb{R}$,

$$|b_K(z)| < M_K |z|^{\tau_K}, \quad M_K = \text{const}; \quad a_s(z) = \alpha_s + o(1), \quad z \in D, \tag{2}$$

$D = \{z : 0 \leq \arg z \leq \pi, |z| \geq R_0\}$; $\tau_K \in \mathbb{R}$, $\alpha_s \in \mathbb{C}$; $\alpha_s \neq 0$, если $\alpha(z) \not\equiv 0$. Будем считать, что асимптотические соотношения в (2) выполняются равномерно по

© 2000 Мохонько А. З., Мохонько В. Д.

$\arg z$, $z \in D$, а именно $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists r(\varepsilon))\ a_s(z) = \alpha_s + v_s(z)$, $|v_s(z)| < \varepsilon$, $z \in \{z = r\exp(i\theta) : r(\varepsilon) \le r < +\infty,\ 0 \le \theta \le \pi\}$. Предполагаем, что все $a_s(z)$, $b_K(z)$, $z \in D$ в дифференциальном уравнении (1) — аналитические функции. Через E обозначим некоторое множество кругов с конечной суммой радиусов.

Теорема. *Пусть решением дифференциального уравнения* (1) *является мероморфная функция $f(z)$, $z \in D$, конечного порядка роста μ. Тогда возможны два случая:*

1) *для любого $\varepsilon > 0$ и любых φ_0, φ_1, $0 < \varphi_0 < \varphi_1 < \pi$, существует $d > 0$ такое, что*

$$|z| > d \wedge \varphi_0 < \arg z < \varphi_1 \Rightarrow \ln f(z) = \ln^{\tau+1} z(\beta(\tau+1)^{-1} + v(z)), \tag{3}$$
$$z \notin E,\ |v(z)| < \varepsilon,\ \tau > 0,\ \operatorname{Re}\beta \ne 0;$$

2) *функция f обладает такими свойствами:*

а) *существует конечное (возможно, пустое) множество углов $G_s = \{z : \eta_s < \arg z < \gamma_s\}$, на которых*

$$\ln f(z) = (\beta\rho^{-1} + o(1))z^{\rho(s)} \ln^{\tau(s)} z, \quad z \in G_s \backslash E \tag{4}$$

(оценка равномерна по $\arg z$ в области $\{z : \eta_s + \delta < \arg z < \eta_s - \delta\}\backslash E$, $\delta > 0$, δ произвольно заданное);

б) *существует конечное (возможно, пустое) множество лучей $\{z : \arg z = \varphi(s)\}$, на которых*

$$\ln|f(re^{i\varphi(s)})| = o(r^\rho \ln^\tau r), \quad r \in [1, +\infty]\backslash\Delta, \quad \operatorname{mes}\Delta < +\infty; \tag{5}$$

в) *на дополнении к этим углам и лучам*

$$\ln|f(re^{i\varphi})| < \varepsilon \ln^{\tau+1} r, \quad \varepsilon > 0, \quad r > r(\varphi), \quad r \notin \Delta, \quad \varphi \ne 0, \pi. \tag{6}$$

Числа $\beta, \tau, \rho, \rho(s), \varphi(s), \eta_s, \gamma_s$ определяются видом дифференциального уравнения.

Замечание. Аналогичные утверждения справедливы и для мероморфных в произвольной угловой области $D_{\alpha\beta} = \{z : \alpha \le \arg z \le \beta,\ |z| \ge R_0\}$ решений дифференциального уравнения (1). Напомним, что порядок роста μ мероморфной функции $f(z)$, $z \in D_{\alpha\beta}$, определяется по формуле [1, с. 39] $\mu = \overline{\lim} \ln S_{\alpha\beta}(r,f)/\ln r$, $r \to \infty$, где $S_{\alpha\beta}(r,f)$ — неванлинновская характеристика функции $f(z)$, $z \in D_{\alpha\beta}$. В теореме предполагается, что мероморфное решение дифференциального уравнения (1) имеет порядок роста $\mu < +\infty$. Для решений дифференциального уравнения

$$\sum_{0 \le k+s \le n} (f')^s f^k (\alpha_s + o(1)) z^{\tau_s} (\ln z)^{\kappa_s} = 0$$

это требование излишне, так как в [4] показано, что любое мероморфное решение $f(z)$, $z \in D_{\alpha\beta}$, такого уравнения имеет конечный порядок роста.

Функция $\exp(\ln^2 x)$ является решением дифференциального уравнения $zf' = 2f\ln z$, и для нее выполняется (3). Функция $\cos\sqrt{z}$ — решение дифференциального уравнения $f^2 + 4z(f')^2 = 1$, причем $\ln f(z) = -i\sqrt{z} + O(1)$, $0 < \arg z = \text{const} < 2\pi$, т. е. справедливо (4), а на луче $\{z : \arg z = 0\}$ верно (5). Функция Вейерштрасса $\wp(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — решение дифференциального уравнения

$$(f')^2 = 4f^3 + b_1 f + b_2, \quad b_j \in \mathbb{C},$$

[5, с. 363]. Для нее справедлива оценка

$$|f(z)| < |z|^{\nu+\varepsilon}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash E, \quad \nu = \text{const} > 0, \quad \varepsilon > 0, \tag{7}$$

а тем более выполняется (6).

Доказательство. Пусть $\{c_q\}$ — множество всех нулей и полюсов мероморфного решения $f(z)$, $z \in D$, и его производных $f_1, \dots, f_p$. Выберем произвольное $\sigma > 0$ и для каждого $c_q = |c_q| \exp(i\theta_q) \in \{c_q\}$ построим круг с центром c_q радиуса $\delta_q = |c_q|^{-\mu-1-\sigma/4} \sin\theta_q$. Через E_* обозначим множество точек, принадлежащих этим кругам. Тогда [6]

$$\sum \delta_q < M = \text{const}, \quad c_q \in D, \tag{8}$$

$$\left|\frac{f_j(z)}{f(z)}\right| < \frac{M|z|^{(2\mu+2+\sigma/2)j}}{\sin^{2j}(\arg z)}, \quad z \in D\backslash E_*. \tag{9}$$

Для каждого $c_q \in \{c_q\}$ построим интервал $[|c_q| - \delta_q, |c_q| + \delta_q]$. Пусть Δ — множество точек, принадлежащих этим интервалам. Учитывая (8), имеем $\text{mes}\,\Delta \le \sum 2\delta_q < +\infty$, а множество E_* — множество кругов с конечной суммой радиусов.

Пусть

$$m = \max\{s : k + s = n, \alpha_s \ne 0\}, \quad q = \min\{s : k + s = n, \alpha_s \ne 0\}.$$

Разделим обе части дифференциального уравнения (1) на f^n. После несложного преобразования и соответвующего переобозначения коэффициентов и показателей степеней это дифференциальное уравнение можно представить в виде

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^m + \sum_{s=q}^{m-1} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^s (c_{m-s} + o(1)) z^{d_{m-s}} (\ln z)^{h_{m-s}} = \omega(z), \tag{10}$$

$$\omega(z) = \sum_{|K| \le n-1} b_K(z) z^{m-\tau_m} (\ln z)^{-\kappa_m} \frac{(f_1/f)^{k_1} \dots (f_p/f)^{k_p}}{f^{n-|K|}}. \tag{11}$$

Обозначив

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = L(z); \quad c_0 = 1; \quad d_0 = 0; \quad h_0 = 0, \tag{12}$$

перепишем дифференциальное уравнение (10) в виде $(q \ge 0)$

$$L^m(z) + \sum_{s=q}^{m-1} L^s(z)(c_{m-s} + o(1)) z^{d_{m-s}} (\ln z)^{h_{m-s}} = \omega(z), \quad c_{m-q} \ne 0. \tag{13}$$

Пусть $A = \{(j, d_j) : c_j \ne 0,\ j = 0, 1, \dots, m-q\}$ — множество точек плоскости (см. (13)). Построим для точек из A ломаную Ньютона: рассмотрим выпуклую оболочку A; границей оболочки является многоугольник, который точками $(0, d_0)$ и $(m-q, d_{m-q})$ делится на две ломаные линии, верхняя из них — это ломаная Ньютона. Пусть вершины ломаной Ньютона имеют абсциссы $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_T = m-q$. Обозначим

$$\rho(s) = \frac{d_{i_s} - d_{i_{s-1}}}{i_s - i_{s-1}}, \quad 1 \le s \le T, \tag{14}$$

$\rho(s)$ — угловые коэффициенты отрезков ломаной Ньютона, $\rho(1) > \rho(2) > \dots > \rho(T)$. Обозначим

$$\rho(s)(m-q-j) + d_j = l(j, s), \quad 0 \le j \le m-q.$$

Из свойств ломаной Ньютона на множестве A следует, что

$$l(i_{s-1}, s) = l(i_s, s) = \max_{0 \le j \le m-q} l(j, s) = l(s).$$

Пусть

$$\begin{gathered} \zeta = \max(-\rho(T), 0);\ l = \max(-l(s), 0),\ 1 \le s \le T, \\ \chi = \max\{k_1 + 2k_2 + \dots + pk_p : |K| < n\}. \end{gathered} \tag{15}$$

В [7] доказана следующая

Лемма. *Пусть в уравнении* (13) *все коэффициенты непрерывны в области* D, *причем*

$$\omega(z) = O(z^{-2(l+\zeta q)-\sigma}), \quad \sigma > 0, \quad z \in E_1 \subset D, \qquad (16),$$

E_1 — *неограниченное замкнутое (открытое) множество, и пусть решением уравнения* (13) *является непрерывная функция* $L(z)$, $z \in E_1$. *Через* E_0 *обозначим связную компоненту множества* E_1. *Если в* (13) $q = 0$, *то*

$$L(z) = (\beta + u(z)) z^{\rho} \ln^{\tau} z, \quad z \in E_0, \quad |z| \ge r_0, \quad |u(z)| < \varepsilon_1, \tag{17}$$

$\rho, \tau \in \mathbb{R}$; $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \ne 0$; ε_1 — *заданное число;* $\beta = \beta(E_0)$, $\rho = \rho(E_0)$, $\tau = \tau(E_0)$; *множество возможных значений чисел* β, ρ, τ *конечно и их можно найти с помощью ломаной Ньютона. Если в* (13) $q \ge 1$, *то либо на* E_0 *выполняется* (17), *либо*

$$L(z) \le M|z|^{-\zeta-\varepsilon}, \quad z \in E_0, \quad \varepsilon > 0, \quad M = \text{const}, \tag{18}$$

M *определяется по виду уравнения.*

Пусть h — наибольшее из возможных значений $|\beta|$ (см. (17)). Положим $\mu_0 = \max(\mu, \rho(1))$,

$$\nu = \max[h, \max\{\tau_K + m - \tau_m + 2((\mu_0 + 1)\chi + l + \zeta q) : |K| \le n - 1\}], \tag{19}$$

$$F = \{z : \operatorname{Im} z > 0, |z| > (\sin(\arg z))^{-4/\sigma}\}. \tag{20}$$

Для произвольного δ, $0 < \delta < \pi/2$, существует $d = d(\delta)$ такое, что $Q = \{z : |z| \ge d, \delta \le \arg z \le \pi - \delta\} \subset F$. Если $z \in F \backslash E*$, то, принимая во внимание (9), (15), (20), получим ($c = \text{const}$)

$$\left|\frac{f_1}{f}\right|^{k_1} \dots \left|\frac{f_p}{f}\right|^{k_p} < c|z|^{(2\mu+2+\sigma/2)\chi} \sin^{-2\chi}(\arg z) < c|z|^{(2\mu+2+\sigma)\chi}. \tag{21}$$

Рассмотрим множества

$$E_1 = \{z : z \in F \backslash E_*, |f(z)| \ge z^{\nu+\varepsilon}\}, \quad E_2 = F \backslash \{E_1 \cup E_*\}, \tag{22}$$

где ν определено в (19) и $\varepsilon = (\chi + 1)\sigma > 0$.

Из (13), (11), (19), (21), (22) следует, что на множестве E_1 выполняются условия леммы. Для определенности полагаем, что в (13) $q = 0$. Из (17), (12) вытекает, что для любого $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$, можно подобрать такое $r_0 > 0$, что

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (\beta + u(z)) z^{\rho-1} \ln^{\tau} z, \quad z \in E_0,\ |u(z)| < \frac{\delta}{2},\ |z| > r_0, \tag{23}$$

E_0 — связная компонента E_1; β, ρ, τ зависят от E_0. Если (13) не зависит от L, то в левой части (1) только одно слагаемое $a_0(z) z^{\tau_0} (\ln z)^{\kappa_0} f^n$ имеет степень n по f и f', и тогда существует $d > 0$ такое, что $E_1 \cap \{z : |z| > d\} = \varnothing$. Действительно, в противном случае уравнение (13) имеет вид $\alpha_0(1+o(1)) = o(1)$, $z \in E_1$, откуда $\alpha_0 = 0$, что противоречит предположению. Поэтому из (22) следует, что

$$|f(z)| < |z|^{\nu+\varepsilon}, \quad z \in F \backslash E_*, \quad |z| > d, \tag{24}$$

т. е. в этом случае выполняется более точная оценка, чем (6). Отметим, что в примере с функцией Вейерштрасса, рассмотренном в замечании, характеристическое уравнение (13) не зависит от L, поэтому для него выполняется оценка (7). Если уравнение (13) зависит от L, то имеется конечное число решений вида (17). Пусть r_0 таково, что $f(r_0 e^{i\varphi}) \neq 0, \infty$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Тогда

$$0 < c < |f(r_0 e^{i\varphi})| < C, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad c, C = \mathrm{const}\,. \tag{25}$$

Выберем некоторое φ, $0 < \varphi < \pi$. Допустим, что $z_0 = r_0 \exp(i\varphi) \notin E_*$. Обозначим через $S = S(\varphi)$ кривую, которая получается, когда точка z движется от точки z_0 вдоль луча $\{z : \arg z = \varphi\}$ и огибает каждый круг из E_* по дуге $\{z : |z - c_q| = \delta_q\}$ (см. (8)).

Если $E_1 \cap S = \varnothing$, то из (22) следует неравенство

$$|f(z)| < |z|^{\nu+\varepsilon}, \quad z \in S. \tag{26}$$

Пусть $E_1 \cap S \neq \varnothing$. Множество $E_1 \cap S$ является объединением связных компонент ω_t таких, что

$$|f(z)| \geq |z|^{\nu+\varepsilon}, \quad z \in \omega_t, \tag{27}$$

причем если z_{1t} — начало, z_{2t} — конец ω_t и $|z_{1t}| > r_0$, $|z_{2t}| < \infty$, то

$$|f(z_{1t})| = |z_{1t}|^{\nu+\varepsilon}, \quad |f(z_{2t})| = |z_{2t}|^{\nu+\varepsilon}. \tag{28}$$

Для $z \in \omega_t$ выполняется (23), $\beta = \beta(t)$, $\rho = \rho(t)$, $\tau = \tau(t)$. Через $\{\omega_t\}$ обозначим множество всех ω_t на $S(\varphi)$. Пусть ω_t^-, ω_t^0, ω_t^+ те из кривых $\omega_t \in \{\omega_t\}$, для которых в (23) соответственно $\rho < 0$, $\rho = 0$, $\rho > 0$. Кривая ω_t состоит из отрезков прямой (обозначим их через γ) и дуг окружностей (обозначим их через Γ).

В силу (8) общая длина Γ меньше $2\pi M$. Согласно (23) для $s \in \omega_t^-$ будет $|f'(s)/f(s)| < (|\beta| + \delta/2)/|s|$. Поэтому, интегрируя (23) по ω_t^-, получаем (далее, используя формулы (23)–(28), индекс t будем опускать, $|z| = r$, $|z_1| = r_1 > 2\pi M$)

$$\begin{aligned} \ln\left|\frac{f(z)}{f(z_1)}\right| &\leq \left|\int\limits_{\gamma} \frac{f'(s)}{f(s)}\,ds + \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(s)}{f(s)}\,ds\right| \\ &\leq \left(|\beta| + \frac{\delta}{2}\right)\left(\int\limits_{r_1}^{r} \frac{dx}{x} + \frac{2\pi M}{r_1}\right) \leq \left(|\beta| + \frac{\delta}{2}\right)\left(\ln\frac{r}{r_1} + 1\right), \quad \delta < \varepsilon. \end{aligned} \tag{29}$$

Если $r_1 > r_0$, то из (28), (29), (27), (19), следует, что $\ln|f(z_1)| = (\nu + \varepsilon)\ln r_1$ и

$$\ln|f(z)| \leq (|\beta| + \delta/2)(\ln(r/r_1) + 1) + (\nu + \varepsilon)\ln r_1.$$

Отсюда

$$\ln|f(z)| < (\nu + 2\varepsilon)\ln r, \quad z \in \omega_t^-, \quad r > r(\varphi). \tag{30}$$

Если $r_1 = r_0$, то из (25), (19), (27), (29) вытекает, что $\ln|f(z_1)| < \ln C$ и

$$(\nu + \varepsilon)\ln r \leq \ln|f(z)| < \left(|\beta| + \frac{\delta}{2}\right)\left(\ln\frac{r}{r_1} + 1\right) + \ln C, \quad r_0 \leq r \leq r_2,$$

$|\beta| \le \nu$, $\delta < \varepsilon$, но это возможно, если $r_2 < r_*$, где r_* — некоторая постоянная. В результате получаем, что в рассматриваемом случае выполняется оценка (30).

Покажем, что для любых θ_1, θ_2, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$, существует φ, $\theta_1 < \varphi < \theta_2$, такое, что

$$\{z : \arg z = \varphi = \text{const},\ |z| > d\} \cap E_* = \varnothing, \quad d = 2\pi M/(\theta_2 - \theta_1). \tag{31}$$

Действительно, если (31) неверно, то найдутся θ_1, θ_2, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$, такие, что для любого $\varphi \in (\theta_1, \theta_2)$

$$\{z : \arg z = \varphi, |z| > d = 2\pi M/(\theta_2 - \theta_1)\} \cap E_* \ne \varnothing. \tag{32}$$

Пусть δ_q — радиусы кругов b_q, составляющих множество E_*. Сумма длин окружностей, ограничивающих b_q, меньше чем $2\pi M$. Спроектируем круг b_q на окружность $\{z : |z| = d\}$ так, что точке $r\exp(i\varphi) \in b_q$, $r > d$, соответствует точка $d\exp(i\varphi)$. При этом круг b_q проектируется на дугу $l_q \subset \{z : |z| = d\}$. Если $|l_q|$ — длина l_q, то $|l_q| < 2\pi\delta_q$, $\sum |l_q| < 2\pi \sum \delta_q < 2\pi M$ (см. (8)). Из (32) следует, что дуги l_q, являющиеся проекциями кругов b_q, полностью накрывают дугу $l = \{z : |z| = d;\ \theta_1 < \arg z < \theta_2\}$. Поэтому, учитывая, что $d = 2\pi M/(\theta_2 - \theta_1)$, получаем $2\pi M = d(\theta_2 - \theta_1) =$ длина $l < \sum |l_q| < 2\pi M$. Противоречие. Утверждение (31) доказано.

Таким образом, если Φ — множество тех значений $\varphi, 0 < \varphi < \pi$, для которых

$$\{z : \arg z = \varphi, |z| \ge d(\varphi)\} \cap E_* = \varnothing, \tag{33}$$

то множество Φ всюду плотно на $(0, \pi)$.

Пусть $\varphi \in \Phi$. Выберем $r_0 > d(\varphi)$ так, что $f(r_0 e^{i\varphi}) \ne 0, \infty$, $0 \le \varphi \le \pi$. Тогда выполняются соотношения (25), (33); кривая $S = S(\varphi)$, определенная выше, является лучом $S = \{z : \arg z = \varphi,\ |z| \ge r_0\}$, а определенная в (27), (28) часть $\omega_t \subset S$ — отрезком прямой.

I. Пусть существует сегмент $\omega_t^0 \subset S$. Так как $\omega_t^0 \subset E_0$, где E_0 — связная компонента, то из (23) следует равенство ($\rho = 0$)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (\beta + u(z))z^{-1} \ln^\tau z, \quad z \in E_0, \quad |u(z)| < \frac{\delta}{2}. \tag{34}$$

Пусть в (34) $\tau > 0$. Интегрируя (34) на отрезке ω_t^0 и выделяя действительные части, получаем равенства

$$\ln\left(\frac{f(z)}{f(z_1)}\right) = (\tau+1)^{-1}(\beta + g(z))(\ln^{\tau+1} r - \ln^{\tau+1} r_1), \quad \beta = |\beta|\exp(i\alpha),$$

$$\ln\left|\frac{f(z)}{f(z_1)}\right| = (\tau+1)^{-1}(|\beta|\cos\alpha + v(z))(\ln^{\tau+1} r - \ln^{\tau+1} r_1), \quad r_1 \le r \le r_2 \tag{35}$$

($g(z), v(z)$ — некоторые функции, $|g(z)|, |v(z)| < \delta/2$; $z \in \omega_t^0$, $|z| = r$, $|z_1| = r_1$).

1. Допустим, что в (35) $\cos\alpha < 0$. Выберем $\delta > 0$ так, что $|\beta|\cos\alpha + \delta/2 < 0$ (α — одно из конечного числа возможных значений). Тогда в (35) правая часть отрицательна. Если $r_0 < r_1$, то из (28), (35) вытекает, что

$$|f(re^{i\varphi})| < |f(r_1 e^{i\varphi})| = r_1^{\nu+\varepsilon}, \quad r_1 < r \le r_2,$$

но это противоречит (27). Если $r_0 = r_1$, то, учитывая (35), (25), имеем

$$|f(re^{i\varphi})| < |f(r_0 e^{i\varphi})| < C, \quad r_0 < r \le r_2.$$

Отсюда и из (27) следует, что $r_2 < r_* = \text{const}$, поэтому если в (35) $\cos\alpha < 0$, то существует такое r_*, что

$$\{z : \arg z = \varphi, |z| \geq r_*\} \cap \omega_t^0 = \varnothing. \tag{36}$$

2. Пусть в (35) $\cos\alpha > 0$ и $r_0 < r_1 < r_2 < +\infty$. Выберем δ так, что $0 < \delta < |\beta| \cos\alpha$. Тогда соотношение (35) с учетом (28) может быть переписано так:

$$(\nu + \varepsilon) \ln \frac{r_2}{r_1} = \ln \left| \frac{f(r_2 e^{i\varphi})}{f(r_1 e^{i\varphi})} \right| > |\beta| \cos\alpha \frac{\ln^{\tau+1} r_2 - \ln^{\tau+1} r_1}{2(\tau + 1)},$$

или

$$c(\ln r_2 - \ln r_1) > \ln^{\tau+1} r_2 - \ln^{\tau+1} r_1, \quad r_1 < r_2, \quad \tau > 0, \tag{37}$$

$c = 2(\tau+1)(\nu+\varepsilon)/|\beta| \cos\alpha$. Имеем $\ln^{\tau+1} r - c \ln r \uparrow \infty$, если $r > \exp((c/(\tau+1))^{1/\tau})$. Поэтому (37) невозможно, если $r_1 > r_* = \text{const}$. Если в (35) $r_0 = r_1 < r_2 < +\infty$, то доказательство аналогично. Следовательно, в рассматриваемом случае выполняется (36).

3. Допустим, что в (35) $\cos\alpha > 0$ и $r_2 = +\infty$. Тогда

$$\ln |f(re^{i\varphi})| = (\tau + 1)^{-1}(|\beta| \cos\alpha + v(z)) \ln^{\tau+1} r + O(1), \quad r_1 \leq r < +\infty, \tag{38}$$

$|v(z)| < \delta/2 < (|\beta| \cos\alpha)/3$. Возьмем φ_1, $\varphi < \varphi_1 < \pi$. Отрезок ω_t^0 содержится в E_0 — связной компоненте E_1. Покажем, что существует d такое, что

$$\{z : \varphi \leq \arg z \leq \varphi_1, |z| \geq d\} \backslash \Omega \subset E_0, \tag{39}$$

где Ω — множество кругов с конечной суммой радиусов.

Обозначим через H_r непрерывную кусочно гладкую кривую, получаемую при движении от точки $z = r\exp(i\varphi) \in S$ по дуге $\{z = r\exp(i\theta) : \varphi \leq \theta \leq \pi\}$ с обходом кругов с центрами в c_q (см. (8)) по дугам окружностей $\{z : |z - c_q| = \delta_q\}$ (обозначим эти дуги через κ). Пусть $z = r(t)\exp(i\theta(t))$, $0 \leq t \leq 1$, — параметрическое представление $H_r; r\exp(i\varphi)$ — начало кривой H_r. Через H_r обозначим также множество точек кривой H_r. Точка $r(0)\exp(i\theta(0)) = r\exp(i\varphi)$ принадлежит $\omega_t^0 \subset E_0$. Пусть $t_* \in [0, 1]$, t_* — наибольшее значение такое, что кривая $h_r = \{z : z = r(t)\exp(i\theta(t)),\ 0 \leq t \leq t_*\}$ содержится в E_0 — связной компоненте E_1. Поскольку начало кривой $z = r\exp(i\varphi)$ принадлежит $E_0 \subset E_1$ и в этой точке выполняется (38), то из определения E_1 следует, что $0 < t^*$. Предположим, что $\theta(t_*) < \varphi_1 < \pi$. Из определения связной компоненты E_0 множества E_1 вытекает равенство

$$|f(r(t_*)\exp(i\theta(t_*)))| = (r(t_*))^{\nu+\varepsilon}. \tag{40}$$

Кривая h_r состоит из дуг окружности $\{z : |z| = r\}$ и дуг κ. Согласно (8) общая длина дуг κ не превышает $2\pi M$, следовательно, $|r(t) - r| < 2\pi M$,

$$r(t) = r + O(1), \quad r(t)\exp(i\theta(t)) \in h_r. \tag{41}$$

Длина h_r меньше чем $2\pi r + 2\pi M$. Интегрируя (34) по $h_r \subset E_0$, выделяя действительные части и учитывая (41), получаем

$$\ln \left| \frac{f(r(t_*)e^{i\theta(t_*)})}{f(z)} \right| = \operatorname{Re} \int\limits_{h_r} (\beta + u(z)) z^{-1} \ln^\tau z \, dz = O(\ln^\tau r), \quad r \to \infty.$$

Отсюда с учетом (38) и (40) следует, что

$$(\nu+\varepsilon)\ln r = \ln|f(re^{i\varphi})| + O(\ln^\tau r) > \frac{|\beta|\cos\alpha}{2(\tau+1)}\ln^{\tau+1} r, \quad \tau>0,\ \cos\alpha>0,$$

что невозможно, если r достаточно большое. Следовательно, $\theta(t_*)\ge\varphi_1$ и (39) доказано. Аналогично можно показать, что для любых φ_0,φ_1, $0<\varphi_0<\varphi_1<\pi$, существует d такое, что

$$P=\{z:\varphi_0\le\arg z\le\varphi_1, |z|>d\}\backslash\Omega\subset E_0, \tag{42}$$

Ω — множество кругов с конечной суммой радиусов, $f(d\exp(i\theta))\ne 0,\infty$, $0\le\theta\le\pi$. Через $\Gamma(z)$ обозначим кривую, которую описывает точка, двигаясь последовательно от точки $z_1=d\exp(i\varphi)$ вдоль отрезка $\{z:\arg z=\varphi,\ d\le|z|\le r\}\subset P$ и далее вдоль кривой H_r (см. выше) до точки $z=r(t)\exp(i\theta(t))\in P$. Интегрируя (34) по $\Gamma(z)\subset E_0$, получаем

$$\ln\frac{f(z)}{f(z_1)}=\beta(\ln^{\tau+1}z-\ln^{\tau+1}z_1)(\tau+1)^{-1}+\int\limits_{\Gamma(z)}\frac{u(s)\ln^\tau s}{s}\,ds,$$

$$\left|\int\limits_{\Gamma(z)}\frac{u(s)\ln^\tau s}{s}\,ds\right|<\frac{2\delta}{3}\left[\frac{\ln^{\tau+1}r-\ln^{\tau+1}d}{\tau+1}+\pi\ln^\tau r+\frac{2\pi M\ln^\tau(r-2\pi M)}{r-2\pi M}\right]. \tag{43}$$

Оценка (43) равномерна по $\arg z$ в области P. Так как значения φ_0,φ_1, $0<\varphi_0<\varphi_1<\pi$, выбирались произвольно, из (43) следует (3).

4. Если в (35) $\cos\alpha=0$, то, учитывая (25), (28), приходим к оценке

$$\ln|f(z)|<\frac{2\delta}{3}\ln^{\tau+1}|z|, \quad z\in\omega_t^0,\ r_1\le|z|\le r_2\le+\infty,\ \tau>0,\ \delta>0. \tag{44}$$

Допустим, что в (34) $\tau\le 0$. Интегрируя (34) по ω_t^0 и выделяя действительные части, будем иметь

$$\ln\left|\frac{f(z)}{f(z_1)}\right|<\left(|\beta|+\frac{\delta}{2}\right)\int\limits_{r_1}^{r}\frac{ds}{s}=\left(|\beta|+\frac{\delta}{2}\right)\ln\frac{r}{r_1}, \quad r_1\le r\le r_2,\ |z|=r,\ |z_1|=r_1,$$

или

$$\left|\frac{f(z)}{f(z_1)}\right|<\left(\frac{r}{r_1}\right)^{|\beta|+\delta/2}, \quad 0<\delta<\varepsilon. \tag{45}$$

Пусть $r_0<r_1<r_2<+\infty$. Из (45), (28) следует, что

$$\left|\frac{f(z_2)}{f(z_1)}\right|=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\nu+\varepsilon}<\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{|\beta|+\delta/2},$$

а это невозможно, поскольку $|\beta|\le\nu$, $\delta<\varepsilon$ (см. (19)). Если $r_0<r_1<r_2=+\infty$, то из (45), (27) имеем

$$r^{\nu+\varepsilon}\le|f(re^{i\varphi})|<|f(r_1e^{i\varphi})|\left(\frac{r}{r_1}\right)^{|\beta|+\delta/2}, \quad r>r_1,$$

что также невозможно, поскольку $|\beta|\le\nu$, $\delta<\varepsilon$. Пусть $r_0=r_1$. Учитывая (25), (27), (45), получаем

$$r^{\nu+\varepsilon}\le|f(re^{i\varphi})|\le C\left(\frac{r}{r_1}\right)^{|\beta|+\delta/2}, \quad r_0\le r\le r_2. \tag{46}$$

Так как $|\beta| \le \nu$, $\delta < \varepsilon$, то (46) возможно, если $r_2 < r_*$, где r_* — некоторая постоянная. Следовательно, в рассматриваемом случае выполняется (36).

II. Предположим, что существует сегмент $\omega_t^+ \subset S$. Так как $\omega_t^+ \subset E_0$, то выполняется оценка (23), $\rho > 0$. Интегрируя (23) по ω_t^+ и выделяя действительные части, получим

$$\ln \frac{f(z)}{f(z_1)} = (\beta e^{i\rho\varphi} + g(z)) \int\limits_{r_1}^{r} x^{\rho-1} \ln^\tau x \, dx, \quad \beta = |\beta| e^{i\alpha},$$

$$\ln \left| \frac{f(z)}{f(z_1)} \right| = (|\beta| \cos(\rho\varphi + \alpha) + v(z)) \int\limits_{r_1}^{r} x^{\rho-1} \ln^\tau x \, dx, \tag{47}$$

$$z = re^{i\varphi} \in \omega_t^+, \quad |z_1| = r_1, \quad r_1 \le r \le r_2; \quad |g(z)|, |v(z)| < \delta/2,$$

($g(z)$, $v(z)$ — некоторые функции, $z = r\exp(i\varphi)$, $\ln z = \ln r + O(1)$, $0 < \varphi < \pi$).

1. Предположим, что все отрезки $\omega_t^+ \subset S(\varphi)$ имеют конечную длину. Тогда существует $r(\varphi)$ такое, что если $r_1 > r(\varphi)$ для сегмента ω_t^+, то в (47) $\cos(\rho\varphi + \alpha) = 0$. Действительно, из (47), (28) имеем

$$\begin{aligned}(\nu + \varepsilon) \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) &= \ln \left| \frac{f(r_2 e^{i\varphi})}{f(r_1 e^{i\varphi})} \right| \\ &= (|\beta| \cos(\rho\varphi + \alpha) + v(z_2)) \int\limits_{r_1}^{r_2} x^{\rho-1} \ln^\tau x \, dx, \quad |v(z_2)| < \delta/2.\end{aligned} \tag{48}$$

Пусть $\cos(\rho\varphi + \alpha) < 0$. Выберем $\delta > 0$ так, что $|\beta| \cos(\rho\varphi + \alpha) + \delta < 0$ (α, ρ, τ могут принимать только конечное число значений). Будем считать r_0 настолько большим, что в (23), (47), (48) выполняются неравенства

$$|u(z)|, |v(z)| < \frac{\delta}{2} < -\frac{|\beta|}{2} \cos(\rho\varphi + \alpha), \quad |z| \ge r_1 \ge r_0.$$

Тогда левая и правая части (48) имеют разные знаки, что невозможно.

Допустим, что в (48) $\cos(\rho\varphi + \alpha) > 0$. Пусть $0 < \delta < |\beta| \cos(\rho\varphi + \alpha)$ и r_0 настолько велико, что $r^{\rho-1} \ln^\tau r > r^{\rho/2-1}$, $r > r_0$. Тогда согласно (48)

$$\frac{2(\nu + \varepsilon)}{\rho} \ln \left(\frac{r_2^{\rho/2}}{r_1^{\rho/2}} \right) > |\beta| \cos(\rho\varphi + \alpha) \big(r_2^{\rho/2} - r_1^{\rho/2} \big) \rho^{-1},$$

или

$$c(\ln x_2 - \ln x_1) > x_2 - x_1, \ x_1 = r_1^{\rho/2}, \ x_2 = r_2^{\rho/2}, \ c = 2(\nu + \varepsilon)/|\beta| \cos(\rho\varphi + \alpha). \tag{49}$$

Функция $x - c\ln x$ возрастает на $(c, +\infty)$. Следовательно, неравенство (49) невозможно, если r_1 (а значит, x_1) достаточно велико, т. е. $r_1 > r(\varphi)$. Таким образом,

$$\omega_t^+ \cap \{z : \arg z = \varphi, |z| \ge r(\varphi)\} = \varnothing, \ r_2 < \infty, \ \cos(\rho\varphi + \alpha) \ne 0, \ \varphi \in \Phi. \tag{50}$$

Если $\cos(\rho\varphi + \alpha) = 0$ на ω_t^+, то $\varphi = \varphi_j$,

$$\varphi_j = \frac{\pi + 2\pi j}{2\rho} - \frac{\alpha}{\rho}, \quad 0 < \varphi_j < \pi, \tag{51}$$

где j — целое число; ρ, α, j принимают конечное число значений $(0 < \varphi_j < \pi)$. Тогда из (47), (28), (25) получаем

$$\ln|f(re^{i\varphi_j})| < \frac{\delta}{2\rho} r^\rho \ln^\tau r + \ln(r_1^{\nu+\varepsilon}) + \ln C, \quad r_0 \le r_1 \le r \le r_2, \quad \delta > 0.$$

Поэтому если $\varphi = \varphi_j$, то отсюда, из (30), (50), (36), (44) и оценки $|f(z)| < |z|^{\nu+\varepsilon}$, $z \in E_2$, следует, что

$$\ln|f(re^{i\varphi_j})| = o(r^\rho \ln^\tau r), \quad r > r(\varphi), \quad \rho > 0, \quad \varphi_j \in \Phi, \tag{52}$$

$\rho = \max \rho_t$, максимум берется по ρ_t, которые соответствуют сегментам $\omega_t^+ \subset \{z : \arg z = \varphi_j,\, |z| \ge r(\varphi_j)\}$.

2. Допустим, что сегмент ω_t^+ имеет бесконечную длину. Пусть в (47) $\cos(\rho\varphi + \alpha) < 0$. Возьмем $\delta > 0$ такое, что $|\beta| \cos(\rho\varphi+\alpha)+\delta < 0$. Выберем r_0 настолько большим, что в (23), (47) имеют место неравенства

$$|u(z)|, |v(z)| < \frac{\delta}{2} < -\frac{|\beta|}{2} \cos(\rho\varphi + \alpha), \quad |z| \ge r_1 \ge r_0.$$

Тогда из (47) следует неравенство $|f(re^{i\varphi})| < |f(r_1 e^{i\varphi})|$, $r > r_1$, которое противоречит (27). Используя правило Лопиталя, можно показать, что

$$\int_{r_1}^{r} x^{\rho-1} \ln^\tau x\, dx \sim \rho^{-1} r^\rho \ln^\tau r, \quad r \to \infty, \quad \delta > 0,\ \rho > 0. \tag{$*$}$$

Следовательно, если в (47) $\cos(\rho\varphi + \alpha) = 0$, то $\varphi = \varphi_j$ (см. (51)) и из (47), (25), (28) получаем

$$\ln|f(re^{i\varphi_j})| = o(r^\rho \ln^\tau r), \quad r \to \infty, \quad \rho > 0. \tag{53}$$

Если в (47) $\cos(\rho\varphi + \alpha) > 0$, то из (47), $(*)$, (25), (28) имеем

$$\begin{gathered} \ln f(z) = (|\beta| e^{i(\rho\varphi+\alpha)} + u(z)) \rho^{-1} r^\rho \ln^\tau r, \\ \ln|f(re^{i\varphi})| = (|\beta| \cos(\rho\varphi + \alpha) + w(z)) \rho^{-1} r^\rho \ln^\tau r, \\ r > r_*, \quad |u(z)|, |w(z)| < 2\delta/3, \quad \rho > 0, \quad \delta > 0. \end{gathered} \tag{54}$$

Существует такое целое k, что $|\rho\varphi + \alpha - 2\pi k| < \pi/2$. Пусть φ_1 удовлетворяет условиям $\varphi_1 > \varphi$ и $\pi/2\rho > |\varphi_1 - (2\pi k - \alpha)/\rho| > |\varphi - (2\pi k - \alpha)/\rho|$. Тогда

$$\cos(\rho\theta_* + \alpha) \ge \cos(\rho\varphi_1 + \alpha) > 0, \quad \varphi < \theta_* \le \varphi_1. \tag{55}$$

Из определения ω_t^+ вытекает, что ω_t^+ содержится в E_0, E_0 — связная компонента E_1, причем на E_0 в (23) $\rho, \beta, \tau = \mathrm{const}$. Если d достаточно большое, то той же компоненте принадлежит множество

$$\{z : \varphi \le \arg z \le \varphi_1, |z| \ge d\} \backslash \Omega \subset E_0, \tag{56}$$

где Ω — множество кругов с конечной суммой радиусов. Действительно, пусть $H_r = \{z : z = r(t) \exp(i\theta(t)), 0 \le t \le 1\}$ — определенная выше кривая (см. (39)). Через t_* обозначим наибольшее значение такое, что $h_r = \{z : z = r(t) \exp(i\theta(t)), 0 \le t \le t_*\} \subset E_0$. Положим $\theta(t_*) = \theta_*$. Допустим, что $\theta_* < \varphi_1$. Из определения связной компоненты E_0 следует, что выполняется равенство (40). Интегрируя (23) по h_r и выделяя действительные части, получим

$$\ln\left|\frac{f(r(t_*)e^{i\theta_*})}{f(re^{i\varphi})}\right| = \mathrm{Re} \int_{h_r} \beta s^{\rho-1} \ln^\tau s\, ds + \mathrm{Re} \int_{h_r} u(s) s^{\rho-1} \ln^\tau s\, ds. \tag{57}$$

Функция $s^{\rho-1}\ln^\tau s$ голоморфна в $\{s : \operatorname{Im} s > 0\}$, поэтому в первом интеграле в правой части (57) мы можем заменить интегрирование по h_r последовательным интегрированием по дуге $\gamma = \{s : |s| = r, \varphi \le \arg s \le \theta_*\}$ и по прямолинейному отрезку γ_1, который соединяет точку $r\exp(i\theta_*)$ с точкой $r(t_*)\exp(i\theta_*)$. Из (41) следует, что длина γ_1 равна $|r(t_*) - r| < 2\pi M$. Кроме того, $\ln s = \ln r + O(1)$, $0 < \arg s < \pi$, $|s| = r$. Поэтому

$$|s^{\rho-1}\ln^\tau s| = r^{\rho-1}\ln^\tau r(1+o(1)), \quad s \in h_r \cup \gamma \cup \gamma_1;$$

$$\int\limits_{h_r} \beta s^{\rho-1}\ln^\tau s\, ds = \Bigl(\int\limits_{\gamma} + \int\limits_{\gamma_1}\Bigr)\beta s^{\rho-1}\ln^\tau s ds,$$

$$\Bigl|\int\limits_{\gamma_1} \beta s^{\rho-1}\ln^\tau s\, ds\Bigr| < 4\pi M|\beta| r^{\rho-1}\ln^\tau r, \tag{58}$$

$$\int\limits_{\gamma} \beta s^{\rho-1}\ln^\tau s\, ds = \frac{|\beta|}{\rho} r^\rho \ln^\tau r(e^{i(\rho\theta_*+\alpha)} - e^{i(\rho\varphi+\alpha)} + o(1)), \tag{59}$$

$$\Bigl|\int\limits_{h_r} u(s) s^{\rho-1}\ln^\tau s\, ds\Bigr| < \frac{2}{3}\delta r^{\rho-1}(\pi r + 2\pi M)\ln^\tau r. \tag{60}$$

Из (40), (57)–(60) следует, что

$$(\nu+\varepsilon)\ln r(t_*) - \ln|f(re^{i\varphi})| \ge \frac{|\beta| r^\rho \ln^\tau r}{\rho}(\cos(\rho\theta_*+\alpha) - \cos(\rho\varphi+\alpha)) - I,$$

$$I = 4\pi M|\beta| r^{\rho-1}\ln^\tau r + \frac{3}{4}\delta\pi r^\rho \ln^\tau r + \frac{4}{3}\pi M\delta r^{\rho-1}\ln^\tau r.$$

Отсюда, а также из (41), (54), (55) получаем

$$\begin{aligned} 2(\nu+\varepsilon)\ln r &\ge \frac{|\beta| r^\rho \ln^\tau r}{\rho}(\cos(\rho\theta_*+\alpha) - \cos(\rho\varphi+\alpha)) \\ &\quad + \frac{|\beta| r^\rho \ln^\tau r}{\rho}\cos(\rho\varphi+\alpha) - \frac{2\delta\rho^{-1} r^\rho \ln^\tau r}{3} - I \\ &\ge r^\rho \ln^\tau r\left(|\beta|\rho^{-1}\cos(\rho\varphi_1+\alpha) - \frac{2\delta}{3\rho} - \frac{3\delta\pi M}{4} - 4\frac{\pi M}{r}\left(|\beta| + \frac{\delta}{3}\right)\right). \end{aligned} \tag{61}$$

Возьмем δ такое, что в (61)

$$|\beta|\rho^{-1}\cos(\rho\varphi_1+\alpha) - \frac{2\delta}{3\rho} - \frac{3\delta\pi M}{4} > 0. \tag{62}$$

Отрезок ω_t^+ имеет бесконечную длину, поэтому r_* можно выбрать так, что соотношения (23), (54) при указанном δ верны. Если r достаточно большое, то из (62) следует, что неравенство (61) невозможно. Поэтому $\theta_* \ge \varphi_1$ и (56) доказано.

Обозначим

$$\eta = (2\pi k - \alpha)\rho^{-1} - \pi(2\rho)^{-1}, \quad \gamma = (2\pi k - \alpha)\rho^{-1} + \pi(2\rho)^{-1}, \tag{63}$$

k — целое число, определенное выше. Так же, как при доказательстве (56), доказывается, что для любых φ_0, φ_1 таких, что $\max(0,\eta) < \varphi_0 < \varphi_1 < \min(\pi,\gamma)$, существует такое d, что

$$P = \{z : \varphi_0 \le \arg z \le \varphi_1, |z| \ge d\}\backslash\Omega \subset E_0,$$

E_0 — связная компонента E_1; $f(d\exp(i\theta)) \neq 0, \infty$; $0 \leq \theta \leq \pi$.

Проинтегрируем (23) вдоль кривой $H(r)$ от точки $z = r\exp(i\varphi) \in P$ до точки $\xi = r(t)\exp(i\theta(t)) \in P$ (см. (41)). Рассуждая так же, как и при доказательстве формул (58)–(60), где мы интегрировали вдоль кривой h_r, получим

$$\ln\left(\frac{f(\xi)}{f(z)}\right) = \frac{|\beta|}{\rho} r^\rho \ln^\tau r(e^{i(\rho\theta(t)+\alpha)} - e^{i(\rho\varphi+\alpha)} + o(1)).$$

Отсюда и из (54) следует равенство $\ln f(\xi) = (\beta + o(1))\rho^{-1}\xi^\rho \ln^\tau \xi$, $\xi \in P$. Так как мы выбирали φ_0, φ_1, $\eta < \varphi_0 < \varphi_1 < \gamma$, произвольно, оценка (4) доказана.

Мы показали, что если на луче $S(\varphi) = \{z : \arg z = \varphi\}$, $\varphi \in \Phi$, один из сегментов ω_t^+ имеет бесконечную длину и $\cos(\rho\varphi + \alpha) \neq 0$, то существует угловая область $P_j = \{z : \eta_j < \arg z < \gamma_j\} \supset S(\varphi)$, где выполняется (4). В (63) параметры α, ρ, k и соответственно η, γ принимают конечное число возможных значений η_j, γ_j. Следовательно, имеется только конечное число угловых областей P_j. Если сегмент $\omega_t^+ \subset S(\varphi)$ имеет бесконечную длину и $\cos(\rho\varphi+\alpha) = 0$, то $\varphi = \varphi_j$ (см. (51)). Тогда существует конечное число возможных значений φ_j и соответственно конечное число лучей $S(\varphi_j) = \{z : \arg z = \varphi_j\}$, где выполняются (52) и (53).

III. Пусть $\overline{P}_j = \{z : \eta_j \leq \arg z \leq \gamma_j\}$. Рассмотрим множество $(\cup\overline{P}_j) \cup (\cup S(\varphi_j))$ (объединение берется по всем углам P_j и лучам $S(\varphi_j)$, рассмотренным выше). Множество

$$R = \{z : 0 < \arg z < \pi\} \backslash \{(\cup\overline{P}_j) \cup (\cup S(\varphi_j))\} \tag{64}$$

состоит из конечного числа открытых угловых областей. Если $S(\varphi) \subset R$ и $\varphi \in \Phi$, то $S(\varphi)$ не содержит отрезка ω_t^+ бесконечной длины и $\varphi \neq \varphi_j$, так как в противном случае $S(\varphi) \subset (\cup\overline{P_j}) \cup (\cup S(\varphi_j))$. Тогда из (30), (50), (36), (44) и оценки $|f(z)| < |z|^{\nu+\varepsilon}$, $z \in E_2$ (см. (22)), следует, что

$$\ln|f(z)| < \delta \ln^{\tau+1}|z|, \quad z \in S(\varphi) \subset R, \quad |z| > r(\varphi), \quad \varphi \in \Phi. \tag{65}$$

Рассмотрим произвольный луч $\{z : \arg z = \varphi\} \subset R$, $\varphi \notin \Phi$. Обозначим

$$S_1 = \{z : \arg z = \varphi,\ |z| \notin \Delta,\ \operatorname{mes}\Delta < \infty\}, \tag{66}$$

Δ — множество точек, принадлежащих интервалам $[|c_q| - \delta_q, |c_q| + \delta_q]$, $c_q \in \{c_q\}$ (см. (8)). Покажем, что если в (66) $\varphi \neq \varphi_j$, где φ_j определено в (51), то на S_1 выполняется оценка (6); если $\varphi = \varphi_j$, то выполняется либо (5), либо (6).

Если $E_1 \cap S_1 = \varnothing$, то на S_1 выполняется неравенство (26). Пусть $E_1 \cap S_1 \neq \varnothing$. Множество $E_1 \cap S_1$ может быть представлено в виде суммы «максимальных» отрезков $\omega_t(\varphi) = \{z : \arg z = \varphi, r_{1t} \leq |z| \leq r_{2t}\} \subset E_1 \cap S_1$ таких, что

$$|f(z)| \geq |z|^{\nu+\varepsilon}, \quad z \in \omega_t(\varphi) \subset E_0, \tag{67}$$

где E_0 — связная компонента E_1. Как и прежде (см. (27)), определим отрезки $\omega_t^-(\varphi)$, $\omega_t^0(\varphi)$, $\omega_t^+(\varphi)$. На отрезке $\omega_t^-(\varphi)$ выполняется оценка (30) (эта оценка была доказана для всех $\varphi \in (0, \pi)$).

Чтобы получить оценки на отрезках $\omega_t^0(\varphi)$ и $\omega_t^+(\varphi)$, выберем δ_1 такое, что $\{z : \varphi - \delta_1 \leq \arg z \leq \varphi + \delta_1\} \subset R$ (см. (64)). Множество Φ (см. (33)) всюду плотно на $(0, \pi)$. Поэтому существуют такие $\psi(1)$, $\psi(2)$, что

$$\psi(1), \psi(2) \in \Phi \wedge \varphi - \delta_1 < \psi(1) < \varphi < \psi(2) < \varphi + \delta_1. \tag{68}$$

На лучах $S(\psi(j)) = \{z : \arg z = \psi(j)\} \subset R$, $j = 1, 2$, выполняется неравенство (65), поэтому

$$\ln|f(re^{i\psi(j)})| < \delta \ln^{\tau+1} r, \quad r > r(\psi(j)), \quad j = 1, 2; \quad \tau > 0. \tag{69}$$

Подобно тому, как это было сделано на кривой $S(\varphi)$ в (27), (28), определим на луче $S(\psi(j))$ отрезки ω_t^-, ω_t^0, ω_t^+. Из (50) и определения множества R следует, что если r_* достаточно большое, то

$$\omega_t^+ \cap \{z : \arg z = \psi(j), |z| > r_*\} = \varnothing, \quad j = 1, 2. \tag{70}$$

Рассмотрим отрезок $\omega_t(\varphi) \subset S_1$, и пусть $z = r\exp(i\varphi) \in \omega_t(\varphi) \subset E_0$, $r > r_*$. Через $\theta(1)$ обозначим наименьшее, а через $\theta(2)$ наибольшее значения такие, что

$$\theta(1) \le \varphi \le \theta(2) \wedge \{z : \theta(1) \le \arg z \le \theta(2), |z| = r\} \subset E_0.$$

Положим

$$\zeta = \max(\theta(1), \psi(1)), \quad \lambda = \min(\theta(2), \psi(2)).$$

Из определения $\theta(1)$, $\theta(2)$, а также из (68) следует, что

$$\{z : \zeta \le \arg z \le \lambda, |z| = r\} \subset E_0, \quad \varphi - \delta_1 < \zeta \le \varphi \le \lambda < \varphi + \delta_1. \tag{71}$$

1. Пусть $z = re^{i\varphi} \in \omega_t^+(\varphi) \subset E_0$. Покажем, что выполняются равенства

$$|f(re^{i\zeta})| = r^{\nu+\varepsilon} = |f(re^{i\lambda})|, \quad r > r_*. \tag{72}$$

На E_0 справедлива оценка (23), причем $\rho > 0$. Если $\psi(1) \le \theta(1)$, то $\zeta = \theta(1)$ и первое из равенств (72) следует из определения связной компоненты E_0 и из определения $\theta(1)$. Если $\theta(1) < \psi(1)$, то $\zeta = \psi(1)$ и $r\exp(i\psi(1)) \in E_0 \subset E_1$. Поэтому, учитывая (22), получим $|f(re^{i\psi(1)})| \ge r^{\nu+\varepsilon}$. Если $|f(re^{i\psi(1)})| > r^{\nu+\varepsilon}$, то связная компонента E_0 пересекается с лучом $S(\psi(1))$. На множестве E_0 в (23) $\rho > 0$, следовательно, $E_0 \cap \{z : \arg z = \psi(1), |z| > r_*\} \supset \omega_t^+$, что противоречит (70). Таким образом, $|f(re^{i\psi(1)})| = r^{\nu+\varepsilon}$, и верно первое из равенств (72), где $\zeta = \psi(1)$. Аналогично доказывается второе равенство (72).

Если в (23) ρ и $\beta = |\beta|\exp(i\alpha)$ такие, что $\cos(\rho\varphi + \alpha) \ne \pm 1$, то выберем в (68) $\delta_1 > 0$ настолько малым, что $\cos(\rho\theta + \alpha) \ne \pm 1$, $\varphi - \delta_1 \le \theta \le \varphi + \delta_1$. Поскольку ρ и β могут принимать только конечное число значений, то $\delta_1 > 0$ можно выбрать одно и то же для всех $\omega_t^+(\varphi) \subset S_1$. Тогда

$$|\sin(\rho\theta + \alpha)| \ge c_1 = \text{const} > 0, \quad \varphi - \delta_1 \le \theta \le \varphi + \delta_1, \tag{73}$$

c_1 — одинаковое для всех $\omega_t^+(\varphi)$. Из (71) следует, что

$$\varphi - \delta_1 \le \frac{\zeta + \lambda}{2} \le \varphi + \delta_1, \quad 0 \le \lambda - \zeta < 2\delta_1,$$

поэтому, учитывая (73), имеем

$$|\sin(\rho(\zeta + \lambda)/2 + \alpha)| \ge c_1 > 0. \tag{74}$$

Выберем $\delta_1 > 0$ так, что $2\delta_1 < \pi/\rho$ ($\rho > 0$, ρ принимает конечное число значений). Так как $2\theta/\pi \le \sin\theta$, если $0 \le \theta \le \pi/2$, то из неравенств $0 \le \lambda - \zeta < 2\delta_1 < \pi/\rho$ следует, что

$$\frac{\rho(\lambda - \zeta)}{\pi} \le \sin\frac{\rho(\lambda - \zeta)}{2}. \tag{75}$$

Интегрируя (23) по дуге $\{z : |z| = r,\ \zeta \le \arg z \le \lambda\} \subset E_0$, выделяя действительные части и учитывая (72)–(75), получаем ($|u(r)| < \delta < 2|\beta|c_1/\pi$)

$$\begin{aligned} 0 = \ln|f(r\exp(i\lambda))/f(r\exp(i\zeta))| \\ = r^\rho \ln^\tau r|\,|\beta|\rho^{-1}(\cos(\rho\lambda+\alpha) - \cos(\rho\zeta+\alpha)) + u(r)(\lambda-\zeta)| \\ \ge r^\rho \ln^\tau r(2|\beta|\rho^{-1}\sin(\rho(\lambda-\zeta)/2)|\sin(\rho(\lambda+\zeta)/2+\alpha)| - \delta(\lambda-\zeta)) \\ > r^\rho \ln^\tau r(2|\beta|c_1/\pi - \delta)(\lambda-\zeta) > 0, \end{aligned}$$

если $\delta < 2|\beta|c_1/\pi$ и $\lambda - \zeta > 0$, что невозможно. Следовательно, $\zeta = \lambda = \varphi$, и из (72) получим

$$|f(z)| = r^{\nu+\varepsilon}, \quad z = re^{i\varphi} \in \omega_t^+(\varphi), \quad r > r(\varphi), \quad \cos(\rho\varphi+\alpha) \ne \pm 1. \tag{76}$$

Пусть теперь $\cos(\rho\varphi+\alpha) = \pm 1$. Тогда

$$\varphi = \varphi_k = \frac{k\pi - \alpha}{\rho}, \tag{77}$$

k целое, ρ, α, k и φ_k, $0 < \varphi_k < \pi$, принимают конечное число значений. Интегрируя (23) по дуге $\{z : \zeta \le \arg z \le \lambda,\ |z| = r\} \subset E_0$ (см. (71)) от точки $r\exp(i\zeta)$ до $z = r\exp(i\varphi) \in \omega_t^+(\varphi)$, выделяя действительные части и учитывая (72), (71), (68), получаем

$$\begin{aligned} \ln|f(re^{i\varphi})/f(re^{i\zeta})| \le |\beta|(1+\delta)r^\rho \ln^\tau r(\varphi-\zeta), \quad \varphi = \varphi_k, \\ \ln|f(re^{i\varphi_k})| \le (\nu+\varepsilon)\ln r + |\beta|\delta_1(1+\delta)r^\rho \ln^\tau r, \end{aligned} \tag{78}$$

так что для всех $z \in \omega_t^+(\varphi)$, $\varphi = \varphi_k$ выполняется (5).

2. Пусть $z = re^{i\varphi} \in \omega_t^0(\varphi) \subset S_1$. Тогда $\omega_t^0(\varphi) \subset E_0$ и на E_0 выполняется (34). Интегрируя (34) по дуге $\{z : \zeta \le \arg z \le \lambda,\ |z| = r\} \subset E_0$ от точки $r\exp(i\zeta)$ до точки $z = r\exp(i\varphi)$, выделяя действительные части и учитывая, что $0 \le \varphi - \zeta < \delta_1$, получим

$$\ln\left|\frac{f(z)}{f(r\exp(i\zeta))}\right| \le (|\beta|+\delta)\delta_1 \ln^\tau r, \quad z = r\exp(i\varphi), \tag{79}$$

где $\zeta = \max(\theta(1), \psi(1))$. Если $\psi(1) \le \theta(1)$, то $\zeta = \theta(1)$ и из определения $\theta(1)$ и определения связной компоненты E_0 следует равенство $|f(re^{i\zeta})| = r^{\nu+\varepsilon}$; если $\theta(1) < \psi(1)$, то $\zeta = \psi(1)$ и согласно (69)

$$\ln|f(re^{i\zeta})| = \ln|f(re^{i\psi(1)})| < \delta \ln^{\tau+1} r, \quad \tau > 0.$$

Поэтому из (79) получаем

$$\ln|f(z)| < \delta \ln^{\tau+1} r + \delta_1(|\beta|+\delta)\ln^\tau r, \quad z = re^{i\varphi} \in \omega_t^0(\varphi).$$

Отсюда, из (76), (30) и оценки $|f(z)| < |z|^{\nu+\varepsilon}$, $z \in E_2$ (см. (22)), следует, что на луче S_1 ($\varphi \notin \Phi$) выполняется оценка (6).

Остается рассмотреть свойства $f(z)$ на лучах $\{z : \arg z = \eta_j\}$, $\{z : \arg z = \gamma_j\}$. Эти лучи ограничивают углы $P_j = \{z : \eta_j < \arg z < \gamma_j\}$ (см. (63)). На этих лучах справедлива оценка (5). Доказательство подобно доказательству аналогичных оценок на лучах $\{z : \arg z = \varphi_k\}$ (см. (77)) с некоторыми естественными изменениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.

2. *Валирон Ж.* Аналитические функции. М.: ГИТТЛ, 1957.

3. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. Вильнюс: Минтис, 1972.

4. *Гольдберг А. А., Мохонько А. З.* О скорости роста решений алгебраических дифференциальных уравнений в угловых областях // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 9. С. 1568–1574.

5. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1968. Т. 2.

6. *Мохонько А. З.* Оценка модуля логарифмической производной функции, мероморфной в угловой области, и ее применение // Укр. мат. журн. 1989. Т. 41, № 6. С. 839–843.

7. *Мохонько А. З.* О росте мероморфных решений алгебраических дифференциальных уравнений в угловых областях // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 2. С. 123–130.

Статья поступила 29 октября 1996 г.

г. Львов