Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 515.164.13

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧАХ О НОРМАЛЬНОЙ И КОМПАКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОПЕРАТОРА ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В. И. Кузьминов, И. А. Шведов

Аннотация: Конструкция разложения L_2-комплекса де Рама в ортогональную сумму подкомплексов используется для отыскания условий нормальной и компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования на искривленных произведениях римановых многообразий и, в частности, на искривленных цилиндрах. Библиогр. 5.

В этой работе нас будут интересовать задачи отыскания необходимых и достаточных условий нормальной и компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования, действующего в L_2-пространствах дифференциальных форм на искривленных произведениях римановых многообразий.

Для произвольного линейного оператора $T : A \to B$, заданного на некотором линейном подпространстве $\operatorname{Dom} T$ векторного пространства A и принимающего значения в векторном пространстве B, условия $\operatorname{Dom} T^{-1} = \operatorname{Im} T$, $T^{-1} \circ T \subset \pi$, где π — каноническая проекция, однозначно определяют оператор $T^{-1} : B \to A/\operatorname{Ker} T$. Пусть A и B — банаховы пространства и подпространство $\operatorname{Ker} T$ замкнуто в A. Тогда оператор T называется *нормально разрешимым*, если оператор T^{-1} ограничен, и *компактно разрешимым*, если оператор T^{-1} компактен. Замкнутый оператор T нормально разрешим в том и только в том случае, когда подпространство $\operatorname{Im} T$ замкнуто в B.

Будем считать, что пространство $\operatorname{Dom} T$ нормировано нормой $\|a\|_{\operatorname{Dom} T} = \left(\|a\|_A^2 + \|Ta\|_B^2\right)^{1/2}$. Замкнутый оператор $T : A \to B$ компактно разрешим тогда и только тогда, когда оператор $\pi|_{\operatorname{Dom} T} : \operatorname{Dom} T \to A/\operatorname{Ker} T$ компактен [1].

Пусть M — гладкое риманово многообразие и $L_p^k(M)$ — пространство тех измеримых дифференциальных форм степени k на M, модуль которых интегрируем в степени p. Оператор внешнего дифференцирования мы будем рассматривать как оператор, действующий из $L_p^k(M)$ в $L_p^{k+1}(M)$, указывая его область задания $\Gamma^k \subset L_p^k(M)$. Если Γ^k содержит все гладкие финитные формы степени k и оператор внешнего дифференцирования $d_\Gamma^k : L_p^k(M) \to L_p^{k+1}(M)$ с областью задания Γ^k замкнут, то выбор пространства Γ^k можно трактовать как выбор «идеальных граничных условий», определяющих область задания оператора d_Γ^k. Если подпространства Γ^k заданы для всех $k \in \mathbb{Z}$ и $\operatorname{Im} d_\Gamma^k \subset \operatorname{Ker} d_\Gamma^{k+1}$ для каждого k, то определен L_p-комплекс де Рама $L_{p,\Gamma}(M)$, соответствующий граничным

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00846).

условиям $\Gamma = \{\Gamma^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Компоненты этого комплекса суть пространства $L_p^k(M)$, а дифференциалы — операторы d_Γ^k. Наиболее употребительными являются граничные условия W и W_c. Оператор $d_{W_c}^k$ представляет собой замыкание оператора внешнего дифференцирования, заданного на гладких финитных формах степени k, а d_W^k — замыкание оператора внешнего дифференцирования, заданного на тех гладких формах $\omega \in L_p^k(M)$, для которых $d\omega \in L_p^{k+1}(M)$.

Пусть $M = X \times_f Y$ — искривленное произведение гладких римановых многообразий X и Y. В [2] на основе метода разделения переменных для определенного вида граничных условий Γ указано разложение комплекса $L_{2,\Gamma}(M)$ в ортогональную сумму некоторых его подкомплексов. Это разложение заведомо имеет место, если $\Gamma = W$ или $\Gamma = W_c$, а многообразие Y компактно. Среди слагаемых указанной ортогональной суммы имеются комплексы двух типов. Это весовые L_2-комплексы де Рама многообразия X и так называемые комплексы $R_{2,\Theta}(X,\tau,\xi)$, введенные в [3]. Легко указать необходимые и достаточные условия как нормальной, так и компактной разрешимости оператора $d_\Gamma^k : L_p^k(M) \to L_p^{k+1}(M)$, сформулированные в терминах свойств дифференциалов слагаемых ортогонального разложения комплекса $L_{2,\Gamma}(M)$. В настоящей работе мы показываем, что в трех частных случаях $k = 0$, $k = \dim M - 1$, $\dim X = 1$ существенная часть этих условий выполнена автоматически и может быть отброшена. Остающиеся условия уже приемлемы с точки зрения возможности их проверки в конкретных случаях.

Приведем некоторые факты из теории банаховых пространств, необходимые нам в дальнейшем. Пусть A, B, C — банаховы пространства, $T : A \to B$, $P : B \to C$, $S : A \to C$ — линейные операторы, оператор T замкнут, оператор P ограничен, $\operatorname{Dom} P = B$, $P \circ T \subset S$, $X = T(\operatorname{Ker} S \cap \operatorname{Dom} T)$, $\pi_1 : A \to A/\operatorname{Ker} S$ и $\pi_2 : B \to B/X$ — канонические проекции, $\widetilde{T} : A/\operatorname{Ker} S \to B/X$ — оператор, определенный условиями $\operatorname{Dom} \widetilde{T} = \pi_1(\operatorname{Dom} T)$, $\widetilde{T} \circ \pi_1 \supset \pi_2 \circ T$.

Лемма 1. *Если подпространства* $\operatorname{Ker} S$ *в* A *и* X *в* B *замкнуты, оператор* $\widetilde{T}$ *замкнут и оператор* S *нормально разрешим, то оператор* T *нормально разрешим.*

Доказательство. Так как $P \circ T \subset S$, то $X \subset \operatorname{Ker} P$. Поэтому существует ограниченный оператор $\widetilde{P} : B/X \to C$, для которого $\widetilde{P} \circ \pi_2 = P$. В силу нормальной разрешимости оператора S найдется ограниченный оператор $S^{-1} : C \to A/\operatorname{Ker} S$, для которого $\operatorname{Dom} S^{-1} = \operatorname{Im} S$ и $S^{-1} \circ S \subset \pi_1$. Тогда $\widetilde{P}\widetilde{T}\pi_1 a = \widetilde{P}\pi_2 T a = PTa = Sa$ для любого $a \in \operatorname{Dom} T$. Тем самым $\widetilde{P}\widetilde{T}\pi_1 a \in \operatorname{Dom} S^{-1}$ и $S^{-1}\widetilde{P}\widetilde{T}\pi_1 a = \pi_1 a$ для $a \in \operatorname{Dom} T$. Поскольку $\pi_1(\operatorname{Dom} T) = \operatorname{Dom} \widetilde{T}$ и оператор $S^{-1} \circ \widetilde{P}$ ограничен, оператор $\widetilde{T}$ нормально разрешим. Следовательно, подпространство $\operatorname{Im} \widetilde{T}$ замкнуто в B/X. Так как $X \subset \operatorname{Im} T$ и $\pi_2(\operatorname{Im} T) = \operatorname{Im} \widetilde{T}$, то $\operatorname{Im} T = \pi_2^{-1}(\operatorname{Im} \widetilde{T})$. Значит, подпространство $\operatorname{Im} T$ замкнуто в B. Оператор T нормально разрешим. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $\dim(\operatorname{Ker} S/\operatorname{Ker} T) < \infty$ *и оператор* S *нормально* (*компактно*) *разрешим, то и оператор* T *нормально* (*компактно*) *разрешим.*

Доказательство. Пусть $\dim(\operatorname{Ker} S/\operatorname{Ker} T) < \infty$ и оператор S нормально разрешим. Подпространство $\operatorname{Ker} S$ замкнуто в A, поскольку оно содержит замкнутое подпространство $\operatorname{Ker} T$ конечной коразмерности. В силу того, что $\dim X \le \dim(\operatorname{Ker} S/\operatorname{Ker} T) < \infty$, подпространство X замкнуто в B. Каноническая проекция $\pi_1 \times \pi_2 : A \times B \to A/\operatorname{Ker} S \times B/X$ переводит график Γ оператора T

на график $\widetilde{\Gamma}$ оператора $\widetilde{T}$. Проекция $\pi_1 \times \pi_2$ может быть представлена как композиция проекций $\pi_3 : A\times B \to A/\operatorname{Ker} S\times B$ и $\pi_4 : A/\operatorname{Ker} S\times B \to A/\operatorname{Ker} S\times B/X$. Так как график Γ оператора T замкнут в $A \times B$ и $\operatorname{Ker} \pi_3 \subset \Gamma$, подпространство $\pi_3(\Gamma)$ замкнуто в $A/\operatorname{Ker} S \times B$. Оператор π_4 переводит замкнутые пространства на замкнутые пространства, поскольку $\dim \operatorname{Ker} \pi_4 < \infty$. Следовательно, оператор $\widetilde{T}$ замкнут. По лемме 1 оператор T нормально разрешим.

Предположим теперь, что оператор S компактно разрешим. Покажем, что оператор $\pi|_{\operatorname{Dom} T} : \operatorname{Dom} T \to A/\operatorname{Ker} T$ компактен. Пусть a_ν — произвольная ограниченная последовательность в $\operatorname{Dom} T$. Так как $P \circ T \subset S$ и оператор P ограничен, последовательность Sa_ν ограничена в C. В силу компактной разрешимости оператора S в пространстве $\operatorname{Dom} S$ можно выбрать сходящуюся в A последовательность a'_k, для которой последовательность Sa'_k совпадает с некоторой подпоследовательностью a_{ν_k} последовательности a_ν. Так как $a'_k - a_{\nu_k} \in \operatorname{Ker} S$ и $\dim(\operatorname{Ker} S/\operatorname{Ker} T) < \infty$, последовательность $a'_k - a_{\nu_k}$ представима в виде $a'_k - a_{\nu_k} = \bar{a}_k + \bar{a}'_k$, где $\bar{a}_k$ — последовательность в $\operatorname{Ker} T$, $\bar{a}'_k$ — последовательность в некотором конечномерном подпространстве, дополняющем пространство $\operatorname{Ker} T$ в $\operatorname{Ker} S$. Последовательность a_ν ограничена в A, тем самым ограничена в A и последовательность a'_k. Переходя к подпоследовательности, мы не ограничим общности, если будем считать последовательность $\bar{a}'_k$ сходящейся. Так как $a_{\nu_k} + \bar{a}_k = a'_k + \bar{a}'_k$ и $\bar{a}_k \in \operatorname{Ker} T$, последовательность $a_{\nu_k} + \bar{a}_k$ сходится в A и $T(a_{\nu_k} + \bar{a}_k) = Ta_{\nu_k}$. Этим установлено, что оператор $\pi|_{\operatorname{Dom} T} : \operatorname{Dom} T \to A/\operatorname{Ker} T$ компактен. Следовательно, оператор T компактно разрешим. Лемма доказана.

Пусть A, B — гильбертовы пространства, $A = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathscr{N}} A_\nu$, $B = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathscr{N}} B_\nu$ — некоторые их представления в виде ортогональной суммы подпространств, $P_\nu : A \to A_\nu$, $Q_\nu : B \to B_\nu$ — ортогональные проекторы на A_ν и B_ν соответственно, $T : A \to B$ — линейный оператор, $T((\operatorname{Dom} T) \cap A_\nu) \subset B_\nu$ для каждого $\nu \in \mathscr{N}$, $T_\nu : A_\nu \to B_\nu$, $\operatorname{Dom} T_\nu = (\operatorname{Dom} T) \cap A_\nu$, T_ν — сужение оператора T. Будем говорить, что оператор T является *ортогональной суммой* семейства операторов $(T_\nu)_{\nu\in\mathscr{N}}$, если $P_\nu(\operatorname{Dom} T) \subset \operatorname{Dom} T_\nu$ и $Q_\nu \circ T = T_\nu \circ P_\nu$ для каждого $\nu \in \mathscr{N}$. Для ортогональной суммы операторов T_ν будем использовать обозначение $\bigoplus\limits_{\nu\in\mathscr{N}} T_\nu$.

Если $T = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathscr{N}} T_\nu$ и оператор T замкнут, то все операторы T_ν замкнуты, $a \in \operatorname{Dom} T$ тогда и только тогда, когда $P_\nu a \in \operatorname{Dom} T_\nu$ и $\sum\limits_{\nu\in\mathscr{N}} \|T_\nu P_\nu a\|^2 < \infty$. Кроме того, $Ta = \sum\limits_{\nu\in\mathscr{N}} T_\nu P_\nu a$ для каждого $a \in \operatorname{Dom} T$. Эти утверждения доказаны в [2].

Для произвольного линейного оператора $T : A \to B$ с замкнутым ядром положим $K(T) = \|T^{-1}\|$.

Лемма 3. *Замкнутый оператор $T = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathscr{N}} T_\nu$ нормально (компактно) разрешим тогда и только тогда, когда все операторы T_ν нормально (компактно) разрешимы и семейство констант $(K(T_\nu))_{\nu\in\mathscr{N}}$ ограничено ($K(T_\nu) \to 0$ при $\nu \to \infty$).*

Доказательство. Легко видеть, что $K(T) = \sup\{K(T_\nu) : \nu \in \mathscr{N}\}$. Поэтому оператор T нормально разрешим тогда и только тогда, когда $\sup\{K(T_\nu) : \nu \in \mathscr{N}\} < \infty$. Так как $\operatorname{Ker} T = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathscr{N}} \operatorname{Ker} T_\nu$, пространство $A_\nu/\operatorname{Ker} T_\nu$ может быть отождествлено с образом подпространства A_ν при канонической проекции $A \to A/\operatorname{Ker} T$. Это позволяет для каждого подмножества $\mathscr{N}'$ множества $\mathscr{N}$ считать оператор $(\bigoplus_{\nu\in\mathscr{N}'} T_\nu)^{-1}$ оператором, действующим из B в $A/\operatorname{Ker} T$ и заданным на подпространстве $\operatorname{Im} T$ пространства B. Этот оператор совпадает с $(\bigoplus_{\nu\in\mathscr{N}} T_\nu)^{-1}$ на $\bigoplus_{\nu\in\mathscr{N}'} \operatorname{Im} T_\nu$ и равен 0 на $\bigoplus_{\nu\in\mathscr{N}\setminus\mathscr{N}'} \operatorname{Im} T_\nu$. Поэтому $\|T^{-1} - (\bigoplus_{\nu\in\mathscr{N}'} T_\nu)^{-1}\| = \sup\{K(T_\nu) : \nu \in \mathscr{N}\setminus\mathscr{N}'\}$. Для каждого конечного подмножества $\mathscr{N}'$ множества $\mathscr{N}$ оператор $(\bigoplus_{\nu\in\mathscr{N}'} T_\nu)^{-1}$ компактен тогда и только тогда, когда компактны операторы T_ν^{-1} при $\nu \in \mathscr{N}'$. Поэтому оператор T^{-1} компактен, если операторы T_ν^{-1} компактны и $K(T_\nu) \to 0$ при $\nu \to \infty$.

Для каждого $\nu \in \mathscr{N}$ оператор T_ν^{-1} является сужением оператора T^{-1} и поэтому операторы T_ν компактно разрешимы, если компактно разрешим оператор T. Допустим, что $K(T_\nu) \not\to 0$ при $\nu \to \infty$. Тогда найдутся бесконечное множество $\mathscr{N}'$ в $\mathscr{N}$, число $\varepsilon > 0$ и элементы $b_\nu \in \operatorname{Im} T_\nu$ при $\nu \in \mathscr{N}'$ такие, что $\|b_\nu\|_B = 1$ и $\|T^{-1}b_\nu\|_{A/\operatorname{Ker} T} \geq \varepsilon$. Так как элементы $T^{-1}b_\nu$ попарно ортогональны в $A/\operatorname{Ker} T$, семейство $T^{-1}b_\nu$ не содержит сходящихся подпоследовательностей. Поэтому оператор T^{-1} не компактен. Лемма доказана.

Обратимся теперь к теории дифференциальных форм на римановых многообразиях. Пусть X — гладкое m-мерное ориентированное риманово многообразие, $L^k(X)$ — векторное пространство всех тех дифференциальных форм степени k на X, локальные координатные представления $\omega = \sum_{|I|=k} a_I dx^I$ которых имеют локально интегрируемые коэффициенты a_I, $D^k(X)$ — линейное подпространство пространства $L^k(X)$, образованное всеми теми гладкими формами на X, носители которых компактны и содержатся в $\operatorname{int} X$, $d_D^k : D^k(X) \to D^{k+1}(X)$ — оператор внешнего дифференцирования, заданный на пространстве $D^k(X)$. Дифференциальная форма $d^k\omega$ называется (*обобщенным*) *внешним дифференциалом* формы $\omega \in L^k(X)$, если равенство

$$\int_X \omega \wedge d_D^{m-k-1} u = (-1)^{k+1} \int_X d^k\omega \wedge u$$

выполнено для всех $u \in D^{m-k-1}(X)$. Отображение (частично заданное) $d^k : L^k(X) \to L^{k+1}(X)$ будем так же, как и d_D^k, называть *оператором внешнего дифференцирования*. Ясно, что $d^k = d_D^k$ на $D^k(X)$.

Для каждого числа $p \in (0, \infty)$ и произвольной измеримой функции σ на X определено пространство $L_p^k(X, \sigma)$, образованное теми формами $\omega \in L^k(X)$, для которых

$$\|\omega\|_{p,\sigma} = \left(\int_X |\omega(x)|^p |\sigma(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Здесь dx — форма объема, определяемая римановой метрикой риманова многообразия X. Будем предполагать в дальнейшем, что весовая функция σ непрерывна на X и строго положительна в каждой точке $x \in X$. В этом случае $\|\omega\|_{p,\sigma}$ — норма в пространстве $L_p^k(X, \sigma)$ и это пространство полно, при $p = 2$ оно гильбертово относительно скалярного произведения

$$(\omega, \varphi) = \int_X \sigma^2 \omega \wedge (*\varphi).$$

Невырожденное спаривание

$$\langle \omega, \varphi \rangle = \int\limits_X \omega \wedge \varphi$$

определено в каждом из следующих случаев:

1) $\omega \in L^k(X)$, $\varphi \in D^{m-k}(X)$;

2) $\omega \in D^k(X)$, $\varphi \in L^{m-k}(X)$;

3) $\omega \in L^k_p(X, \sigma)$, $\varphi \in L^{m-k}_{p'}(X, \sigma^{-1})$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

Относительно этого спаривания пространства $L^k_p(X, \sigma)$ и $L^{m-k}_{p'}(X, \sigma^{-1})$ взаимно сопряжены.

Предположим, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$ в пространстве $L^k_p(X, \sigma)$ выбрано линейное подпространство Γ^k. Последовательность $\Gamma = (\Gamma^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ будем называть *специальной последовательностью* в $L_p(X, \sigma)$, если $\Gamma^k \subset \operatorname{Dom} d^k$, $d^k(\Gamma^k) \subset \Gamma^{k+1}$, $\operatorname{Dom} d^k_\Gamma = \Gamma^k$, сужение $d^k_\Gamma : L^k_p(X, \sigma) \to L^{k+1}_p(X, \sigma)$ оператора d^k является замкнутым оператором и $D^k(X) \subset \Gamma^k$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$. Пространство Γ^k будем считать снабженным нормой $\|\omega\|_\Gamma = (\|\omega\|^2_{p,\sigma} + \|d^k\omega\|^2_{p,\sigma})^{1/2}$. Ввиду замкнутости оператора d^k_Γ это пространство банахово.

Положим

$$W^k L_p(X, \sigma) = \bigl\{\omega \in L^k_p(X, \sigma) \cap \operatorname{Dom} d^k : d^k\omega \in L^{k+1}_p(X, \sigma)\bigr\}.$$

Пространства $W^k L_p(X, \sigma)$ образуют специальную последовательность $WL_p(X, \sigma)$ в $L_p(X, \sigma)$. Оператор d^k_Γ в случае $\Gamma = WL_p(X, \sigma)$ будем обозначать символом d^k_W.

Пусть Γ — некоторая специальная последовательность в $L_p(X, \sigma)$ и Θ — семейство носителей на X, содержащее все компактные множества, лежащие в $\operatorname{int} X$. Обозначим через Γ^k_Θ замыкание в Γ^k множества тех $\omega \in \Gamma^k$, носители которых принадлежат семейству Θ. Последовательность $\Gamma_\Theta = \bigl(\Gamma^k_\Theta\bigr)_{k \in \mathbb{Z}}$ специальна в $L_p(X, \sigma)$. Оператор d^k_Γ в случае $\Gamma = (WL_p(X, \sigma))_\Theta$ будем обозначать символом $d^k_{W_\Theta}$.

Для $k \in \mathbb{Z}$ и произвольной специальной последовательности Γ в $L_p(X, \sigma)$ рассмотрим подпространство $(\Gamma^\perp)^{m-k-1}$ в $L^{m-k-1}_{p'}(X, \sigma^{-1})$, образованное всеми теми формами $\varphi \in W^{m-k-1}L_{p'}(X, \sigma^{-1})$, для которых равенство

$$\langle \omega, d^{m-k-1}\varphi \rangle = (-1)^{k+1}\langle d^k_\Gamma\omega, \varphi \rangle$$

выполнено для всех $\omega \in \Gamma^k$. Последовательность $\Gamma^\perp = ((\Gamma^\perp)^j)_{j \in \mathbb{Z}}$ специальна в $L_{p'}(X, \sigma^{-1})$. Операторы d^k_Γ и $(-1)^k d^{m-k-1}_{\Gamma^\perp}$ сопряжены относительно спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Последовательность $(A^k, T^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ банаховых пространств A^k и замкнутых операторов $T^k : A^k \to A^{k+1}$ называется *банаховым комплексом*, если $\operatorname{Im} T^{k-1} \subset \operatorname{Ker} T^k$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$. В соответствии с этой терминологией каждой специальной последовательности Γ в $L_p(X, \sigma)$ соответствует банахов комплекс $L_{p,\Gamma}(X, \sigma) = \bigl(L^k_p(X, \sigma), d^k_\Gamma\bigr)_{k \in \mathbb{Z}}$. Пространства k-мерных гомологий этого комплекса обозначают символом $H^k\Gamma$, а редуцированных k-мерных гомологий — символом $\overline{H}^k\Gamma$.

Пусть $R^k(X) = L^k(X) \times L^{k-1}(X)$. Определим оператор $\partial^k : R^k(X) \to R^{k+1}(X)$, полагая

$$\operatorname{Dom} \partial^k = \{(\omega_0, \omega_1) \in R^k(X) : \omega_0 \in \operatorname{Dom} d^k, \omega_1 \in \operatorname{Dom} d^{k-1}\}$$

и

$$\partial^k(\omega_0,\omega_1) = (d^k\omega_0, \omega_0 - d^{k-1}\omega_1).$$

Очевидно, что $\operatorname{Im}\partial^{k-1} \subset \operatorname{Ker}\partial^k$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$.

Для произвольной пары непрерывных и положительных весовых функций ξ, τ на X и числа $p \in (1,\infty)$ рассмотрим банаховы пространства $R_p^k(X,\xi,\tau) = L_p^k(X,\xi) \times L_p^{k-1}(X,\tau)$, считая при этом, что норма в $R_p^k(X,\xi,\tau)$ задана формулой $\|(\omega_0,\omega_1)\| = \left(\|\omega_0\|^2_{p,\xi} + \|\omega_1\|^2_{p,\tau}\right)^{1/2}$.

Последовательность $\Gamma = (\Gamma^k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $\Gamma^k \subset R_p^k(X,\xi,\tau)$ будем называть специальной последовательностью в $R_p(X,\xi,\tau)$, если для каждого $k \in \mathbb{Z}$

$$\Gamma^k \subset \operatorname{Dom}\partial^k, \quad \partial^k(\Gamma^k) \subset \Gamma^{k+1}, \quad D^k(X) \times D^{k-1}(X) \subset \Gamma^k$$

и сужение $\partial^k_\Gamma : R_p^k(X,\xi,\tau) \to R_p^{k+1}(X,\xi,\tau)$ с областью задания $\operatorname{Dom}\partial^k_\Gamma = \Gamma^k$ оператора ∂^k является замкнутым оператором.

Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$W^kR_p(X,\xi,\tau) = \left\{\omega \in R_p^k(X,\xi,\tau) : \omega \in \operatorname{Dom}\partial^k, \quad \partial^k\omega \in R_p^{k+1}(X,\xi,\tau)\right\}.$$

Тогда $WR_p(X,\xi,\tau) = (W^kR_p(X,\xi,\tau))_{k\in\mathbb{Z}}$ — специальная последовательность в $R_p(X,\xi,\tau)$ [2]. В случае, когда $\Gamma = WR_p(X,\xi,\tau)$, оператор ∂^k_Γ будем обозначать символом ∂^k_W. Для произвольной специальной последовательности Γ в $R_p(X,\xi,\tau)$ и семейства носителей Θ на X, содержащего все компактные множества, лежащие в $\operatorname{int} X$, обозначим через Γ^k_Θ замыкание в банаховом пространстве $\operatorname{Dom}\partial^k_\Gamma$ множества тех пар форм из Γ^k, носители которых принадлежат семейству Θ. Последовательность $\Gamma_\Theta = (\Gamma^k_\Theta)_{k\in\mathbb{Z}}$ специальна в $R_p(X,\xi,\tau)$. В случае, когда $\Gamma = (WR_p(X,\xi,\tau))_\Theta$, будем вместо ∂^k_Γ использовать обозначение $\partial^k_{W_\Theta}$.

Формула

$$\langle\omega,\varphi\rangle = \int_X [(-1)^{k+1}\omega_0 \wedge \varphi_1 + \omega_1 \wedge \varphi_0]$$

определяет невырожденное спаривание в каждом из следующих случаев:

a) $\omega \in R^k(X)$, $\varphi \in D^{m-k+1}(X) \times D^{m-k}(X)$;

b) $\omega \in D^k(X) \times D^{k-1}(X)$, $\varphi \in R^{m-k+1}(X)$;

c) $\omega \in R_p^k(X,\xi,\tau)$, $\varphi \in R_{p'}^{m-k+1}(X,\tau^{-1},\xi^{-1})$.

Это спаривание коммутативно в том смысле, что $\langle\omega,\varphi\rangle = (-1)^{mk+1}\langle\varphi,\omega\rangle$.

Лемма 4. *Пара форм $\omega \in R^k(X)$ принадлежит области задания оператора $\partial^k : R^k(X) \to R^{k+1}(X)$ тогда и только тогда, когда существует пара форм $\theta \in R^{k+1}(X)$, для которой равенство $\langle\theta,\varphi\rangle = (-1)^{k+1}\langle\omega,\partial\varphi\rangle$ выполнено для любой пары форм $\varphi \in D^{m-k}(X) \times D^{m-k-1}(X)$. При этом пара форм θ определена указанным условием однозначно и $\theta = \partial^k\omega$.*

Доказательство этой леммы легко следует из определений оператора ∂^k и спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Пусть Γ — произвольная специальная последовательность в $R_p(X,\xi,\tau)$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим подпространство $(\Gamma^\perp)^{m-k}$ пространства $R_{p'}^{m-k}(X,\tau^{-1},\xi^{-1})$, образованное теми $\varphi \in W^{m-k}R_{p'}(X,\tau^{-1},\xi^{-1})$, для которых равенство

$$\left\langle\partial^k_W\omega,\varphi\right\rangle = (-1)^{k+1}\left\langle\omega,\partial^{m-k}_W\varphi\right\rangle$$

выполнено для всех $\omega \in \Gamma^k$.

Лемма 5. *Для любой специальной последовательности* Γ *в* $R_p(X,\xi,\tau)$ *последовательность* $\Gamma^\perp$ *специальна в* $R_{p'}(X,\tau^{-1},\xi^{-1})$. *Операторы* ∂^k_Γ, $(-1)^{k+1}\partial^{m-k}_{\Gamma^\perp}$ *взаимно сопряжены относительно спаривания* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *Оператор* $\partial^{m-k}_{\Gamma^\perp}$ *нормально (компактно) разрешим в том и только том случае, когда нормально (компактно) разрешим оператор* ∂^k_Γ. *Кроме того,* $K\big(\partial^{m-k}_{\Gamma^\perp}\big)=K\big(\partial^k_\Gamma\big)$.

Доказательство. По лемме 4 оператор $\partial^{m-k}_{\Gamma^\perp}$ является сужением оператора ∂^{m-k}_W. Пространство $(\Gamma^\perp)^{m-k}$ совпадает с областью задания оператора $\big(\partial^k_\Gamma\big)'$, сопряженного оператору ∂^k_Γ. Поэтому равенство

$$\big\langle \partial^k_W\omega,\varphi\big\rangle=(-1)^{k+1}\big\langle\omega,\partial^{m-k}_W\varphi\big\rangle,$$

выполненное для любых $\omega\in\Gamma^k$, $\varphi\in(\Gamma^\perp)_{m-k}$, означает, что оператор $(-1)^{k+1}\partial^{m-k}_{\Gamma^\perp}$ сопряжен оператору ∂^k_Γ относительно спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Если T' — оператор, сопряженный произвольному плотно определенному замкнутому оператору T, то $K(T')=K(T)$ и операторы T и T' нормально (компактно) разрешимы одновременно [1, предложение 2]. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть многообразие* X *связно,* Γ, Γ_0, Γ_1 — *специальные последовательности в* $R_p(X,\xi,\tau)$, $L_p(X,\xi)$ *и* $L_p(X,\tau)$ *соответственно. Тогда если* $\Gamma^0\subset\Gamma^0_0\times\{0\}$ *и оператор* $d^0_{\Gamma_0}$ *нормально (компактно) разрешим, то и оператор* ∂^0_Γ *нормально (компактно) разрешим. Если* $\{0\}\times\Gamma^{m-1}_1\subset\Gamma^m$ *и оператор* $d^{m-1}_{\Gamma_1}$ *нормально (компактно) разрешим, то и оператор* ∂^m_Γ *нормально (компактно) разрешим.*

Доказательство. Пусть оператор $d^0_{\Gamma_0}$ нормально (компактно) разрешим и $\Gamma^0\subset\Gamma^0_0\times\{0\}$. В силу связности многообразия X будет $\dim\ker d^0_{\Gamma_0}\le 1$. По лемме 2 для $T=\partial^0_\Gamma$, $S=d^0_{\Gamma_0}$ и канонической проекции $P: L^1_p(X,\xi)\times L^0_p(X,\tau)\to L^1_p(X,\xi)$ получаем, что оператор ∂^0_Γ нормально (компактно) разрешим.

Пусть теперь нормально (компактно) разрешим оператор $d^{m-1}_{\Gamma_1}$ и $\{0\}\times\Gamma^{m-1}_1\subset\Gamma^m$. Тогда оператор $d^0_{\Gamma_1^\perp}$, сопряженный оператору $(-1)^m d^{m-1}_{\Gamma_1}$, нормально (компактно) разрешим по лемме 5. Кроме того, $(\Gamma^\perp)^0\subset(\Gamma^\perp_1)^0\times\{0\}$. По уже доказанному первому утверждению леммы оператор $\partial^0_{\Gamma^\perp}$ нормально (компактно) разрешим. По лемме 5 нормально (компактно) разрешим оператор ∂^m_Γ. Лемма доказана.

Замечание. Легко проверить, что $W^0R_p(X,\xi,\tau)_\Theta\subset W^0L_p(X,\xi)_\Theta\times\{0\}$ и $\{0\}\times W^{m-1}L_p(X,\tau)_\Theta\subset W^mR_p(X,\xi)_\Theta$. Поэтому в случае связного многообразия X оператор $\partial^0_{W_\Theta}$ нормально (компактно) разрешим, если нормально (компактно) разрешим оператор $d^0_{W_\Theta}: L^0_p(X,\tau)\to L^1_p(X,\tau)$. Оператор $\partial^m_{W_\Theta}$ нормально (компактно) разрешим, если нормально (компактно) разрешим оператор $d^{m-1}_{W_\Theta}: L^{m-1}_p(X,\xi)\to L^m_p(X,\xi)$.

Для произвольного вещественного числа $\lambda>0$ топологические векторные пространства $R^i_p(X,\xi,\tau)$ и $R^i_p(X,\xi,\lambda\tau)$ совпадают. Поэтому любую специальную последовательность Γ в $R_p(X,\xi,\tau)$ можно рассматривать как специальную последовательность в $R_p(X,\xi,\lambda\tau)$. Обозначим через $K^i_\Gamma(\lambda)$ константу $K\big(\partial^i_\Gamma: R^i_p(X,\xi,\lambda\tau)\to R^{i+1}_p(X,\xi,\lambda\tau)\big)$.

Лемма 7. *Для любой специальной последовательности* Γ *в* $R_p(X,\xi,\tau)$ *функция* $K^i_\Gamma(\lambda)$ *переменной* λ *при* $i\in\{0,m\}$ *не возрастает с ростом* λ.

Доказательство. Оператор ∂^i_Γ, рассматриваемый как отображение векторных пространств, не зависит от λ. Норма любого элемента пространства

$R^1_p(X,\xi,\lambda\tau)$ не убывает с ростом λ, а норма пространства $R^0_p(X,\xi,\lambda\tau)$ не зависит от λ. Поэтому K^0_Γ не возрастает с ростом λ.

Константы

$$K(\partial^m_\Gamma : R^m_p(X,\xi,\lambda\tau) \to R^{m+1}_p(X,\xi,\lambda\tau))$$

и

$$K(\partial^m_\Gamma : R^m_p(X,\lambda^{-1}\xi,\tau) \to R^{m+1}_p(X,\lambda^{-1}\xi,\tau))$$

совпадают. Норма любого элемента в пространстве $R^m_p(X,\lambda^{-1}\xi,\tau)$ не убывает с ростом λ, а норма в $R^{m+1}_p(X,\lambda^{-1}\xi,\tau)$ не зависит от λ. Поэтому $K^m_\Gamma(\lambda)$ не возрастает с ростом λ. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть Γ — произвольная специальная последовательность в $R_p(X,\xi,\tau)$, $i \in \{0,m\}$ и оператор $\partial^i_\Gamma : R^i_p(X,\xi,\tau) \to R^{i+1}_p(X,\xi,\tau)$ компактно разрешим. Тогда $K^i_\Gamma(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$.*

Доказательство. Предположим, что $K^0_\Gamma(\lambda) \not\to 0$ при $\lambda \to \infty$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что $K^0_\Gamma(\lambda) \geq \delta$ для всех $\lambda > 0$. Для такого δ и любого $\lambda \geq 1$ выберем $\omega_\lambda \in L^0_p(X,\xi)$ так, что

$$(\omega_\lambda, 0) \in \Gamma^0, \quad \|\omega_\lambda\|^2_{\lambda\tau} + \|d^0\omega_\lambda\|^2_\xi = 1, \quad \|\omega_\lambda\|_\xi \geq \frac{3}{4}\delta.$$

По индукции построим последовательность λ_j такую, что $\|\omega_{\lambda_i} - \omega_{\lambda_j}\|_\xi \geq \frac{\delta}{4}$ при $i \neq j$. Пусть λ_j при $1 \leq j \leq N$, удовлетворяющие указанному условию, выбраны. Найдется компактное гладкое подмногообразие X_N многообразия X той же размерности, что и X, такое, что $\left\|i^*_N\omega_{\lambda_j}\right\|_\xi \geq \frac{\delta}{2}$ при $1 \leq j \leq N$, где $i^*_N : L^0_p(X,\xi) \to L^0_p(X_N,\xi)$ — оператор ограничения функций с X на X_N.

Пусть

$$\lambda_{N+1} = \frac{4}{\delta}\sup\left\{\frac{\xi(x)}{\tau(x)} : x \in X_N\right\}.$$

Тогда для $1 \leq j \leq N$

$$\begin{aligned}\|\omega_{\lambda_{N+1}} - \omega_{\lambda_j}\|_\xi &\geq \left|\left\|i^*_N\omega_{\lambda_{N+1}}\right\|_\xi - \left\|i^*_N\omega_{\lambda_j}\right\|_\xi\right| \geq \frac{\delta}{2} - \left\|i^*_N\omega_{\lambda_{N+1}}\right\|_\xi \\ &\geq \frac{\delta}{2} - \left\|i^*_N\omega_{\lambda_{N+1}}\right\|_\tau \sup\left\{\frac{\xi(x)}{\tau(x)} : x \in X_N\right\} \\ &= \frac{\delta}{2} - \|\omega_{\lambda_{N+1}}\|_{\lambda_{N+1}\tau}\frac{1}{\lambda_{N+1}}\sup\left\{\frac{\xi(x)}{\tau(x)} : x \in X_N\right\} \geq \frac{\delta}{4}.\end{aligned}$$

Так как $\lambda_j \geq 1$, то $\|\omega_{\lambda_j}\|_\tau \leq \|\omega_{\lambda_j}\|_{\lambda_j\tau}$.

Построена последовательность форм ω_{λ_j} такая, что $\|\omega_{\lambda_j}\|^2_\tau + \|d^0\omega_{\lambda_j}\|^2_\xi \leq 1$, $\|\omega_{\lambda_j} - \omega_{\lambda_i}\|_\xi \geq \frac{\delta}{4} > 0$ при любых $i \neq j$ и $(\omega_{\lambda_j}, 0) \in \Gamma^0$. Наличие этой последовательности противоречит условию компактной разрешимости оператора $\partial^0_\Gamma : R^m_p(X,\xi,\tau) \to R^1_p(X,\xi,\tau)$. Утверждение леммы в случае $i = 0$ доказано. По лемме 5 операторы

$$\partial^m_\Gamma : R^m_p(X,\xi,\lambda\tau) \to R^{m+1}_p(X,\xi,\lambda\tau)$$

и

$$\partial^0_{\Gamma^\perp} : R^0_{p'}(X,\tau^{-1},\lambda\xi^{-1}) \to R^1_{p'}(X,\tau^{-1},\lambda\xi^{-1})$$

компактно разрешимы одновременно. Кроме того $K\big(\partial^m_\Gamma\big) = K\big(\partial^0_{\Gamma^\perp}\big)$. Следовательно, утверждение леммы в случае $i = m$ сводится к случаю $i = 0$. Лемма доказана.

Пусть Y — гладкое n-мерное риманово многообразие, f — гладкая положительная функция на X, $M = X \times_f Y$ — искривленное произведение (warped product) многообразий X и Y с искривляющей функцией f, ρ — весовая функция на X, σ — весовая функция на Y, Γ — специальная последовательность в $L_2(Y,\sigma)$, Θ — семейство носителей в X, содержащее все компактные множества, лежащие в $\operatorname{int} X$. Обозначим через $\widetilde{\Gamma}^k$ пространство, образованное всеми теми формами $\omega \in W^k L_2(M,\rho\sigma)$, для которых равенство $\langle d^k\omega, u \wedge v\rangle = (-1)^{k+1}\langle \omega, d^{n+m-k-1}(u \wedge v)\rangle$ выполнено всякий раз, как только $u \in D^i(X)$, $v \in (\Gamma^\perp)^j$, $i + j = n + m - k - 1$. В [2] установлено, что $\widetilde{\Gamma} = (\widetilde{\Gamma}^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ — специальная последовательность в $L_2(M,\rho\sigma)$.

Пусть $\Theta \times Y$ — семейство всех тех замкнутых множеств в M, каждое из которых содержится в некотором множестве вида $F \times Y$, $F \in \Theta$. Пусть $\rho_j = \rho \cdot f^{\frac{n}{2}-j}$ для $0 \le j \le n$,

$$K_j^i(\lambda) = K\big(\partial^i_{W_\Theta} : R_2^i(X,\rho_j,\lambda\rho_{j+1}) \to R_2^{i+1}(X,\rho_j,\lambda\rho_{j+1})\big).$$

Теорема 1. *Пусть* $\dim X = m > 0$, $0 \le k \le n + m - 1$, *операторы* $d^j_\Gamma : L_2^j(Y,\sigma) \to L_2^{j+1}(Y,\sigma)$ *компактно разрешимы при* $k - n \le j \le k$. *Тогда*

1) *оператор* $d^k_{\widetilde{\Gamma}_{\Theta\times Y}} : L_2^k(M,\rho\sigma) \to L_2^{k+1}(M,\rho\sigma)$ *нормально разрешим в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*

a) *операторы* $d^i_{W_\Theta} : L_2^i(X,\rho_j) \to L_2^{i+1}(X,\rho_j)$ *нормально разрешимы при всех* i,j *таких, что* $i + j = k$, $0 \le i < m$, $0 \le j \le n$, $H^j\Gamma \ne 0$,

b) *операторы* $\partial^i_{W_\Theta} : R_2^i(X,\rho_j,\rho_{j+1}) \to R_2^{i+1}(X,\rho_j,\rho_{j+1})$ *нормально разрешимы при всех* i,j *таких, что* $i + j = k$, $0 \le i \le m$, $0 \le j < n$,

c) $\sup\{K_j^i(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} < \infty$ *для всех* i,j, *удовлетворяющих условиям п.* b);

2) *оператор* $d^k_{\widetilde{\Gamma}_{\Theta\times Y}} : L_2^k(M,\rho\sigma) \to L_2^{k+1}(M,\rho\sigma)$ *компактно разрешим в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*

a$'$) *операторы* $d^i_{W_\Theta} : L_2^i(X,\rho_j) \to L_2^{i+1}(X,\rho_j)$ *компактно разрешимы и* $\dim H^j\Gamma < \infty$ *для всех* i,j *таких, что* $i + j = k$, $0 \le i < m$, $0 \le j \le n$, $H^j\Gamma \ne 0$,

b$'$) *операторы* $\partial^i_{W_\Theta} : R_2^i(X,\rho_j,\rho_{j+1}) \to R_2^{i+1}(X,\rho_j,\rho_{j+1})$ *компактно разрешимы для всех* i,j *таких, что* $i + j = k$, $0 \le i \le m$, $0 \le j < n$,

c$'$) $K_j^i(\lambda) \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$ *для любых* i,j, *удовлетворяющих условиям п.* b$'$).

Доказательство. Пусть $S = \{s \in \mathbb{Z} : \max\{k-m, 0\} \le s \le \min\{k, n-1\}\}$, $T = \{t \in \mathbb{Z} : k - m \le t \le k, H^t\Gamma \ne 0\}$. Обозначим через C^s ортогональное дополнение к $\operatorname{Ker} d^s_\Gamma$ в $L_2^s(Y,\sigma)$, а через H^t ортогональное дополнение к $\overline{\operatorname{Im} d^{t-1}_\Gamma}$ в $\operatorname{Ker} d^t_\Gamma$. Предположение о компактной разрешимости операторов d^j_Γ при $k-n \le j \le k$ позволяет так выбрать для каждого $s \in S$ ортонормированные базисы c^s_ν в C^s, $\nu \in \mathscr{N}_s$ и b^{s+1}_ν в $\overline{\operatorname{Im} d^s_\Gamma}$, $\nu \in \mathscr{N}_s$ что будут выполнены следующие условия: $d^s c^s_\nu = \lambda^s_\nu b^s_\nu$, $\lambda^s_\nu > 0$ для всех $\nu \in \mathscr{N}_s$, $\lambda^s_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$ [2, лемма 6]. Пусть h^t_κ, $\kappa \in \mathscr{K}_t$ — произвольный ортонормированный базис в H^t.

Для любых $s \in S$, $\nu \in \mathscr{N}_s$ рассмотрим подкомплекс $C_{s,\nu}$ комплекса $L_{2,\Gamma}(Y,\sigma)$, для которого $C^i_{s,\nu} = 0$ при $j \notin \{s, s+1\}$, $\dim C^s_{s,\nu} = \dim C^{s+1}_{s,\nu} = 1$, $c^s_\nu \in C^s_{s,\nu}$, а для любых $t \in T$, $\kappa \in \mathscr{K}_t$ — подкомплекс $H_{t,\kappa}$ комплекса $L_{2,\Gamma}(Y,\sigma)$, для которого $H^j_{t,\kappa} = 0$ при $j \ne t$, $\dim H^t_{t,\kappa} = 1$, $h^t_\kappa \in H^t_{t,\kappa}$.

Пусть

$$A^j = \begin{cases} L_2^j(Y,\sigma) & \text{при } j < \max(k-m,0) \text{ и } j > \min(k+1,n), \\ \overline{\operatorname{Im} d_\Gamma^{j-1}} & \text{при } j = \max(k-m,0), \\ C^j + H^j & \text{при } j = \min(k+1,n), \\ 0 & \text{при } \max(k-m,0) < j < \min(k+1,n). \end{cases}$$

Обозначим через d_A^j сужение оператора d^j с $\operatorname{Dom} d_A^j = A^j \cap \Gamma^j$. Пространства A^j вместе с дифференциалами d_A^j образуют подкомплекс комплекса $L_2(Y,\sigma)$. Комплекс $L_2(Y,\sigma)$ является ортогональной суммой своих подкомплексов $C_{s,\nu}$, $H_{t,\kappa}$ и A. Это означает, что для каждого j гильбертово пространство $L_2^j(Y,\sigma)$ является ортогональной суммой своих подпространств $C_{s,\nu}^j$, $H_{t,\kappa}^j$ и A^j, а дифференциал d_Γ^j — ортогональной суммой j-х дифференциалов комплексов $C_{s,\nu}$, $H_{t,\kappa}$ и A. В [2, лемма 13] для каждого разложения в ортогональную сумму комплекса $L_{2,\Gamma}(Y,\sigma)$ и семейства носителей Θ на X построено некоторое разложение в ортогональную сумму комплекса $L_{2,\widetilde{\Gamma}_{\Theta\times Y}}(M,\rho\sigma)$. Согласно [2] разложению

$$L_{2,\Gamma}(Y,\sigma) = \Big(\bigoplus C_{s,\nu}\Big) \bigoplus \Big(\bigoplus H_{t,\kappa}\Big) \bigoplus A$$

соответствует разложение в ортогональную сумму

$$L_{2,\widetilde{\Gamma}_{\Theta\times Y}} = \Big(\bigoplus [C_{s,\nu}]_\Theta\Big) \bigoplus \Big(\bigoplus [H_{t,\kappa}]_\Theta\Big) \bigoplus [A]_\Theta,$$

причем каждый комплекс $[C_{s,\nu}]_\Theta)$ изоморфен со сдвигом размерностей на s комплексу $R_{2,\Theta}\big(X,\rho_s,\lambda_\nu^s\rho_{s+1}\big)$, каждый комплекс $[H_{t,\kappa}]_\Theta$ изоморфен со сдвигом размерностей на t комплексу $L_{2,\Theta}(X,\rho_t)$, а k-й дифференциал комплекса $[A]_\Theta$ равен 0. Осталось воспользоваться леммой 3. Теорема доказана.

Замечание. В [2] установлено, что $\widetilde{\Gamma}_{\Theta\times Y} = W$, если $\Gamma = W$, а Θ — семейство всех замкнутых множеств в X, и $\widetilde{\Gamma}_{\Theta\times Y} = W_c$, если $\Gamma = W_c$ и Θ — семейство всех компактных множеств, лежащих в $\operatorname{int} X$.

Теорема 2. *Пусть многообразие X связно, $\dim X > 0$ и оператор $d_\Gamma^0 : L_2^0(Y,\sigma) \to L_2^0(Y,\sigma)$ компактно разрешим. Тогда оператор $d_{\widetilde{\Gamma}_{\Theta\times Y}}^0$ нормально (компактно) разрешим тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

a) $H^0\Gamma \neq 0$ $(0 < \dim H^0\Gamma < \infty)$, *и оператор $d_{W_\Theta}^0 : L_2^0(X,\rho_0) \to L_2^1(X,\rho_0)$ нормально (компактно) разрешим,*

b) $H^0\Gamma = 0$, *и оператор $\partial_{W_\Theta}^0 : R_2^0(X,\rho_0,\rho_1) \to R_2^1(X,\rho_0,\rho_1)$ нормально (компактно) разрешим.*

Доказательство. Используя лемму 6 и замечание к ней, заключаем, что оператор $\partial_{W_\Theta}^0 : R_2^0(X,\rho_0,\rho_1) \to R_2^1(X,\rho_0,\rho_1)$ нормально (компактно) разрешим, если нормально (компактно) разрешим оператор $d_{W_\Theta}^0 : L_2^0(X,\rho_0) \to L_2^1(X,\rho_1)$. Поэтому в случае $k = 0$ из условия a) теоремы 1 вытекает условие b) этой теоремы, а из условия a$'$) — условие b$'$). Леммы 7 и 8 показывают, что при $k = 0$ выполнены условия c) и c$'$) теоремы 1. Поэтому теорема 2 следует из теоремы 1. Теорема доказана.

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 2$'$. *Пусть многообразие X связно, $\dim X > 0$ и оператор $d_\Gamma^{n-1} : L_2^{n-1}(Y,\sigma) \to L_2^n(Y,\sigma)$ компактно разрешим. Тогда оператор*

$$d_{\widetilde{\Gamma}_{\Theta\times Y}}^{n+m-1} : L_2^{n+m-1}(M,\rho\sigma) \to L_2^{n+m}(M,\rho\sigma)$$

нормально (компактно) разрешим тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

a) $H^n\Gamma \neq 0$ $(0 < \dim H^n\Gamma < \infty)$, *и оператор* $d^{m-1}_{W_\Theta} : L^{m-1}_2(X,\rho_n) \to L^m_2(X,\rho_n)$ *нормально (компактно) разрешим,*

b) $H^n\Gamma = 0$, *и оператор* $\partial^m_{W_\Theta} : R^m_2(X,\rho_{n-1},\rho_n) \to R^{m+1}_2(X,\rho_{n-1},\rho_n)$ *нормально (компактно) разрешим.*

Теорема 3. *Пусть многообразие X связно,* $\dim X = 1$, $0 \le k \le n$, *операторы* $d^j_\Gamma : L^j_2(Y,\sigma) \to L^{j+1}_2(Y,\sigma)$ *компактно разрешимы при* $j \in \{k-1,k\}$. *Тогда оператор* $d^k_{\widetilde{\Gamma}_{\Theta\times Y}}$ *нормально (компактно) разрешим в том и только том случае, когда выполнено одно из следующих условий:*

a) $H^k\Gamma \neq 0$ $(0 < \dim H^k\Gamma < \infty)$, *и оператор* $d^0_{W_c} : L^0_2(X,\rho_k) \to L^1_2(X,\rho_k)$ *нормально (компактно) разрешим,*

b) $H^k\Gamma = 0$, $0 < k < n$, *операторы* $\partial^0_{W_c} : R^0_2(X,\rho_k,\rho_{k+1}) \to R^1_2(X,\rho_k,\rho_{k+1})$ *и* $\partial^1_{W_c} : R^1_2(X,\rho_{k-1},\rho_k) \to R^2_2(X,\rho_{k-1},\rho_k)$ *нормально (компактно) разрешимы.*

c) $H^0\Gamma = 0$, $k = 0$, *оператор* $\partial^0_{W_c} : R^0_2(X,\rho_0,\rho_1) \to R^1_2(X,\rho_0,\rho_1)$ *нормально (компактно) разрешим,*

d) $H^n\Gamma = 0$, $k = n$, *оператор* $\partial^1_{W_c} : R^1_2(X,\rho_{n-1},\rho_n) \to R^2_2(X,\rho_{n-1},\rho_n)$ *нормально (компактно) разрешим.*

Доказательство. Так как каждое связное одномерное риманово многообразие изометрично промежутку вещественной прямой, то можно считать, что $X = (a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$. Для двух произвольных весовых функций ξ и τ на X положим

$$W(X,\xi,\tau) = \bigl\{\omega \in L^0_2(X,\xi) \cap \operatorname{Dom} d^0 : d^1\omega \in L^0_2(X,\tau)\bigr\}.$$

Векторное пространство $W(X,\xi,\tau)$ будем считать снабженным нормой $\|\omega\| = \bigl(\|\omega\|^2_{2,\xi} + \|d\omega\|^2_{2,\tau}\bigr)^{1/2}$. Пусть $W(X,\xi,\tau)_c$ — замыкание в $W(X,\xi,\tau)$ подпространства $D^0(X)$ гладких функций с компактными носителями. Коразмерность пространства $W_c(X,\xi,\tau)$ в $W(X,\xi,\tau)$ не превосходит 2 [4, лемма 11].

Пусть $\xi = \max(\rho_k,\rho_{k+1})$, $\tau = \rho_{k+1}$. Область задания оператора

$$\partial^0_W : R^0_2(X,\rho_k,\rho_{k+1}) \to R^1_2(X,\rho_k,\rho_{k+1})$$

очевидным образом может быть отождествлена с пространством $W(X,\xi,\tau)$, а область задания оператора $\partial^0_{W_c}$ — с пространством $W_c(X,\xi,\tau)$. Для любой специальной последовательности Γ в $R_2(X,\rho_k,\rho_{k+1})$ имеем $\operatorname{Dom}\partial^0_{W_c} \subset \operatorname{Dom}\partial^0_\Gamma \subset \operatorname{Dom}\partial^0_W$, и поэтому коразмерность пространства $\operatorname{Dom}\partial^0_{W_c}$ в $\operatorname{Dom}\partial^0_\Gamma$ не превосходит 2. А так как при этом $\operatorname{Ker}\partial^0_\Gamma = 0$, оператор ∂^0_Γ нормально (компактно) разрешим тогда и только тогда, когда нормально (компактно) разрешим оператор $\partial^0_{W_c}$ [1].

Область задания оператора $d^0_W : L^0_2(X,\rho_k) \to L^1_2(X,\rho_k)$ совпадает с $W(X,\rho_k,\rho_k)$, а область задания оператора $d^0_{W_c} : L^0_2(X,\rho_k) \to L^1_2(X,\rho_k)$ — с $W_c(X,\rho_k,\rho_k)$, $\dim\ker d^0_W \le 1$. Отсюда делаем вывод, что для любой специальной последовательности Γ в $L_2(X,\rho_k)$ оператор d^0_Γ нормально (компактно) разрешим тогда и только тогда, когда нормально (компактно) разрешим оператор $d^0_{W_c}$.

Для произвольной специальной последовательности Γ в $R_2(X,\rho_{k-1},\rho_k)$ будет $\partial^1_{W_c} \subset \partial^1_\Gamma \subset \partial^1_W$. В соответствии с леммой 5 оператор $(\partial^1_\Gamma)'$, сопряженный оператору ∂^1_Γ), удовлетворяет условиям

$$\partial^0_{W_c} \subset (\partial^1_\Gamma)' \subset \partial^0_W, \quad \partial^0_{W_c},\, \partial^0_W : R^0_2\bigl(X,\rho_k^{-1},\rho_{k-1}^{-1}\bigr) \to R^1_2\bigl(X,\rho_k^{-1},\rho_{k-1}^{-1}\bigr).$$

Поэтому оператор ∂^1_Γ нормально (компактно) разрешим тогда и только тогда, когда нормально (компактно) разрешим оператор

$$\partial^0_W : R^0_2\big(X, \rho_k^{-1}, \rho_{k-1}^{-1}\big) \to R^1_2\big(X, \rho_k^{-1}, \rho_{k-1}^{-1}\big),$$

который, в свою очередь, нормально (компактно) разрешим одновременно с оператором

$$\partial^1_{W_c} : R^1_2(X, \rho_{k-1}, \rho_k) \to R^1_2(X, \rho_{k-1}, \rho_k).$$

Лемма 6, замечание к ней, леммы 7 и 8 позволяют теперь убедиться в том, что в частном случае $\dim X = 1$ условия нормальной и компактной разрешимости оператора $d^k_{\widetilde{\Gamma}_{\Theta\times Y}}$ сводятся к условиям теоремы 3. Теорема доказана.

Следствие. *Если* $\dim X = 1$, *а* Y *— замкнутое (т. е. компактное без края) многообразие, то для любого* $k \in \mathbb{Z}$ *оператор* $d^k_W : L^k_2(M, \rho\sigma) \to L^{k+1}_2(M, \rho\sigma)$ *нормально (компактно) разрешим тогда и только тогда, когда нормально (компактно) разрешим оператор* $d^k_{W_c} : L^k_2(M, \rho\sigma) \to L^{k+1}_2(M, \rho\sigma)$.

Доказательство. В случае замкнутого многообразия Y все операторы $d^j_W : L_2(Y, \sigma)$ в $L_2(Y, \sigma)$ компактно разрешимы [1]. Кроме того $\widetilde{W_c} = W_c$ и $\widetilde{W} = W$. По теореме 3 свойство оператора $d^k_{\widetilde{W}_{\Theta\times Y}}$ быть нормально (компактно) разрешимым не зависит от выбора семейства носителей Θ. Следствие доказано.

Оператор $\partial^0_{W_c} : R^0_2(X, \xi, \tau) \to R^0_2(X, \xi, \tau)$ нормально разрешим тогда и только тогда, когда имеет место вложение $W^0 R^{(1)}_2(X, \xi, \tau)_c \subset L^0_2(X, \xi, \tau)$. Этот оператор компактно разрешим тогда и только тогда, когда оператор указанного вложения компактен. В [5] указаны условия существования и компактности оператора вложения $W^0 R_2(X, \xi, \tau)_c \subset L^0_2(X, \xi, \tau)$ в терминах свойств весовых функций ξ и τ.

В формулировке теоремы 3 условие нормальной (компактной) разрешимости оператора $\partial^0_{W_c}$ можно заменить условием наличия (компактного) вложения $W^0 R_2(X, \xi, \tau)_c \subset L^0_2(X, \xi, \tau)$. Полученное в результате такой замены утверждение подтверждает в случае $p = 2$ сформулированную в [3] гипотезу об условиях нормальной (компактной) разрешимости операторов d^k_W и $d^k_{W_c}$ на искривленных цилиндрах. В общем вопрос о справедливости этой гипотезы остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О нормальной и компактной разрешимости линейных операторов // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 49–59.
2. *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О разложении в ортогональную сумму комплексов де Рама искривленных произведений римановых многообразий // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 354–368.
3. *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О нормальной разрешимости оператора внешнего дифференцирования на искривленных произведениях // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 324–337.
4. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Ненулевые элементы L_p-когомологий искривленных произведений // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 6. С. 14–30.
5. *Oinarov R.* On weighted norm inequalities with three weights // J. London Math. Soc. (2). 1993. V. 48, N 1. P. 103–116.

Статья поступила 5 ноября 1999 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
kuzminov@math.nsc.ru; shvedov@math.nsc.ru