Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 531.314.3+514.765.1

ДВОЙНЫЕ ЧАСТНЫЕ ГРУПП ЛИ С ИНТЕГРИРУЕМЫМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ПОТОКОМ

Я. В. Базайкин

Аннотация: Получена оценка числа функционально независимых инволюций первых интегралов геодезического потока на двойных частных групп Ли. Доказана интегрируемость геодезического потока на неоднородных 7- и 13-мерных пространствах положительной кривизны. Библиогр. 9.

§ 1. Введение

Пусть M — риманово многообразие размерности n. Геодезический поток на T^*M *вполне интегрируем*, если существуют n первых интегралов $f_1, \dots, f_n : T^*M \to \mathbb{R}$, которые независимы почти всюду в T^*M и находятся в инволюции, т. е. $\{f_i, f_j\} = 0$ для $i, j = 1, \dots, n$, относительно стандартной симплектической структуры на T^*M.

Новый метод интегрирования геодезического потока на однородных пространствах найден Тиммом [1], успешно применившим его к комплексным и вещественным грассмановым многообразиям. Метод Тимма описан во втором параграфе предлагаемой работы.

В [2] Патернайн и Спатцир применили метод Тимма к пространствам Эшенбурга $M_{1,-1,2m,2m}$ и к сфере Громолла — Майера Σ^7, которые не являются однородными, а получаются как фактор-пространства группы Ли G по свободному действию некоторой подгруппы $U \subset G \times G$ одновременно левыми и правыми сдвигами: $U \ni (g_1, g_2) : g \mapsto g_1 g g_2^{-1}$, и называются двойными частными групп Ли (для пространств Эшенбурга $G = SU(3), U = U(1)$, для сферы Громолла — Майера $G = Sp(2), U = Sp(1)$). Патернайн и Спатцир для построения первых интегралов геодезического потока на двойных частных $SU(3)/U(1)$ и $Sp(2)/Sp(1)$ сначала применили метод Тимма к $SU(3)$ и $Sp(2)$, а затем использовали римановы субмерсии $SU(3) \to M_{1,-1,2m,2m}$ и $Sp(2) \to \Sigma^7$.

Заметим, что впервые конструкция двойного частного была использована Громоллом и Майером в [3] для построенная 7-мерной сферы Σ^7 с экзотической гладкостью и неотрицательной секционной кривизной. В дальнейшем двойные частные групп Ли изучались и использовались для построения римановых пространств с положительной секционной кривизной. А именно, Эшенбургом [4] и автором [5] найдены серии соответственно 7- и 13-мерных пространств

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96–15–96877, 98–01–00749).

положительной секционной кривизны. Отметим, что в [2] показана интегрируемость геодезического потока на пространствах, диффеоморфных пространствам Эшенбурга, но не изометричных им. В частности, на пространствах, рассмотренных в [2], секционная кривизна не является положительной.

В данной работе рассматриваются двойные частные групп Ли общего вида $H\backslash G/K$ и устанавливается оценка снизу числа независимых интегралов, получаемых методом Тимма на G и опущенных при помощи римановой субмерсии на $H\backslash G/K$.

Теорема 1. *Рассмотрим $M = H\backslash G/K$ — двойное частное компактной группы G. Положим*

$$\mathbf{v} = (\mathbf{h}+\mathbf{k})^{\perp} \subset \mathbf{g},$$

где $\mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{k}$ — алгебры Ли групп G, H, K и ортогональное дополнение берется относительно двусторонне инвариантной метрики на G. Пусть существуют цепочки вложенных алгебр Ли:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 \subset \dots \subset \mathbf{h}_l = \mathbf{g}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_0 \subset \dots \subset \mathbf{k}_m = \mathbf{g},$$

и $r_1 = \operatorname{rank}(\{\mathbf{h}_i\}_i, \mathbf{v})$, $r_2 = \operatorname{rank}(\{\mathbf{k}_i\}_i, \mathbf{v})$, $r_3 = \operatorname{rank}(G)$. Тогда для геодезического потока на M существуют по крайней мере $r_1 + r_2 - r_3$ функционально независимых первых интегралов, находящихся в инволюции.

Понятие ранга цепочки подалгебр вводится и изучается в третьем параграфе, сама теорема доказывается в четвертом параграфе. Подчеркнем, что ранг всегда без труда вычисляется.

В качестве применения этой теоремы в пятом параграфе мы доказываем интегрируемость геодезического потока на пространствах Эшенбурга положительной кривизны, построенных в [6], и на 13-мерных пространствах положительной кривизны, построенных и изученных автором в [5].

Автор благодарит И. А. Тайманова за постановку задачи и полезные обсуждения.

§ 2. Метод Тимма

Все группы Ли и алгебры Ли в статье подразумеваются компактными и аналитическими; для групп Ли G, H, $K, \dots$ их алгебры Ли будем обозначать через $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{k} \dots$. Будем считать, что на группе Ли задана двусторонне инвариантная метрика.

Пусть M — риманово многообразие. На кокасательном расслоении T^*M существует естественная симплектическая структура. Напомним ее определение. Сначала определим дифференциальную 1-форму α на T^*M. Пусть $\pi' : T^*M \to M$ — каноническая проекция. Рассмотрим элемент $(q,p) \in T^*M$, где $q \in M$, $p \in T^*_qM$. Тогда возникает отображение $d\pi' : T_{(q,p)}T^*M \to T_qM$ и мы полагаем $\alpha(\xi) = p(d\pi'(\xi))$ для $\xi \in T_{(q,p)}T^*M$. Наконец, 2-форма $\omega = d\alpha$ на T^*M задает симплектическую структуру на T^*M. Функция Гамильтона H на T^*M определяется следующим образом:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\langle p, p\rangle,$$

где $(q,p) \in T^*M$. Геодезический поток на T^*M задается системой уравнений Гамильтона $\dot q = \operatorname{sgrad}(H(q))$. В координатах это выписывается достаточно просто. Пусть U — координатная окрестность на многообразии M, а $(q^1, q^2, \dots, q^n)$ —

координаты в U. Рассмотрим окрестность U' в T^*M, состоящую из ковекторов, приложенных в точках из U. Тогда функции $p_1, p_2, \dots, p_n$ на U' относят ковектору набор его значений на базисных векторах $\frac{\partial}{\partial q^1}, \frac{\partial}{\partial q^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n}$ и набор $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ задает координаты в U'. В этих координатах $\alpha = p_i dq^i$ и $\omega = dp_i \wedge dq^i$.

Следуя традиции работ [1, 2], будем действовать в касательном расслоении, которое технически более удобно при рассмотрении римановых субмерсий. Риманова метрика позволяет отождествить T^*M с TM, таким образом симплектическая структура переносится на TM. Этот изоморфизм задается формулой $v^i = g^{ij}(q)p_j$, где $v \in T_qM$. При этом форма $\omega = d(g_{ij}v^i) \wedge dq^j$ задает симплектическую структуру на TM.

Пусть теперь группа Ли G действует на M изометриями. Тогда G действует на T^*M и TM дифференцированиями, которые сохраняют симплектическую форму. Далее, действие группы G на M определяет гомоморфизм группы G в группу $\mathrm{Iso}(M)$ изометрий многообразия M. Следовательно, дифференциал этого гомоморфизма представляет собой гомоморфизм алгебры Ли $\mathbf{g}$ в алгебру Ли киллинговых векторных полей на M. Таким образом, каждый вектор $X \in \mathbf{g}$ определяет векторное поле на M, которое мы тоже будем обозначать через X. Непосредственное выражение для поля X, заданного вектором $X \in \mathbf{g}$, следующее:

$$X(q) = \frac{d}{dt}(\exp(tX) \cdot q)|_{t=0},$$

где $q \in M$.

Рассмотрим отображение момента

$$\Phi : TM \to \mathbf{g}^*,$$

которое определяется формулой

$$\Phi(q, v)(X) = \langle v, X(q) \rangle_q,$$

где $(q, v) \in TM$ и $X \in \mathbf{g}$.

На алгебре Ли $\mathbf{g}$ задана $\mathrm{Ad}(G)$-инвариантная метрика, которая определяет изоморфизм между $\mathbf{g}^*$ и $\mathbf{g}$. Соответственно возникает отображение

$$\Phi' : TM \to \mathbf{g},$$

которое мы тоже будем называть *отображением момента.*

Лемма 1. *Отображение момента Φ постоянно на траекториях геодезического потока в TM. В частности, функции вида $f \circ \Phi$, $f \in C^\infty(\mathbf{g}^*)$, являются первыми интегралами потока.*

Доказательство. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита на M. Рассмотрим траекторию $(q(t), v(t))$ геодезического потока в TM, т. е. $q(t)$ — геодезическая в M и $v(t) = \dot{q}(t)$. Продолжим $v(t)$ до векторного поля V на M. Пусть $X \in \mathbf{g}$, т. е. определено киллингово поле, которые мы тоже обозначаем через X. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\Phi(q(t), v(t))(X)) &= \frac{d}{dt}\langle v(t), X(q(t)) \rangle_{q(t)} \\ &= V\langle V, X \rangle_{q(t)} = \langle \nabla_V V, X \rangle_{q(t)} + \langle V, \nabla_V X \rangle_{q(t)} = 0\end{aligned}$$

для всех t (здесь $\nabla_V V = 0$, так как $q(t)$ — геодезическая, и $\langle V, \nabla_V X \rangle = 0$, поскольку X киллингово). Лемма 1 доказана.

Обозначим через $\mathscr{F}(\mathbf{g}^*)$ пространство полиномиальных функций на $\mathbf{g}^*$. Оно наделяется скобками Пуассона $\{\ ,\}_{\mathbf{g}^*} = \{\ ,\}$ следующим образом.

Пусть $x \in \mathbf{g}^*$. Рассмотрим орбиту коприсоединенного представления $\mathscr{O} = \mathrm{Ad}(G)x$. Очевидно, что $T_x\mathscr{O} = \{\mathrm{ad}(Y)x \mid Y \in \mathbf{g}\}$. На $\mathscr{O}$ можно завести симплектическую структуру. Рассмотрим $y, z \in T_x\mathscr{O}$. Найдутся $Y, Z \in \mathbf{g}$ такие, что $y = \mathrm{ad}(Y)x$ и $z = \mathrm{ad}(Z)x$. Положим $\omega(y, z) = x([Y, Z])$. Возникшие скобки Пуассона $\{\ ,\}_{\mathscr{O}}$ называют *скобками Ли — Пуассона.*

Пусть теперь f, g — гладкие функции на $\mathbf{g}^*$. В прежних обозначениях положим

$$\{f, g\}(x) = \{f|_{\mathscr{O}}, g|_{\mathscr{O}}\}_{\mathscr{O}}(x).$$

Скобки Пуассона $\{\ ,\}$ в $\mathbf{g}^*$ можно описать по-иному. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_m$ — базис в $\mathbf{g}$ и C_{ij}^k — структурные константы, т. е. $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$. Пусть $e^1, e^2, \dots, e^m$ — двойственный базис в $\mathbf{g}^*$. Тогда для любых гладких функций f, g на $\mathbf{g}^*$ и любого $x = x_k e^k \in \mathbf{g}^*$

$$\{f, g\}(x) = -C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x).$$

Пусть $\mathscr{F}(TM)$ — пространство гладких функций на TM, обладающее скобками Пуассона $\{\ ,\}_{TM}$, возникшими из симплектической структуры на TM. Следующая лемма доказана в [1].

Лемма 2. *В вышеописанных условиях отображение*

$$\Phi^* : \mathscr{F}(\mathbf{g}^*) \to \mathscr{F}(TM) : f \mapsto f \circ \Phi$$

согласовано со скобками Пуассона, т. е.

$$\Phi^*(\{f, g\}) = \{\Phi^*(f), \Phi^*(g)\}_{TM}$$

для $f, g \in \mathscr{F}(\mathbf{g}^*)$.

Из определения скобок Пуассона на $\mathbf{g}^*$ немедленно вытекает, что если f — $\mathrm{Ad}(G)$-инвариантная функция из $\mathscr{F}(\mathbf{g}^*)$, то $\{f, g\} = 0$ для любой гладкой функции g. На этом обстоятельстве основывается метод Тимма [1], описываемый следующей леммой.

Лемма 3. *В вышеописанных условиях рассмотрим цепочку вложенных подгрупп* $G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$. *Пусть* $\mathrm{pr}_i : \mathbf{g}^* \to \mathbf{g}_i^*$ *— естественная проекция. Положим*

$$\mathscr{F}_i = \{p \circ \mathrm{pr}_i \mid p - \mathrm{Ad}(G_i)\text{-инвариантный полином на } \mathbf{g}_i^*\ \},\ \ \mathscr{F} = \mathscr{L}\left(\bigcup_{i=0}^{n} \mathscr{F}_i\right)$$

(*здесь через* $\mathscr{L}(\dots)$ *обозначена линейная оболочка соответствующего множества*). *Тогда любые две функции из пространства* $\mathscr{F}$, *а следовательно, и любые две функции из пространства* $\Phi^*(\mathscr{F}) \subset \mathscr{F}(TM)$ *находятся в инволюции.*

Доказательство проведем индукцией по n.

Пусть $n = 0$. Тогда $\mathscr{F} = \mathscr{F}_0$ — пространство всех $\mathrm{Ad}(G)$-инвариантных полиномов на $\mathbf{g}^*$, очевидно, находящихся попарно в инволюции.

Рассмотрим переход $n \to n + 1$. Пусть $f, g \in \mathscr{F}$. Заметим, что

$$\mathscr{F} = \mathscr{L}\left(\bigcup_{i=0}^{n} \mathscr{F}_i\right) + \mathscr{F}_{n+1}.$$

Первое пространство в этой сумме соответствует цепочке групп $G_0 \subset \dots \subset G_n$ и по предположению индукции состоит из функций, находящихся в инволюции. Значит, если $f, g \in \mathscr{L}\left(\bigcup\limits_{i=0}^{n} \mathscr{F}_i\right)$, то $\{f, g\} = 0$; если одна из функций, например f, лежит в $\mathscr{F}_{n+1}$, то $\{f, g\} = 0$ в силу $\mathrm{Ad}(G_{n+1})$-инвариантности функции f. Лемма 3 доказана.

Таким образом, основная задача, возникающая при использовании метода Тимма, — это подсчет «ранга» пространства $\mathscr{F}$, поскольку между функциями из этого пространства априори могут существовать нетривиальные зависимости.

Пусть $\mathbf{g}$ — алгебра Ли с двусторонне инвариантной метрикой $\langle\ ,\rangle$. Для алгебры Ли $\mathbf{h}$ обозначим через $Z(\mathbf{h})$ ее центр:

$$Z(\mathbf{h}) = \{X \in \mathbf{h} \mid [X, Y] = 0\ \forall Y \in \mathbf{h}\}.$$

Пусть $X \in \mathbf{g}$. Обозначим

$$N_{\mathbf{g}}(X) = Z(\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X))).$$

Лемма 4. *Пусть $\mathscr{F}$ — пространство $\mathrm{Ad}(G)$-инвариантных полиномов на $\mathbf{g}$. Тогда $N_{\mathbf{g}}(X) = \{\nabla_X(p) \mid p \in \mathscr{F}\}$.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathbf{g}$. Возьмем $\mathrm{Ad}(G)$-инвариантный полином p на $\mathbf{g}$. Обозначим ради краткости $\nabla_X(p) = \nabla$. Тогда для любого $Y \in \mathbf{g}$ имеем

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} p(X)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} p(\mathrm{Ad}(\exp(tY))X)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} p(X + t[Y, X])\Big|_{t=0} = \langle \nabla, [Y, X]\rangle = \langle [X, \nabla], Y\rangle. \end{aligned}$$

В силу произвольности $Y \in \mathbf{g}$ заключаем, что $[\nabla, X] = 0$. Рассмотрим произвольную картановскую подалгебру $\mathbf{t}$, содержащую элемент X и элемент ∇. Пусть W — группа Вейля группы Ли G. Для любого $w \in W$, который оставляет неподвижным X, и любого $Y \in \mathbf{t}$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \nabla, Y\rangle = \frac{d}{dt} p(X + tY)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} p(X + t\,\mathrm{Ad}(w)Y)\Big|_{t=0} \\ &= \langle \nabla, \mathrm{Ad}(w)Y\rangle = \langle \mathrm{Ad}(w^{-1})\nabla, Y\rangle. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности Y заключаем, что $\mathrm{Ad}(w)\nabla = \nabla$. Итак, те элементы из группы Вейля, которые стабилизируют X, будут стабилизировать и ∇. Рассмотрим систему корней на $\mathbf{t}$. Корни, обращающиеся в нуль на X, будут обращаться в нуль и на ∇. Тогда если $Y \in \mathbf{g}$ коммутирует с X, то при разложении элемента Y по корневым подпространствам могут получиться ненулевые координаты в точности в тех корневых подпространствах, которые соответствуют корням, обращающимся в нуль на элементе X. Но эти же корни будут обращаться в нуль и на элементе ∇, т. е. $[\nabla, Y] = 0$. Значит, $\nabla \in Z(\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X))) = N_{\mathbf{g}}(X)$.

Обратно, пусть $\nabla \in N_{\mathbf{g}}(X) = \mathbf{v}$. Рассмотрим картановскую подалгебру $\mathbf{t}$, содержащую $\mathbf{v}$ и, как и выше, группу Вейля W. Пусть $W_1 \subset W$ — подгруппа, оставляющая $\mathbf{v}$ инвариантным и $W_0 \subset W_1$ — нормальная подгруппа, оставляющая элементы из $\mathbf{v}$ неподвижными. Тогда фактор-группа $W' = W_1/W_0$ действует на $\mathbf{v}$ и порождается отражениями (относительно гиперплоскостей, заданных корнями, нетривиальными на $\mathbf{v}$). Заметим, что X — регулярный элемент $\mathbf{v}$, так как ни один нетривиальный на $\mathbf{v}$ корень уже не обращается на X в нуль.

По теореме Шевалле [7] существуют инвариантные относительно W' и независимые полиномы $p_1, p_2, \dots, p_k$, где $k = \dim \mathbf{v}$. Так как X регулярен, можно показать, что градиенты этих полиномов в точке X образуют базис $\mathbf{v}$ (этот факт доказан в приложении, § 6). Следовательно, их подходящая линейная комбинация p будет иметь градиент, равный ∇. Итак, p инвариантен относительно W' и $\nabla_X(p) = \nabla$. Продолжим p на все $\mathbf{t}$ инвариантным по W образом (при этом градиент в точках $\mathbf{v}$ останется прежним). Далее, продолжаем p с картановской подалгебры на всю $\mathbf{g}$, получая $\mathrm{Ad}(G)$-инвариантный полином с искомым градиентом в точке X. Лемма 4 доказана.

§ 3. Определение и свойства ранга цепочки вложенных подалгебр Ли

Пусть имеется пара алгебр Ли $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$, $\mathbf{h} \subset \mathbf{g}$. Пусть $\mathbf{g} = \mathbf{h} \oplus \mathbf{p}$ — ортогональное разложение относительно $\mathrm{Ad}(G)$-инвариантной метрики на $\mathbf{g}$. Предположим, что имеется векторное подпространство $\mathbf{v} \subset \mathbf{g}$. Положим

$$\mathrm{rank}((\mathbf{g}, \mathbf{h}), \mathbf{v}) = \max_{X \in \mathbf{v}} \dim(\mathrm{pr}_{\mathbf{p}}(N_{\mathbf{g}}(X))),$$

где $\mathrm{pr}_{\mathbf{p}} : \mathbf{g} \to \mathbf{p}$ — ортогональная проекция. Число $\mathrm{rank}((\mathbf{g}, \mathbf{h}), \mathbf{v})$ назовем *рангом пары* $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ *относительно пространства* $\mathbf{v}$.

Пусть даны цепочка вложенных подалгебр Ли

$$\mathbf{g}_0 \subset \mathbf{g}_1 \subset \dots \subset \mathbf{g}_n$$

и подпространство $\mathbf{v} \subset \mathbf{g}_n$. Обозначим через $\mathrm{pr}_i : \mathbf{g}_n \to \mathbf{g}_i$ ортогональную проекцию.

Число

$$\mathrm{rank}(\{\mathbf{g}_i\}_{i=0}^n, \mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{rank}((\mathbf{g}_{i+1}, \mathbf{g}_i), \mathrm{pr}_{i+1}(\mathbf{v}))$$

будем называть *рангом цепочки* $\{\mathbf{g}_i\}_i$ вложенных подалгебр.

Понятие ранга цепочки играет важную роль при определении числа независимых интегралов (теорема 1), и его нужно уметь эффективно вычислять. Оставшаяся часть параграфа посвящена получению некоторых оценок снизу на ранг, позволяющих во многих приложениях доказывать полную интегрируемость.

Итак, пусть даны цепочка подалгебр $\{\mathbf{g}_i\}_{i=0}^n$ и подпространство $\mathbf{v} \subset \mathbf{g}_n$, как описано выше. Пусть $\mathbf{g}_{i+1} = \mathbf{g}_i \oplus \mathbf{p}_i$ — ортогональное разложение. Для каждого $i = 0, \dots, n$ рассмотрим максимальный тор T_i в G_i и картановскую подалгебру $\mathbf{t}_i$, касательную к T_i. Тогда T_i действует на $\mathbf{p}_i$ присоединенным образом:

$$\mathrm{Ad}(t) : \mathbf{p}_i \to \mathbf{p}_i$$

для $t \in T_i$. Следовательно (см. например, [8]), пространство $\mathbf{p}_i$ раскладывается на сумму инвариантных подпространств:

$$\mathbf{p}_i = \sum_{j=0}^{m_i} \mathbf{p}_i^j.$$

Здесь $\mathbf{p}_i^0$ — слагаемое, на котором действие тривиально, а $\mathbf{p}_i^j$ при $j \neq 0$ — неприводимые слагаемые, каждое из которых размерности 2. В каждом слагаемом $\mathbf{p}_i^j$, $j \neq 0$ можно выбрать два ортонормированных вектора $\{1, i\}$ (вещественную и мнимую единицы), так что каждое нетривиальное слагаемое будем считать одномерным комплексным подпространством. При этом действие тора будет задаваться следующим образом:

$$\mathrm{Ad}(\exp(Y))V = e^{i\alpha_i^j(Y)}V,$$

где $V \in \mathbf{p}_i^j$, $j \neq 0$, и α_i^j — нетривиальные линейные функции на $\mathbf{t}$, являющиеся корнями действия T_i на $\mathbf{p}_i$. Кроме того, положив $\alpha_i^0 = 0$, можно придать смысл последней формуле и при $V \in \mathbf{p}_i^0$.

В дальнейшем потребуем, чтобы множество корней $\{\alpha_i^j\}_{j=0}^{m_i}$ было независимым (в частности, это подразумевает, что $\mathbf{p}_i^0 = 0$). Легко видеть, что подобное условие не зависит от выбора максимального тора T_i.

Определим наборы чисел $\{a_i\}_{i=0}^{n-1}$, $\{b_i\}_{i=0}^{n-1}$ и $\{h_i\}_{i=0}^{n-1}$ следующим образом. Положим

$$h_i = \mathrm{rank}(\mathbf{g}_i), \quad a_i = \max_{X \in \mathbf{v}} \dim(N_{\mathbf{g}_{i+1}}(\mathrm{pr}_{i+1}(X))),$$

$$\begin{aligned} b_i = \max_{X \in \mathbf{v}} \mathrm{rank}\{&\mathrm{pr}_{\mathbf{p}_i}(X), -i[\mathrm{pr}_i(X), \mathrm{pr}_{\mathbf{p}_i}(X)], \\ &- [\mathrm{pr}_i(X), [\mathrm{pr}_i(X), \mathrm{pr}_{\mathbf{p}_i}(X)]], \ldots\ldots, (-i)^k(\mathrm{ad}(\mathrm{pr}_i(X)))^k(\mathrm{pr}_{\mathbf{p}_i}(X)), \ldots\}. \end{aligned}$$

Отметим, что величины h_i, a_i, b_i элементарно вычисляются в каждой конкретной ситуации, несмотря на кажущуюся громоздкость определения (это будет продемонстрировано в конце статьи).

Лемма 5. *В вышеописанных условиях пусть действие некоторого максимального тора в G_i на $\mathbf{p}_i$ имеет независимые нетривиальные корни. Тогда верна следующая оценка:*

$$\mathrm{rank}((\mathbf{g}_{i+1}, \mathbf{g}_i), \mathrm{pr}_{i+1}(\mathbf{v})) \geq a_i - h_i + b_i.$$

Доказательство. Пусть U — открытое всюду плотное множество в $\mathbf{v}$, на котором достигаются максимумы в определении чисел a_i и b_i. Обозначим оцениваемый ранг через r. По определению

$$r = \max_{X \in \mathbf{v}} \dim(\mathrm{pr}_{\mathbf{p}_i}(N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X))).$$

Пусть $X \in U$, $X = X_1 + X_2$, где $X_1 \in \mathbf{g}_i$, $X_2 \in \mathbf{p}_i$. Тогда

$$\begin{aligned} r \geq \dim(\mathrm{pr}_{\mathbf{p}_i}(N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X))) &= \dim(N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X)) - \dim(N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X) \cap \mathbf{g}_i) \\ &= a_i - \mathrm{rank}(N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X) \cap \mathbf{g}_i). \end{aligned}$$

Пусть $Y \in N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X) \cap \mathbf{g}_i = Z(\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X))) \cap \mathbf{g}_i$. Так как $X \in \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X))$, то $[Y, X] = 0$, т. е. $[Y, X_1] = [Y, X_2] = 0$. Таким образом, подалгебра $N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X) \cap \mathbf{g}_i$ коммутирует с $X_1 \in \mathbf{g}_i$ и с $X_2 \in \mathbf{p}_i$. Следовательно, можно найти максимальный тор T в G_i, касательная алгебра $\mathbf{t}$ которого будет являться картановской подалгеброй в $\mathbf{g}_i$ и будет содержать подалгебру $N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X) \cap \mathbf{g}_i$ и элемент X_1. Рассмотрим следующую подалгебру в $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{h} = \{Y \in \mathbf{t} \mid [Y, X_2] = 0\}.$$

По вышеизложенному $N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X) \cap \mathbf{g}_i \subset \mathbf{h}$. Значит, $r \geq a_i - \operatorname{rank}(\mathbf{h})$.

Тор T действует на $\mathbf{p}_i$ присоединенным образом, и для него можно найти разложение

$$\mathbf{p}_i = \sum_{j=1}^{m_i} \mathbf{p}^j,$$

аналогичное тому, которое отмечалось перед формулировкой леммы (напомним, что из условия следует, что нет тривиального слагаемого), т. е.

$$\operatorname{Ad}(\exp(Y))V = e^{i\alpha^j(Y)}V,$$

где $V \in \mathbf{p}^j$ и α^j — корни на $\mathbf{t}$, которые по условию независимы. Следовательно,

$$[Y, V] = i\alpha^j(Y)V,$$

для $V \in \mathbf{p}^j$.

Пусть $X_2 = \sum\limits_{j=0}^{m_i} V_j$. Тогда $(-i)^k(\operatorname{ad}(X_1))^k V_j = (\alpha^j(X_1))^k V_j$. По условию известно, что $\operatorname{rank}\{X_2, -i[X_1, X_2], \dots, (-i)^k(\operatorname{ad}(X_1))^k X_2, \dots\} = b_i$. Значит, среди векторов $\{V_j\}_{j=1}^{m_i}$ найдется b_i ненулевых. Пусть для определенности это векторы $V_1, V_2, \dots, V_{b_i}$. Тогда подалгебра $\mathbf{h}$ выделяется из $\mathbf{t}$ условием $\alpha^1 = \alpha^2 = \dots = \alpha^{b_i} = 0$. Учитывая линейную независимость корней α^j, $j \neq 0$, заключаем, что $\operatorname{rank}(\mathbf{h}) \leq \operatorname{rank}(\mathbf{t}) - b_i = h_i - b_i$. Значит, $r \geq a_i - h_i + b_i$. Лемма 5 доказана.

§ 4. Основная теорема о числе независимых интегралов

Пусть G — компактная группа Ли, как и ранее, снабженная двусторонне инвариантной метрикой $\langle\ ,\rangle$. Определим изометрическое действие группы $G \times G$ на G следующим образом:

$$(g_1, g_2) \cdot g = g_1 g g_2^{-1}$$

для g_1, g_2 и $g \in G$. Пусть H и K — подгруппы Ли в G. Тогда $H \times K$ как подгруппа в $G \times G$ действует на G. Предположим, что рассмотренное действие группы $H \times K$ свободно. Тогда фактор-пространство $M = H \backslash G / K$ каноническим образом наделяется структурой риманова многообразия и называется *двойным частным* группы Ли G.

Основной целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Рассмотрим $M = H \backslash G / K$ — двойное частное группы G. Положим*

$$\mathbf{v} = (\mathbf{h} + \mathbf{k})^{\perp} \subset \mathbf{g}.$$

Пусть существуют цепочки вложенных алгебр Ли:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 \subset \dots \subset \mathbf{h}_l = \mathbf{g}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_0 \subset \dots \subset \mathbf{k}_m = \mathbf{g},$$

и $r_1 = \operatorname{rank}(\{\mathbf{h}_i\}_i, \mathbf{v})$, $r_2 = \operatorname{rank}(\{\mathbf{k}_i\}_i, \mathbf{v})$, $r_3 = \operatorname{rank}(G)$. Тогда для геодезического потока на M существует по крайней мере $r_1 + r_2 - r_3$ функционально независимых первых интегралов, находящихся в инволюции.

Доказательство. Поскольку $G \times G$ действует на G, определено отображение момента

$$\Phi' : TG \to \mathbf{g} \oplus \mathbf{g}.$$

Воспользуемся методом Тимма по отношению к цепочкам $\{H_i\}_i$ и $\{K_j\}_j$, т. е. для каждого $i = 1, \dots, l$ и $j = 1, \dots, m$ определим семейства полиномов $\mathscr{F}_{1i}$ и $\mathscr{F}_{2j}$ на $\mathbf{g}$ следующим образом:

$$\mathscr{F}_{1i} = \{p \circ \mathrm{pr}_{\mathbf{h}_i} \mid p \text{ — } \mathrm{Ad}(H_i)\text{-инвариантный полином на } \mathbf{h}_i\},$$

$$\mathscr{F}_{2j} = \{p \circ \mathrm{pr}_{\mathbf{k}_j} \mid p \text{ — } \mathrm{Ad}(K_j)\text{-инвариантный полином на } \mathbf{k}_j\},$$

и положим

$$\mathscr{F}_1 = \mathscr{L}\left(\bigcup_{i=1}^{l} \mathscr{F}_{1i}\right), \quad \mathscr{F}_2 = \mathscr{L}\left(\bigcup_{j=1}^{m} \mathscr{F}_{2j}\right).$$

Лемма 3 утверждает, что пространства $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ образованы полиномами на $\mathbf{g}$, находящимися попарно в инволюции.

Положим

$$\mathscr{F} = \{p \circ \mathrm{pr}_1 \mid p \in \mathscr{F}_1\} + \{p \circ \mathrm{pr}_2 \mid p \in \mathscr{F}_2\} \subset \mathscr{F}(\mathbf{g} \oplus \mathbf{g}),$$

где pr_1 и pr_2 — проекции соответственно на первое и второе слагаемые в $\mathbf{g} \oplus \mathbf{g}$. Поскольку элементы из $\mathbf{g} \oplus 0$ коммутируют с элементами из $0 \oplus \mathbf{g}$, то $\mathscr{F}$ состоит из полиномов на $\mathbf{g} \oplus \mathbf{g}$, находящихся попарно в инволюции. Следовательно, пространство $\Phi'^*(\mathscr{F})$ состоит из функций на TG, находящихся в инволюции.

Лемма 6. *Для любых* $(g_1, g_2) \in G \times G$ *и* $v \in TG$

$$\Phi'((g_1, g_2) \cdot v) = \mathrm{Ad}(g_1, g_2)\Phi'(v).$$

Доказательство. Для $g \in G$ обозначим через L_g и R_g левый и правый сдвиги, т. е. $L_g(h) = gh$, $R_g(h) = hg$. Тогда любой касательный вектор к G в точке g можно записать как $v = d_1L_g(X) = dL_g(X)$, где $X \in \mathbf{g}$. Пусть $dL_g(X) \in TG$, $(Y, Z) \in \mathbf{g} \oplus \mathbf{g}$. Несложные выкладки показывают, что

$$\begin{aligned}\Phi(dL_g(X))(Y, Z) &= \langle dL_g(X), (Y, Z) \cdot g\rangle = \langle dL_g(X), dR_g(Y) - dL_g(Z)\rangle \\ &= \langle dR_{g^{-1}} \circ dL_g(X), Y\rangle + \langle -X, Z\rangle = \langle \mathrm{Ad}(g)X, Y\rangle + \langle -X, Z\rangle.\end{aligned}$$

Значит, $\Phi'(dL_g(X)) = (\mathrm{Ad}(g)X, -X)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Phi'((g_1, g_2) \cdot v) &= \Phi'(dL_{g_1} \circ dR_{g_2^{-1}} \circ dL_g(X)) \\ &= \Phi'(dL_{g_1 g g_2^{-1}}(\mathrm{Ad}(g_2)X)) = (\mathrm{Ad}(g_1 g g_2^{-1})(\mathrm{Ad}(g_2)X), -\mathrm{Ad}(g_2)X) \\ &= (\mathrm{Ad}(g_1 g)X, -\mathrm{Ad}(g_2)X) = \mathrm{Ad}(g_1, g_2)(\mathrm{Ad}(g)X, -X) = \mathrm{Ad}(g_1, g_2)\Phi'(v).\end{aligned}$$

Лемма 6 доказана.

Рассмотрим риманову субмерсию $\phi : G \to M$ (определение и свойства римановой субмерсии можно найти в [9]), канонически определяемую свободным действием $H \times K$ на G. Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{H}$ — пространства вертикальных и горизонтальных векторов этой субмерсии соответственно. Очевидно, что действие группы $H \times K$ ограничивается на $\mathscr{V}$ и $\mathscr{H}$ и что $\mathscr{H}/H \times K = TM$. Пусть $\psi = d\phi|_{\mathscr{H}} : \mathscr{H} \to TM$ — возникающая субмерсия. Очевидно, что ψ сохраняет симплектическую структуру.

Пусть p — $\mathrm{Ad}(H_i)$-инвариантный полином на $\mathbf{h}_i$. Рассмотрим функцию $f = p \circ \mathrm{pr}_{\mathbf{h}_i} \circ \mathrm{pr}_1 \circ \Phi' \in \Phi'^*(\mathscr{F})$. Лемма 6 показывает, что для $(h, k) \in H \times K$ и $v \in TG$

$$\begin{aligned}f((h, k) \cdot v) &= p \circ \mathrm{pr}_{\mathbf{h}_i} \circ \mathrm{pr}_1(\mathrm{Ad}(h, k)\Phi'(v)) \\ &= p \circ \mathrm{pr}_{\mathbf{h}_i}(\mathrm{Ad}(h)(\mathrm{pr}_1 \circ \Phi'(v))) = p(\mathrm{Ad}(h)(\mathrm{pr}_{\mathbf{h}_i} \circ \mathrm{pr}_1 \circ \Phi'(v))) = f(v)\end{aligned}$$

(здесь мы пользуемся $\mathrm{Ad}(H_i)$-инвариантностью проекции $\mathrm{pr}_{\mathbf{h}_i}$ и тем, что $h \in H \subset H_i$). То же самое остается верным, если полином p заменить $\mathrm{Ad}(K_i)$-инвариантным полиномом на $\mathbf{k}_i$. Но тогда уже для всех $f \in \Phi'^*(\mathscr{F})$ имеем $f((h,k)\cdot v) = f(v)$. Следовательно, все функции из $\Phi'^*(\mathscr{F})$ опускаются на TM.

Отметим, что субмерсия ϕ проектирует горизонтальные геодезические на G в геодезические на M (см. [9]), поэтому если отображение Φ' инвариантно относительно геодезического потока на TG, то при опускании функций из $\Phi'^*(\mathscr{F})$ на TM получим функции, постоянные на геодезическом потоке. То, что Φ' постоянно на геодезическом потоке, следует из леммы 1.

Лемма 7. *Пусть $f, g : \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ — две гладкие $H \times K$-инвариантные функции и $\tilde f, \tilde g : TM \to \mathbb{R}$ — индуцированные функции. Тогда*

$$\{f, g\}_{TG}|_{\mathscr{H}} = \{\tilde f, \tilde g\}_{TM} \circ \psi.$$

Кроме того, если дано семейство $H \times K$-инвариантных функций $f_1, \dots, f_n : \mathscr{H} \to \mathbb{R}$, независимых почти всюду в $\mathscr{H}$, то индуцированные функции $\tilde f_1, \dots, \tilde f_n : TM \to \mathbb{R}$ независимы почти всюду в TM.

Доказательство. По условию $f = \psi \circ \tilde f$ и $g = \psi \circ \tilde g$. Без труда проверяется, что $d\psi(\mathrm{sgrad}(f)) = \mathrm{sgrad}(\tilde f)$, поэтому

$$\{f, g\}_{TG}|_{\mathscr{H}} = dg(\mathrm{sgrad}(f)) = d\tilde g(d\psi(\mathrm{sgrad}(f))) = d\tilde g(\mathrm{sgrad}(\tilde f)) = \{\tilde f, \tilde g\}_{TM}.$$

Второе утверждение леммы совершенно очевидно. Лемма 7 доказана.

Таким образом, чтобы доказать теорему, надо найти $r = r_1 + r_2 - r_3$ функций из $\Phi'^*(\mathscr{F})$, независимых почти всюду в $\mathscr{H}$. В силу аналитичности достаточно установить независимость в одной точке.

Пусть $\mathbf{w} = (\mathbf{h} \oplus \mathbf{k})^\perp$ — векторное подпространство в $\mathbf{g} \oplus \mathbf{g}$. Положим $\mathscr{R} = \{(X, -Y) \mid \exists g \in \mathbf{g}, \mathrm{Ad}(g)X = Y\} \subset \mathbf{g} \oplus \mathbf{g}$.

Лемма 8. *Во введенных выше обозначениях*

$$\Phi'(\mathscr{H}) = \mathscr{R} \cap \mathbf{w}.$$

Далее, пусть $v = X \in \mathbf{g}$ — горизонтальный касательный вектор в единице группы G. Тогда $d\Phi'(T_v\mathscr{H})$ является векторным подпространством в $\mathbf{g} \oplus \mathbf{g}$ и равно $(\Delta\,\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X)))^\perp \cap \mathbf{w}$, где $\Delta\,\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(X)) = \{(Y, Y) \mid [Y, X] = 0\}$.

Доказательство. Пусть $v = dL_g(X) \in \mathscr{H}$, где $g \in G$, $X \in \mathbf{g}$. Как показано при доказательстве леммы 6,

$$\Phi'(v) = \Phi'(dL_g(X)) = (\mathrm{Ad}(g)X, -X) \in \mathscr{R}.$$

Далее, вертикальное пространство субмерсии ϕ в точке g равно

$$V_g = \{dR_g(Y) - dL_g(Z) \mid (Y, Z) \in \mathbf{h} \oplus \mathbf{k}\}.$$

Следовательно, горизонтальность вектора v означает, что для любых $Y \in \mathbf{h}$, $Z \in \mathbf{k}$

$$0 = \langle dL_g(X), dR_g(Y) - dL_g(Z)\rangle = \langle \mathrm{Ad}(g)X, Y\rangle - \langle X, Z\rangle.$$

Таким образом, $\mathrm{Ad}(g)X \in \mathbf{h}^\perp$ и $X \in \mathbf{k}^\perp$. Это и значит, что $\Phi'(v) \in \mathbf{w}$.

Обратно, если $(X, Y) \in \mathscr{R} \cap \mathbf{w}$, то $X = -\mathrm{Ad}(g)Y$ для некоторого $g \in G$, и аналогичными выкладками проверяется, что $dL_g(Y)$ горизонтален, т. е. лежит в $\mathscr{H}$.

Далее, пусть $v = X \in \mathbf{g}$ — горизонтальный касательный вектор в единице группы G. Искомое подпространство $d\Phi'(T_v\mathscr{H})$ вложено в подпространство $d\Phi'(T_vTG)$. Используя непосредственное выражение для Φ', находим

$$d\Phi'(T_vTG) = \{([Y,X] + Z, -Z) \mid Y, Z \in \mathbf{g}\}.$$

Тогда вектор (V,W) принадлежит $(d\Phi'(T_vTG))^\perp$ в том и только в том случае, когда для любых $Y, Z \in \mathbf{g}$

$$\begin{aligned} 0 = \langle([Y,X] + Z, -Z), (V,W)\rangle &= \langle[Y,X],V\rangle + \langle Z,V\rangle - \langle Z,W\rangle \\ &= \langle Y,[X,V]\rangle + \langle Z, V-W\rangle. \end{aligned}$$

Значит, $V - W = [X,V] = 0$. Таким образом, $(d\Phi'(T_vTG))^\perp = \Delta\operatorname{Ker}(\operatorname{ad}(X))$. Учитывая, что $d\Phi'(T_v\mathscr{H}) = d\Phi'(T_vTG) \cap \mathbf{w}$, получаем, что

$$d\Phi'(T_v\mathscr{H}) = (\Delta\operatorname{Ker}(\operatorname{ad}(X)))^\perp \cap \mathbf{w}.$$

Лемма 8 доказана.

Положим $\mathbf{h}_{i+1} = \mathbf{h}_i \oplus \mathbf{p}_i$ и $\mathbf{k}_{i+1} = \mathbf{k}_i \oplus \mathbf{q}_i$. Пусть U — открытое всюду плотное множество в $\mathbf{v}$, состоящее из тех $X \in \mathbf{v}$, для которых

$$c_{i+1} = \operatorname{rank}((\mathbf{h}_{i+1}, \mathbf{h}_i), \operatorname{pr}_{i+1}(\mathbf{v})) = \dim(\operatorname{pr}_{\mathbf{p}_i}(N_{\mathbf{h}_{i+1}}(X))),$$

$$d_{j+1} = \operatorname{rank}((\mathbf{k}_{j+1}, \mathbf{k}_j), \operatorname{pr}_{j+1}(\mathbf{v})) = \dim(\operatorname{pr}_{\mathbf{q}_j}(N_{\mathbf{k}_{j+1}}(X))$$

для $i = 0, \ldots, l-1$ и $j = 0, \ldots, m-1$.

Рассмотрим множество $\mathscr{F}_1 = \mathscr{L}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{l-1} \mathscr{F}_{1i}\right) + \mathscr{F}_{1l}$. По лемме 4 градиенты функций из $\mathscr{L}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{l-1} \mathscr{F}_{1i}\right)$ в точке $X \in U$ образуют векторное подпространство $N_{\mathbf{h}_1}(\operatorname{pr}_1(X)) + N_{\mathbf{h}_2}(\operatorname{pr}_2(X)) + \cdots + N_{\mathbf{h}_{l-1}}(\operatorname{pr}_{l-1}(X))$ в $\mathbf{h}_{l-1}$. Следовательно, при проектировании в $\mathbf{p}_{l-1}$ все эти градиенты дадут нуль. С другой стороны, при проектировании в $\mathbf{p}_{l-1}$ градиенты функций из $\mathscr{F}_{1l}$ дадут подпространство $\operatorname{pr}_{\mathbf{p}_{l-1}}(N_{\mathbf{h}_l}(X))$ размерности c_l. Значит, можно выбрать c_l функций из $\mathscr{F}_{1l}$ таких, что проекции их градиентов в точке $X \in U$ в подпространство $\mathbf{p}_{l-1}$ независимы.

Применяя те же рассуждения к разложению $\mathscr{L}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{l-1} \mathscr{F}_{1i}\right) = \mathscr{L}(\bigcup\limits_{i=1}^{l-2} \mathscr{F}_{1i}) + \mathscr{F}_{1l-1}$ и так далее вплоть до $l = 1$, построим $c_1 + c_2 + \cdots + c_l = r_1$ функций $f_1, f_2, \ldots, f_{r_1}$ из $\mathscr{F}_1$, проекции градиентов которых в точках $X \in U$ в подпространство $\mathbf{p}_0 \oplus \mathbf{p}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{p}_{l-1} = (\mathbf{h})^\perp$ независимы.

Те же рассуждения позволяют найти $d_1 + \cdots + d_m = r_2$ функций $f_{r_1+1}, f_{r_1+2}, \ldots, f_{r_1+r_2}$ из $\mathscr{F}_2$ с независимыми при проектировании в $(\mathbf{k})^\perp$ градиентами в точках $X \in U$. Взяв композиции первых r_1 функций с проекцией pr_1 и композиции последних r_2 функций с pr_2, получим ровно $r_1 + r_2$ функций из $\mathscr{F}$, проекции градиентов которых в точках $(X, -X)$, $X \in U$ в подпространство $\mathbf{w} = (\mathbf{h} \oplus \mathbf{k})^\perp$ независимы. Снова обозначим найденные функции через $f_1, \ldots, f_{r_1+r_2}$.

Фиксируем $X \in U$. Пусть $\mathbf{u} = \operatorname{Ker}(\operatorname{ad}(X))$ — подалгебра, содержащая X. Рассмотрим подпространство $\Delta\mathbf{u}$ в $\mathbf{g} \oplus \mathbf{g}$.

Лемма 9. *Во введенных обозначениях пространство*

$$\operatorname{pr}_{\mathbf{w}}(\{\nabla_X(f) \mid f \in \mathscr{F}\}) \cap \Delta\mathbf{u}$$

является коммутативной подалгеброй в $\Delta\mathbf{u}$.

Доказательство. Докажем сначала, что пространство $\mathrm{pr}_{\mathbf{h}^\perp}(\{\nabla_X(f) \mid f \in \mathscr{F}_1\}) \cap \mathbf{u}$ представляет собой коммутативную подалгебру в $\mathbf{u}$. Поскольку

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{h}^\perp}(\{\nabla_X(f)|f \in \mathscr{F}_1\}) \cap \mathbf{u} = \mathrm{pr}_{\mathbf{h}^\perp}(N_{\mathbf{h}_1}(\mathrm{pr}_1(X))) \cap \mathbf{u} \\ + \mathrm{pr}_{\mathbf{h}^\perp}(N_{\mathbf{h}_2}(\mathrm{pr}_2(X))) \cap \mathbf{u} + \dots + \mathrm{pr}_{\mathbf{h}^\perp}(N_{\mathbf{h}_l}(\mathrm{pr}_l(X))) \cap \mathbf{u},$$

для этого нам надо показать, что коммутируют между собой элементы из $\mathrm{pr}_{\mathbf{h}^\perp}(N_{\mathbf{h}_k}(\mathrm{pr}_k(X))) \cap \mathbf{u}$ и из $\mathrm{pr}_{\mathbf{h}^\perp}(N_{\mathbf{h}_{k+i}}(\mathrm{pr}_{k+i}(X))) \cap \mathbf{u}$, $i \geq 0$.

Итак, пусть $Y_1 + Y_2 \in N_{\mathbf{h}_k}(\mathrm{pr}_k(X)))$, $Y_1 \in \mathbf{h}$, $Y_2 \in \mathbf{h}^\perp$, $Y_2 \in \mathbf{u}$ и $Z_1 + Z_2 \in N_{\mathbf{h}_{k+i}}(\mathrm{pr}_{k+i}(X)))$, $Z_1 \in \mathbf{h}$, $Z_2 \in \mathbf{h}^\perp$, $Z_2 \in \mathbf{u}$. Наша задача — показать, что $[Y_2, Z_2] = 0$. Так как $Z_2 \in \mathbf{u}$, то $[Z_2, X] = 0$. Но $Z_2 \in \mathbf{h}_{k+i}$, поэтому $[Z_2, \mathrm{pr}_{k+i}(X)] = 0$. Далее, $Z_1 + Z_2 \in Z(\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(\mathrm{pr}_{k+i}(X))))$, следовательно, $[Z_1 + Z_2, \mathrm{pr}_{k+i}(X)] = 0$. Значит, $[Z_1, \mathrm{pr}_{k+i}(X)] = 0$. Поскольку $Z_1 \in \mathbf{h} \subset \mathbf{h}_k$, заключаем, что $[Z_1, \mathrm{pr}_k(X)] = 0$, т. е. $Z_1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(\mathrm{pr}_k(X)))$. У нас $Y_1 + Y_2 \in Z(\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(\mathrm{pr}_k(X))))$, следовательно, $[Y_1 + Y_2, Z_1] = 0$. Из соображений размерности $[Y_1, Z_1] = [Y_2, Z_1] = 0$.

Далее, $Y_2 \in \mathbf{u}$, значит, $[Y_2, X] = 0$, откуда $[Y_2, \mathrm{pr}_{k+i}(X)] = 0$. Но $Z_1 + Z_2 \in Z(\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(\mathrm{pr}_{k+i}(X))))$, поэтому $[Z_1 + Z_2, Y_2] = 0$. Выше мы уже доказали, что $[Y_2, Z_1] = 0$, значит, $[Y_2, Z_2] = 0$.

Итак, показана коммутативность подалгебры $\mathrm{pr}_{\mathbf{h}^\perp}(\{\nabla_X(f) \mid f \in \mathscr{F}_1\}) \cap \mathbf{u}$. Точно так же доказывается коммутативность подалгебры $\mathrm{pr}_{\mathbf{k}^\perp}(\{\nabla_X(f) \mid f \in \mathscr{F}_2\}) \cap \mathbf{u}$. Это влечет коммутативность подалгебры $\mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\{\nabla_X(f) \mid f \in \mathscr{F}\}) \cap \Delta\mathbf{u}$ в $\Delta\mathbf{u}$. Лемма 9 доказана.

Рассмотрим теперь найденные функции $f_1, \dots, f_{r_1+r_2}$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{pr}_{(\Delta\mathbf{u})^\perp \cap \mathbf{w}} \mathscr{L}\{\nabla_X(f_1), \dots, \nabla_X(f_{r_1+r_2})\} \\ &= \dim \mathrm{pr}_{\mathbf{w}} \mathscr{L}\{\nabla_X(f_1), \dots, \nabla_X(f_{r_1+r_2})\} \\ &\quad - \dim((\mathrm{pr}_{\mathbf{w}} \mathscr{L}\{\nabla_X(f_1), \dots, \nabla_X(f_{r_1+r_2})\}) \cap \Delta\mathbf{u}) \\ &= r_1 + r_2 - \dim((\mathrm{pr}_{\mathbf{w}} \mathscr{L}\{\nabla_X(f_1), \dots, \nabla_X(f_{r_1+r_2})\}) \cap \Delta\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Из леммы 9 следует, что пространство $(\mathrm{pr}_{\mathbf{w}} \mathscr{L}\{\nabla_X(f_1), \dots, \nabla_X(f_{r_1+r_2})\}) \cap \Delta\mathbf{u}$ содержится в коммутативной подалгебре алгебры $\Delta\mathbf{u}$, т. е. его размерность не превышает ранга $\Delta\mathbf{u}$, который, в свою очередь, равен рангу $\mathbf{g}$, т. е. r_3.

Итак, можно найти $r = r_1 + r_2 - r_3$ функций, скажем, $f_1, \dots, f_r \in \mathscr{F}$, таких, что проекции их градиентов в точке $(X, -X)$ на подпространство $(\Delta\mathbf{u})^\perp \cap \mathbf{w}$ независимы. В соответствии с леммой 8 $(\Delta\mathbf{u})^\perp \cap \mathbf{w} = d\Phi(T_X\mathscr{H})$, следовательно, функции $\Phi'^*(f_1), \dots, \Phi'^*(f_r)$ будут независимы в точке $X \in \mathscr{H}$. По аналитичности заключаем независимость $\Phi'^*(f_1), \Phi'^*(f_2), \dots, \Phi'^*(f_r) \in \Phi'^*(\mathscr{F})$ почти всюду в $\mathscr{H}$, что завершает доказательство теоремы 1.

§ 5. Некоторые приложения

Пример 1. Рассмотрим в качестве группы G группу $U(3) \times U(2) \times U(1)$, где $U(3)$ снабжена стандартной двусторонне инвариантной метрикой и $U(2) \times U(1)$ вложена в $U(3)$ в качестве блочных матриц с двумя блоками размера 2×2 и 1×1, т. е.

$$G = \left\{ \left(X, \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) \mid X \in U(3),\ Y \in U(2),\ z \in U(1) \right\}.$$

Определим подгруппы $H, K \subset G$ следующим образом:

$$H = \{(X, X) \mid X \in U(2) \times U(1) \subset U(3)\},$$
$$K = \left\{ \left(\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w^p & 0 & 0 \\ 0 & w^q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \mid z, w \in U(1) \right\},$$

где p и q взаимно простые и положительные.

Без труда проверяется, что группа $H \times K$ действует на G свободно, т. е. возникает двойное частное $M_{p,q} = H \backslash G / K$ размерности 7.

На самом деле легко увидеть, что определенные нами $M_{p,q}$ изометричны двойному частному группы $U(3)$ по подгруппе $K \subset U(3) \times U(3)$ относительно однородной метрики на $U(3)$, «масштабированной» вдоль векторов, касательных к подгруппе $U(2) \times U(1)$ (такая метрика на $U(3)$ уже не будет двусторонне инвариантной). Пространства $M_{p,q}$ найдены Эшенбургом, который показал в [6], что их секционная кривизна строго положительна.

Зададим цепочки подгрупп

$$H_0 = H, \quad K_0 = K, \quad H_1 = \{(X, Y) \mid X, Y \in U(2) \times U(1) \subset U(3)\}, \quad H_2 = G,$$
$$K_1 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{pmatrix} \right) \mid z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \in U(1) \right\},$$
$$K_2 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \right) \mid X \in U(2), z_1, z_2, z_3, w \in U(1) \right\},$$
$$K_3 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \right) \mid X, Y \in U(2), z, w \in U(1) \right\}, \quad K_4 = G.$$

Тогда $\mathbf{v} = (\mathbf{h} + \mathbf{k})^{\perp}$, где $(\mathbf{h} + \mathbf{k})^{\perp}$ состоит из всех пар

$$\left(\begin{pmatrix} iqt & \alpha & \beta \\ -\bar{\alpha} & -ipt & \gamma \\ -\bar{\beta} & -\bar{\gamma} & i(q-p)t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -iqt & -\alpha & 0 \\ \bar{\alpha} & ipt & 0 \\ 0 & 0 & -i(q-p)t \end{pmatrix} \right)$$

таких, что $t \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Указанным подгруппам соответствуют цепочки подалгебр. Посчитаем числа r_1, r_2 и r_3 из теоремы 1.

Рассмотрим элемент $X_1 = (\mathrm{diag}(iq, -ip, i(q-p)), \mathrm{diag}(-iq, ip, i(p-q))) \in \mathbf{v}$. Очевидно, что X_1 регулярен в $\mathbf{g}$. Поэтому $N_{\mathbf{g}}(X_1)$ совпадает с $\mathbf{k}_1$ (картановская подалгебра в $\mathbf{g}$), т. е. состоит из элементов вида

$$(\mathrm{diag}(ia_1, ia_2, ia_3), \mathrm{diag}(ib_1, ib_2, ib_3)), \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}.$$

При проектировании ортогонально подалгебре $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$ получим пространство элементов вида

$$(\mathrm{diag}(i(a_1 - b_1), i(a_2 - b_2), i(a_3 - b_3)), \mathrm{diag}(i(b_1 - a_1), i(b_2 - a_2), i(b_3 - a_3))).$$

Таким образом, $\mathrm{rank}((\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_0), \mathbf{v}) = 3$. Положим

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы собираемся посчитать числа a_i, b_i, h_i из леммы 5. Имеем $X_1 + (X_2, 0) \in \mathbf{v}$, $X_1 \in \mathbf{h}_1$ и $(X_2, 0) \in (\mathbf{h}_1)^\perp$. Непосредственно проверяется, что векторы $(X_2, 0)$ и $(-i) \cdot [X_1, (X_2, 0)]$ линейно независимы, т. е. $b_1 = 2$ (здесь умножение на $-i$ следует понимать, конечно, в смысле комплексной структуры на корневых подпространствах). Далее, $h_1 = a_1 = 6$. Учитывая, что корни действия K_1 (это максимальный тор в G) на $(\mathbf{h}_1)^\perp$ независимы, применяем лемму 5 и получаем, что $\operatorname{rank}((\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1), \mathbf{v}) \geq a_1 + b_1 - h_1 = 2$. Суммируя, находим $r_1 = \operatorname{rank}((\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1), \mathbf{v}) + \operatorname{rank}((\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_0), \mathbf{v}) \geq 5$.

Посчитаем r_2. Заметим, что элемент $X_1 \in \mathbf{k}_1$ является регулярным элементом в $\mathbf{k}_1$, поэтому $N_{\mathbf{k}_1}(X_1) = \mathbf{k}_1$. Значит, $\operatorname{rank}((\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0), \mathbf{v}) = \dim \operatorname{pr}_{(\mathbf{k}_0)^\perp}(\mathbf{k}_1) = 6 - 2 = 4$. Далее собираемся применять лемму 5, поэтому сразу заметим, что K_1 действует на всех ортогональных дополнениях $(\mathbf{k}_i)^\perp$ в $\mathbf{k}_{i+1}$, $i = 1, 2, 3$, с линейно независимыми корнями. Очевидно, что $h_1 = h_2 = h_3 = 6$ и $a_1 = a_2 = a_3 = 6$ (надо опять вспомнить про регулярный элемент X_1). Посчитаем b_i, $i = 1, 2, 3$. Положим

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X_1 + (X_3, -X_3) \in \mathbf{v}$, $\operatorname{pr}_{\mathbf{k}_2}(X_1 + (X_3, -X_3)) = X_1 + (0, -X_3)$, причем $(0, -X_3) \in (\mathbf{k}_1)^\perp$. Значит, $b_1 = 1$. Аналогично $X_1 + (X_3, -X_3) \in \mathbf{k}_3$, $(X_3, 0) \in (\mathbf{k}_2)^\perp$, откуда $b_2 = 1$. Далее, $X_1 + (X_2, 0) \in \mathbf{v}$, $X_1 + (X_2, 0) \in \mathbf{k}_4$, причем $(X_2, 0) \in (\mathbf{k}_3)^\perp$. Так как $(X_2, 0)$ и $(-i) \cdot [X_1, (X_2, 0)]$ линейно независимы, находим $b_2 = 2$. Применяя лемму 5, получаем $r_2 \geq 4 + (6 - 6 + 1) + (6 - 6 + 1) + (6 - 6 + 2) = 8$.

Далее, очевидно, что $r_3 = \operatorname{rank}(G) = 6$, поэтому теорема 1 гарантирует существование $5 + 8 - 6 = 7$ независимых интегралов. Тем самым доказано

Предложение 1. *Геодезический поток метрики положительной секционной кривизны на $M_{p,q}$ вполне интегрируем.*

Пример 2. Пусть $G = U(1) \times U(4) \times U(5)$, где на $U(5)$ задана стандартная двусторонне инвариантная метрика и $U(1) \times U(4)$ вложена в $U(5)$ как подгруппа, состоящая из блочных матриц с двумя блоками по диагонали размеров 1×1 и 4×4, т. е.

$$G = \left\{ \left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}, Y \right) \mid X \in U(4), z \in U(1), Y \in U(5) \right\}.$$

Зададим подгруппы H и K в G следующим образом:

$$H = \{(X, X) \mid X \in U(1) \times U(4) \subset U(5)\},$$

$$K = \left\{ \left(\begin{pmatrix} z^{p_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{p_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{p_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{p_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z^{p_5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Xw & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \mid X \in Sp(2), z, w \in U(1) \right\},$$

где группа Ли $Sp(2)$ стандартным образом вложена в $SU(4) \subset U(4)$, а пятерка положительных чисел $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_5)$ удовлетворяет дополнительным соотношениям

a) $p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} - p_{\sigma(3)} - p_{\sigma(4)}$ взаимно просто с $p_{\sigma(5)}$,

b) $p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} + p_{\sigma(3)} > p_{\sigma(4)} + p_{\sigma(5)}$,

c) $p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} + p_{\sigma(3)} + p_{\sigma(4)} > 3p_{\sigma(5)}$,

d) $3(p_{\sigma(1)}+p_{\sigma(2)}) > p_{\sigma(3)}+p_{\sigma(4)}+p_{\sigma(5)}$
для любой подстановки $\sigma\in S_5$ (множество таких наборов $\bar p$ бесконечно).

Нетрудно проверить, что действие группы $H\times K$ на G свободно и двойное частное $M_{\bar p}=H\backslash G/K$ имеет размерность 13. Эти пространства построены и исследованы в работе автора [5], метрика на них имеет положительную секционную кривизну. На самом деле (аналогично примеру 1) пространство $M_{\bar p}$ изометрично двойному частному группы $U(5)$ по подгруппе $K\subset U(5)\times U(5)$, где на $U(5)$ берется однородная метрика, «масштабированная» вдоль касательных к $U(1)\times U(4)$ векторов.

Зададим цепочки подгрупп

$$H_0=H,\quad K_0=K,\quad H_1=\{(X,Y)\mid X,Y\in U(1)\times U(4)\subset U(5)\},\quad H_2=G,$$

$$K_1=\left\{\left(\operatorname{diag}(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5),\begin{pmatrix}Xw_1 & 0\\ 0 & w_2\end{pmatrix}\right)\mid X\in Sp(2),\right.$$
$$\left. w_1,w_2,z_i\in U(1),\ i=1,\dots,5\right\},$$

$$K_2=\left\{\left(\operatorname{diag}(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5),\begin{pmatrix}X & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}\right)\mid X\in U(4),\right.$$
$$\left. w,z_i\in U(1),\ i=1,\dots,5\right\},$$

$$K_3=\{(\operatorname{diag}(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5),X)\mid X\in U(5),z_i\in U(1),i=1,\dots 5\},$$
$$K_4=\left\{\left(\begin{pmatrix}\operatorname{diag}(z_1,z_2,z_3) & 0\\ 0 & X\end{pmatrix},Y\right)\mid z_1,z_2,z_3\in U(1),X\in U(2),Y\in U(5)\right\},$$
$$K_5=\left\{\left(\begin{pmatrix}\operatorname{diag}(z_1,z_2) & 0\\ 0 & X\end{pmatrix},Y\right)\mid z_1,z_2\in U(1),X\in U(3),Y\in U(5)\right\},$$
$$K_6=\left\{\left(\begin{pmatrix}z_1 & 0\\ 0 & X\end{pmatrix},Y\right)\mid z_1\in U(1),X\in U(4),Y\in U(5)\right\}=G.$$

Обозначим $p=p_5$, $q=-p_1+p_2-p_3+p_4$. Тогда $\mathbf{v}=(H\oplus K)^\perp$, где $(H\oplus K)^\perp$ состоит из всех пар

$$\left(\begin{pmatrix}-ipt & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & ipt & \beta & 0 & -\delta\\ 0 & -\bar\beta & -ipt & \bar\alpha & -\epsilon\\ 0 & 0 & -\alpha & ipt & -\zeta\\ 0 & \bar\delta & \bar\epsilon & \bar\zeta & -iqt\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ipt & \alpha & 0 & \beta & \gamma\\ -\bar\alpha & -ipt & -\beta & 0 & \delta\\ 0 & \bar\beta & ipt & -\bar\alpha & \epsilon\\ -\bar\beta & 0 & \alpha & -ipt & \zeta\\ -\bar\gamma & -\bar\delta & -\bar\epsilon & -\bar\zeta & iqt\end{pmatrix}\right)$$

с $t\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\zeta\in\mathbb{C}$.

Найдем r_1. Пусть

$$X_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&-1&0&-2&0\\0&0&2&0&-1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}0&2&0&-1&0\\-2&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $(-X_1,X_1+X_2)\in\mathbf{v}$ и $\operatorname{pr}_{\mathbf{h}_1}(-X_1,X_1+X_2)=(-X_1,X_1)$. Легко проверить, что X_1 имеет различные собственные числа, т. е. является регулярным в $U(1)\times U(4)$. Значит, $\operatorname{rank}((\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_0),\mathbf{v}) = \dim \operatorname{pr}_{\mathbf{h}_0^\perp} N_{\mathbf{h}_1}(-X_1,X_1) = 5$. Далее, очевидно, что стандартный максимальный тор в H_1 действует на $\mathbf{h}_1^\perp$ с независимыми корнями. Поэтому можно применить лемму 5. Ясно, что $h_1 = 10$. Далее, X_1+X_2 регулярен в $\mathbf{v}(5)$, поэтому $a_1 = 10$. Каждому вектор-столбцу $\alpha\in\mathbb{C}^4$ взаимно однозначно соответствует элемент из $\mathbf{h}_1^\perp$:

$$\left(0,\begin{pmatrix} 0 & \alpha^t \\ -\bar{\alpha} & 0\end{pmatrix}\right).$$

Тогда X_2 задается вектором $(2,0,-1,0)$. Непосредственно находим, что $(-i)\cdot[X_1,X_2] = (0,0,0,i)$, $-[X_1,[X_1,X_2]] = (0,0,1,0)$ и $i\cdot(\operatorname{ad}_{X_1})^3X_2 = (0,-2i,0,i)$. Все четыре вектора независимы, поэтому $b_1 = 4$. По лемме 5 получаем отсюда, что $\operatorname{rank}((\mathbf{h}_2,\mathbf{h}_1),\mathbf{v})\geq 4$. Тогда $r_1\geq 5+4 = 9$.

Теперь найдем r_2. Сразу заметим, что если X_3 — ненулевой диагональный элемент из $\mathbf{v}$, то $N_{\mathbf{k}_1}(X_3)$ при проекции ортогонально $\mathbf{k}_0$ дает 5-мерное подпространство, т. е. $\operatorname{rank}((\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_0),\mathbf{v}) = 5$. Далее, так как существует вектор из $\mathbf{v}$, проекция которого на $\mathbf{k}_1^\perp$ ненулевая, то $\operatorname{rank}((\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1),\mathbf{v})\geq 1$. Ко всем парам $(\mathbf{k}_{i+1},\mathbf{k}_i)$, $i = 2,\dots,5$, применима лемма 5 (из-за независимости соответствующих корней). Опуская несложные технические детали (в духе предыдущего абзаца), находим, что $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 10$, $h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = 10$ и $b_2 = 2, b_3 = 1, b_4 = 2, b_5 = 3$. Применяя лемму 5, получим $r_2\geq 14$. Наконец, $r_3 = 10$, откуда $r\geq 13$.

Итак, нами доказано

Предложение 2. *На пространствах $M_{\bar{p}}$ с метриками положительной кривизны геодезический поток вполне интегрируем.*

§ 6. Приложение: функциональная независимость базиса инвариантных полиномов

Во всех обозначениях этого параграфа мы следуем [7]. Пусть V — n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Рассмотрим конечную группу G, порожденную отражениями относительно каких-то гиперплоскостей в V. Пусть S — алгебра полиномов на V (подразумеваем выбранным базис в V). Группа G действует на S стандартным образом: $g(P)(x) = P(g^{-1}(x))$, $P\in S$, $g\in G$. Будем называть вектор $x\in V$ *сингулярным*, если найдется $g\in G$ такой, что $g(x) = x$. В противном случае назовем x *регулярным*.

Обозначим через J $\mathbb{R}$-алгебру инвариантных полиномов в S, т. е. таких полиномов P, что $g(P) = g$ для любого $g\in G$. В [7] доказана следующая

Теорема (A). *В вышеописанных условиях алгебра J порождена n алгебраически независимыми однородными полиномами $I_1,\dots,I_n$ и единицей.*

Цель параграфа — уточнить этот результат, а именно показать, что верна

Теорема. *В условиях теоремы* (A) *полиномы $I_1,\dots,I_n$ функционально независимы как функции на V в любой регулярной точке $x\in V$.*

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, приведем еще один результат из [7], который нам понадобится. Сначала несколько определений. Если A — градуированное подпространство, то определим последовательность Пуанкаре, зависящую от переменной t как полином

$$P_t(A) = \sum_{i\geq 0}\dim(A^i)\cdot t^i.$$

Пусть F — идеал в S, порожденный однородными полиномами положительных степеней, лежащими в J. Тогда G действует на фактор-пространстве S/F.

Теорема (B) [7]. *Пусть степени образующих полиномов $I_1, \ldots, I_n$ из теоремы* (A) *равны соответственно $m_1, \ldots, m_n$. Тогда*

$$P_t(S/F) = \prod_{i=1}^{n}(1 + t + \cdots + t^{m_i - 1}).$$

Произведение чисел m_i равно порядку G и размерности S/F. Представление G в S/F эквивалентно регулярному представлению.

Теперь можно перейти к доказательству нашей теоремы.

Доказательство. Пусть $g_1, \ldots, g_l$ — отражения, порождающие группу G. Обозначим через θ_i линейный многочлен такой, что g_i является отражением в гиперплоскости $\theta_i(x) = 0$. Положим $\{\pm\theta_1, \pm\theta_2, \ldots, \pm\theta_k\} = \{g(\theta_i) \mid g \in G,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Другими словами, $\theta_1, \ldots, \theta_k$ — это линейные многочлены, задающие все гиперплоскости, отражения относительно которых содержатся в G (не только базисные). Пусть $g_1, \ldots, g_k \in G$ — отражения в гиперплоскостях $\theta_1, \ldots, \theta_k$. Обозначим $\theta = \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \ldots \cdot \theta_k$.

Рассмотрим полином

$$I'(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial I_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial I_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial I_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial I_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial I_2}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial I_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial I_n}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial I_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Функциональная зависимость полиномов $I_1, \ldots, I_n$ в точке x равносильна тому, что $I'(x) = 0$. Легко посчитать, что $\deg(I') = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i - n$. Далее, нетрудно заметить, что при отражении в любой гиперплоскости $\theta_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$, полином I' меняет знак. Следовательно, I' обращается в нуль на каждой гиперплоскости $\theta_i = 0$. В силу линейности полиномов θ_i заключаем, что I' делится на θ_i, $i = 1, \ldots, k$, т. е. $I'(x) = \theta(x) \cdot H(x)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $k = \deg(\theta) \geq \sum\limits_{i=1}^{n} m_i - n$. Тогда будет следовать, что $H = \mathrm{const}$ и I' обращается в нуль в точности на сингулярных точках.

Пусть $S' = \left\{P \in S \mid \deg(P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i - n\right\}$, $F' = S' \cap F$. По теореме (B) $\dim(S'/F') = 1$. Легко видеть, что F' инвариантно относительно действия G, поэтому существует G-инвариантное одномерное подпространство U в S' такое, что $S' = F' \oplus U$ (здесь прямая сумма берется относительно некоторого инвариантного скалярного произведения на S'). Следовательно, найдется полином $P \in U$ такой, что $g(P) = \pm P$ для всех $g \in G$. Допустим, что $g_i(P) = -P$ для $i = 1, \ldots, r$ и $g_j(P) = P$ для $j = r+1, \ldots, k$. Так как $g_i(P) = -P$, то P делится на θ_i. Значит, $P = \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \ldots \cdot \theta_r \cdot L$, для некоторого полинома L.

Пусть $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, r$. Возьмем $x \in V$. Отражение в плоскости $g_i(\theta_j)$ задается правилом $x \mapsto g_i g_j g_i^{-1}(x)$. Но $g_i g_j g_i^{-1}(P) = -P$, поэтому $g_i(\theta_j)$ лежит среди $\pm\theta_1, \ldots, \pm\theta_r$.

Пусть теперь $i = 1, \ldots, r$. Тогда $-\theta_1 \ldots \theta_r \cdot L = -P = g_i(P) = -\theta_1 \ldots \theta_r \cdot g_i(L)$ (минус в последнем равенстве возникает потому, что $g_i(\theta_i) = -\theta_i$). Значит, $g_i(L) = L$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Если же $i = r+1, \ldots, k$, то аналогично $\theta_1 \ldots \theta_r \cdot L = P = g_i(P) = \theta_1 \ldots \theta_r \cdot g_i(L)$, т. е. $g_i(L) = L$.

Итак, $g_i(L) = L$ для всех $i = 1, \dots, k$, следовательно, $L \in J$. Но P — ненулевой полином, т. е. P не лежит в F'; поэтому $\deg(L) = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i - n = \deg(P) = r \leq k$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thimm A.* Integrable geodesic flows on homogeneous spaces // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1981. V. 1. P. 495–517.
2. *Paternain G. P., Spatzier R. J.* New examples of manifolds with completely integrable geodesic flows // Adv. Math. 1994. V. 108. P. 346–366.
3. *Gromoll D. Meyer W. T.* An exotic sphere with nonnegative sectional curvature // Ann. of Math. 1974. V. 100. P. 401–406.
4. *Eschenburg J. H.* New examples of manifolds with strictly positive curvature // Invent. Math. 1982. V. 66. P. 469–480.
5. *Базайкин Я. В.* Об одном семействе 13-мерных замкнутых римановых многообразий положительной кривизны // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1219–1237.
6. *Eschenburg J. H.* Inhomogeneous spaces of positive curvature // Differential Geom. Appl. 1992. V. 2. P. 123–132.
7. *Chevalley C.* Invariants of finite groups, generated by reflections // Amer. J. Math. 1955. V. 77. P. 778–782.
8. *Адамс Дж.* Лекции по группам Ли. М.: Наука, 1979.
9. *B. O'Neill* The fundamental equations of a submersion // Mich. Math. J. 1966. V. 13. P. 459–469.

Статья поступила 24 апреля 1999 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
bazaikin@math.nsc.ru