Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 512.7

ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА МНОГООБРАЗИЙ, РЕАЛИЗОВАННЫХ В ВИДЕ ПОЛНОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ТОРИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

А. В. Кротов

Аннотация: Получена формула для вычисления эйлеровой характеристики гладкого подмногообразия, реализованного в виде полного пересечения гиперповерхностей, в некотором семействе n-мерных торических многообразий. Результат получен в терминах степеней D-однородных полиномов, определяющих полное пересечение гиперповерхностей. Библиогр. 4.

1. Торическое многообразие H_c и его координатное кольцо

Пусть N — целочисленная решетка ранга n, $M = \operatorname{Hom}(N, \mathbb{Z})$ — решетка, двойственная к N. Обозначим через Σ веер, составленный из конусов σ в $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes \mathbb{Q}$. Рассмотрим в Σ подмножество $\Sigma^{(1)}$ всех одномерных конусов $\{\rho_1, \dots, \rho_d\}$. Пусть $\mathbb{C}^d$ — d-мерное комплексное пространство с координатами $z_1, \dots, z_d$. Установим взаимно-однозначное соответствие между множеством одномерных конусов веера Σ и координатными функциями z_i на $\mathbb{C}^d$ естественным образом: $\rho_i \leftrightarrow z_i$, $i = 1, \dots, d$.

Пусть $X = X_\Sigma$ — торическое многообразие, ассоциированное с веером Σ. Заметим, что с каждым конусом $\sigma \in \Sigma$ связано замкнутое алгебраическое подмножество Z_σ в X коразмерности $\dim \sigma$. В частности, каждому одномерному конусу ρ_i из Σ соответствует некоторый дивизор D_i на X, $i = 1, \dots, d$.

Рассмотрим теперь кольцо полиномов $S(\Sigma) = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_d]$. Согласно Коксу [1] будем градуировать кольцо $S(\Sigma)$ посредством группы $A_{n-1}(X)$ — фактор-группы группы дивизоров Вейля на X по подгруппе дивизоров рациональных функций на X.

Определение. Класс дивизора D_i в группе $A_{n-1}(X)$ назовем *степенью z_i-й переменной* в кольце полиномов $S(\Sigma)$. Определим степень монома $\prod\limits_{i=1}^{d} z_i^{a_i}$ как следующий класс дивизоров:

$$\beta = \left[\sum_{i=1}^{d} a_i \deg z_i\right] = \left[\sum_{i=1}^{d} a_i D_i\right],$$

где $\beta \in A_{n-1}(X)$.

Обозначим через S_β множество всех линейных комбинаций мономов степени β. Элементы из S_β назовем *D-однородными многочленами степени β*.

Пусть Σ — веер в $\mathbb{R}^n$. Минимальные целочисленные образующие набора ребер $\Sigma^{(1)} := \{v_1, \dots , v_{n+2}\}$ веера Σ имеют вид

$$v_1 = (1, 0, \dots , 0), \dots , v_{n-1} = (0, \dots , 0, 1, 0),$$

$$v_n = (-1, -1, \dots , -1, 0),\ v_{n+1} = (c_1, \dots , c_{n-1}, -1),\ v_{n+2} = (0, 0, \dots , 0, 1);$$

а n-мерные конусы веера порождаются следующими наборами векторов:

$$\{v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n, v_{n+1}\}, \quad \{v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n, v_{n+2}\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где крышка над символом означает, что данный символ должен быть пропущен. Обозначим через H_c соответствующее этому вееру компактное торическое многообразие.

Опишем градуировку координатного кольца $S(\Sigma)$ торического многообразия H_c. Отметим, что группа Чжоу $A_{n-1}(H_c)$ изоморфна $\mathbb{Z}^2$ и в качестве образующих данной группы можно выбрать классы дивизоров D_n и D_{n+1}. Согласно общей теории торических многообразий [2] и определению степени переменной, проделав несложные вычисления, получим

$$\deg z_i = [D_i] = [D_n] - c_i[D_{n+1}] \quad \text{для} \quad i = 1, \dots , n - 1,$$
$$\deg z_n = [D_n], \quad \deg z_{n+1} = [D_{n+1}], \quad \deg z_{n+2} = [D_{n+2}] = -c_n[D_{n+1}].$$

Замечание. Чтобы не усложнять обозначения, далее через D_i будем обозначать класс линейной эквивалентности дивизора. Фиксируем образующие D_n и D_{n+1} группы $A_{n-1}(H_c)$, поэтому под степенью монома будем понимать пару целых чисел (r, s), имея в виду соответствие $(r, s) \leftrightarrow rD_n + sD_{n+1}$.

2. Эйлерова характеристика

Для доказательства основного результата нам понадобится вспомогательная теорема, описывающая индексы пересечения базисных дивизоров группы $A_{n-1}(H_c)$.

Теорема 2.1. *На торическом многообразии H_c индексы пересечения базисных дивизоров D_n и D_{n+1} группы Чжоу $A_{n-1}(H_c)$ находятся из соотношений*

$$D_n^n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i, \quad D_n^{n-1}D_{n+1} = 1, \quad D_n^k D_{n+1}^{n-k} = 0, \quad k = 0, \dots, n-2.$$

Доказательство. Пусть I — идеал, порожденный всеми выражениями вида $D_{i_1} \cdot \ldots \cdot D_{i_k}$ для $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$, которые не образуют конус в веере Σ, и $\sum_{i=1}^{d} \langle m, v_i\rangle D_i$ для $m \in M$.

Для H_c идеал I будет порождаться выражениями вида

$$D_1 \cdot \ldots \cdot D_n,\ D_{n+1}D_{n+2};$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} m_i(D_i - D_n + c_iD_{n+1}) + m_n(D_{n+1} - D_{n+2}).$$

По теореме Данилова — Юркевича [3] имеем

$$A^*(H_c) \simeq H^*(H_c) \simeq \mathbb{Z}(D_1, \dots, D_{n+2})/I.$$

Учитывая, что в фактор-кольце $D_i = D_n - c_i D_{n+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, $D_{n+2} = D_{n+1}$, окончательно получаем

$$A^*(H_c) \simeq \mathbb{Z}(D_n, D_{n+1})/I_1,$$

где

$$I_1 = \left\{ D_{n+1}^2, D_n^n - D_n^{n-1} D_{n+1} \sum_{i=1}^{n-1} c_i \right\}.$$

Отсюда сразу следует, что $D_n^k D_{n+1}^{n-k} = 0$, $k = 0, \dots, n-2$.

Докажем теперь, что $D_n^{n-1} D_{n+1} = 1$. Для этого рассмотрим выражение вида $D_1 \cdot \ldots \cdot D_{n-1} D_{n+1}$. Так как векторы $v_1, \dots, v_{n-1}, v_{n+1}$ образуют конус в Σ, индекс пересечения дивизоров $D_1 \cdot \ldots \cdot D_{n-1} D_{n+1}$ равен единице. С другой стороны,

$$\begin{aligned} D_1 \cdot \ldots \cdot D_{n-1} D_{n+1} &= (D_n - c_1 D_{n+1}) \cdot \ldots \cdot (D_n - c_{n-1} D_{n+1}) D_{n+1} \\ &= D_n^{n-1} D_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k D_n^k D_{n+1}^{n-k} = 1, \end{aligned}$$

где α_k — некоторые константы.

Но мы только что показали, что $D_n^k D_{n+1}^{n-k} = 0$, $k = 0, \dots n-2$, следовательно,

$$D_n^{k-1} D_{n+1} = 1.$$

Последнее равенство $D_n^n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i$, вытекает из того, что

$$D_n^n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i D_n^{n-1} D_{n+1}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь в торическом многообразии H_c гладкое полное пересечение k гиперповерхностей Y_i степеней (a_i, b_i) и вычислим его эйлерову характеристику.

Теорема 2.2. *Пусть Y — гладкое полное пересечение k гиперповерхностей Y_i степеней (a_i, b_i) в H_c. Тогда эйлерова характеристика $\chi(Y)$ вычисляется по формуле*

$$\begin{aligned} \chi(Y) = (-1)^{n-k} \Bigg\{ &\sum_{m=0}^{n-k} (-1)^m C_{n-1}^m \sum_{|p|=n-m} a^p \sum_{i=1}^{n-1} c_i + 2 \sum_{m=1}^{n-k} (-1)^m C_n^{m-1} \sum_{|p|=n-m} a^p \\ &+ \sum_{m=0}^{n-k} (-1)^m C_n^m \sum_{j=1}^{n-k-m+1} j \sum_{i=1}^{k} \sum_{|p[i]|=n-j-m} (a[i])^{p[i]} a_i^{j-1} b_i \Bigg\}, \end{aligned}$$

где $a^p = a_1^{p_1} \dots a_k^{p_k}$, $|p| = p_1 + \dots + p_k$, $p_i > 0$, $(a[i]) = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k)$, $i = 1, \dots, k$.

Доказательство. Хорошо известно, что

$$\chi(Y) = \int\limits_Y c_n(Y),$$

где $c_n(Y)$ — n-й класс Чженя подмногообразия Y, а интеграл понимается как степень нульмерной составляющей произведения $c_n(Y) \cdot Y$.

Так как Y — гладкое полное пересечение гиперповерхностей Y_i, полный класс Чженя $c(Y)$ может быть вычислен по формуле [4]:

$$c(Y) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n+2}(1+D_i)}{\prod\limits_{i=1}^{k}(1+a_iD_n+b_iD_{n+1})}. \tag{1}$$

Учитывая эквивалентность $D_i = D_n - c_iD_{n+1}$, $i = 1,\dots,n-1$, $D_{n+2} = D_{n+1}$, перепишем (1) в виде

$$c(Y) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(1+D_n-c_iD_{n+1})(1+D_n)(1+D_{n+1})^2}{\prod\limits_{i=1}^{k}(1+a_iD_n+b_iD_{n+1})}.$$

Тогда

$$c(Y)\cdot Y = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(1+D_n-c_iD_{n+1})(1+D_n)(1+D_{n+1})^2}{\prod\limits_{i=1}^{k}(1+a_iD_n+b_iD_{n+1})}\prod_{i=1}^{k}(a_iD_n+b_iD_{n+1}). \tag{2}$$

Из теоремы 2.1 следует, что из нульмерных составляющих не обращаются в нуль только составляющие вида D_n^n и $D_n^{n-1}D_{n+1}$. Поэтому, чтобы вычислить нульмерную составляющую (2), достаточно вычислить коэффициенты перед D_n^n и $D_n^{n-1}D_{n+1}$.

Разобьем (2) на два произведения:

$$\prod_{i=1}^{n-1}(1+D_n-c_iD_{n+1})(1+D_n)(1+D_{n+1})^2; \tag{3}$$

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(a_iD_n+b_iD_{n+1})}{\prod\limits_{i=1}^{k}(1+a_iD_n+b_iD_{n+1})} = \prod_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}(a_iD_n+b_iD_{n+1})^s. \tag{4}$$

I. Вычислим коэффициент при D_n^n.

Пусть α_m — коэффициент при D_n^m в (3), а β_m — коэффициент при D_n^{n-m}, $m = 0,\dots,n-k$, в (4). Тогда коэффициент при D_n^n в (2) равен $\sum\limits_{m=0}^{n-k}\alpha_m\beta_m$. Вычисляя α_m и β_m, находим

$$\alpha_m = C_n^m, \quad \beta_m = (-1)^{n-k-m}\sum_{|p|=n-m}a^p, \quad m = 0,\dots,n-k,$$

где $a^p = a_1^{p_1}\dots a_k^{p_k}$, $|p| = p_1+\dots+p_k$.

Следовательно, коэффициент при D_n^n равен

$$\sum_{m=0}^{n-k}(-1)^{n-k-m}C_n^m\sum_{|p|=n-m}a^p.$$

II. Вычислим коэффициент при $D_n^{n-1}D_{n+1}$.

Обозначим через A_m и B_m коэффициенты при $D_n^{m-1}D_{n+1}$ и D_n^{n-m} в (3) и (4) соответственно. Вычисляя их, получаем

$$A_m = -C_{n-1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1} c_i + 2C_n^{m-1},$$

$$B_m = (-1)^{n-k-m}\sum_{|p|=n-m} a^p, \quad m = 1,\dots,n-k.$$

Пусть теперь E_m и F_m — коэффициенты при D_n^m и $D_n^{n-1-m}D_{n+1}$, $m = 0,\dots,n-k$, в (3) и (4) соответственно. Коэффициенты E_m легко вычисляются и равны

$$E_m = C_n^m, \quad m = 0,\dots,n-k.$$

Для вычисления коэффициентов F_m при $D_n^{n-1-m}D_{n+1}$ вычислим коэффициенты $\mu_j(i)$ при $D_n^{j-1}D_{n+1}$, $j = 1,\dots,n-k-m-1$, в $\sum\limits_{s=1}^{n-k+1}(-1)^{s-1}(a_iD_n - b_iD_{n+1})^s$:

$$\mu_j(i) = (-1)^j j a_i^{j-1} b_i, \quad i = 1,\dots,k,$$

и коэффициенты $\nu_j(i)$ при D_n^{n-j-m} в $\prod\limits_{[i]=1}^{k}\sum\limits_{s=1}^{n-k+1}(-1)^{s-1}(a_iD_n - b_iD_{n+1})^s$, $j = 1,\dots,n-k-m+1$, где $[i]$ означает, что i-й множитель пропущен. Прямые вычисления дают

$$\nu_j(i) = (-1)^{n-k-m-j+1}\sum_{|p[i]|=n-j-m}(a[i])^{p[i]}, \ j = 1,\dots,n-k-m+1, \ i = 1,\dots,k.$$

Тогда

$$F_m = \sum_{j=1}^{n-k-m+1}\sum_{i=1}^{k}\mu_j(i)\nu_j(i)$$
$$= (-1)^{n-k-m}\sum_{j=1}^{n-k-m+1} j\sum_{i=1}^{k}\sum_{|p[i]|=n-j-m}(a[i])^{p[i]}a_i^{j-1}b_i,$$

где $m = 0,\dots,n-k$.

Далее, легко заметить, что коэффициент при $D_n^{n-1}D_{n+1}$ равен

$$\sum_{m=1}^{n-k}A_mB_m + \sum_{m=0}^{n-k}E_mF_m = 2\sum_{m=1}^{n-k}(-1)^{n-k-m}C_n^{m-1}\sum_{|p[i]|=n-m}a^p$$
$$-\sum_{m=1}^{n-k}(-1)^{n-k-m}C_{n-1}^{m-1}\sum_{|p[i]|=n-m}a^p\sum_{i=1}^{n-1}c_i$$
$$+\sum_{m=0}^{n-k}(-1)^{n-k-m}C_n^m\sum_{j=1}^{n-k-m+1} j\sum_{i=1}^{k}\sum_{|p[i]|=n-j-m}(a[i])^{p[i]}a_i^{j-1}b_i.$$

Зная теперь коэффициенты при ненулевых нульмерных составляющих (2) и учитывая, что

$$D_n^n = \sum_{i=1}^{n-1}c_i, \quad D_n^{n-1}D_{n+1} = 1,$$

получаем утверждение теоремы.

Пример. Рассмотрим в трехмерном торическом многообразии H_c, где $c = (c_1, c_2)$, кривую Y, реализованную в виде полного пересечения двух гиперповерхностей Y_1 и Y_2. Определим гиперповерхность Y_i как множество нулей полинома f_i степени (a_i, b_i). Тогда f_i можно задать в виде

$$f_i = \sum_J d_J z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3} z_4^{j_4} z_5^{j_5},$$

где $J = \{j_1, \dots, j_5\}$ — набор степеней, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{k=1}^{5} j_k \deg z_k = (a_i, b_i).$$

По теореме 2.2 получим

$$\chi(Y_1 \cap Y_2) = a_1 a_2 \{(2 - a_1 - a_2)(c_1 + c_2) - 2 + 2(b_1 + b_2)\} + a_2 b_1 (3 - a_2) + a_1 b_2 (3 - a_1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cox D.* The homogeneous coordinate ring of toric variety // J. Algebraic Geom. 1995. V. 4. P. 17–50.
2. *Fulton W.* Introduction to toric varieties. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.
3. *Данилов В. И.* Геометрия торических многообразий // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33. С. 85–134.
4. *Кротов А. В.* О классах Чженя полных пересечений в гладком торическом многообразии // Комплексный анализ и дифференциальные уравнения. Красноярск, 1996. С. 90–95.

Статья поступила 18 мая 1997 г.

г. Сосновоборск Красноярского края
FKGTU26@krasnoyarsk.su