Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 517.956.3

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

А. М. Блохин, А. С. Бушманова

Аннотация: Доказана асимптотическая устойчивость (по Ляпунову) состояния равновесия для одной гидродинамической модели переноса заряда в полупроводниках в линейном приближении. Библиогр. 6.

§ 1. Предварительные сведения

В настоящее время для описания физических явлений, связанных с переносом зарядов в полупроводниковых приборах, часто применяют так называемые гидродинамические модели. Основой для получения таких моделей является уравнение переноса для плотности носителей зарядов в электрическом поле. С помощью специальной техники моментов из уравнения переноса получается, вообще говоря, бесконечная система уравнений моментов, имеющих консервативный вид (т. е. записанных в виде законов сохранения). Далее, на основе некоторых физически правдоподобных предположений, полученная система уравнений моментов упрощается. В итоге бесконечная система уравнений моментов сводится к той или иной конечной системе (т. е. к системе, состоящей из конечного числа уравнений) гидродинамического типа.

Ниже за основу взята гидродинамическая модель переноса заряда в полупроводниках, предложенная в недавно вышедшей работе [1]. Используя обозначения из [2], приведем упрощенный вариант этой модели (так называемый газодинамический вариант) в одномерном случае. Газодинамическая модель в недивергентном виде может быть записана так (мы выписываем квазилинейную систему уравнений сразу в безразмерном виде; сам процесс обезразмеривания подробно описан в [2]):

$$
\begin{gathered}
R_\tau + uR_s + Ru_s = 0, \quad u_\tau + uu_s + \frac{\vartheta}{R}R_s + \vartheta_s = Q - \frac{u}{\tau_p}, \\
\vartheta_\tau + u\vartheta_s + \frac{2}{3}\vartheta u_s = \frac{2}{3}\left\{\lambda u^2 + \frac{3(1-\vartheta)}{2\tau_w}\right\},
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

$$
\varepsilon^2\varphi_{ss} = R - \rho. \tag{1.2}
$$

Здесь R — плотность, u — скорость, ϑ — температура, φ — электрический потенциал; $\varepsilon^2 = \frac{1}{\beta}$, β — некоторая положительная постоянная (см. [2]); $Q = \varphi_s$, $\lambda = \frac{1}{\tau_p} - \frac{1}{2\tau_w}$; $\tau_p = \tau_p(E)$, $\tau_w = \tau_w(E)$ — времена релаксации; $E = \frac{u^2}{2} + \frac{3}{2}\vartheta$;

$\rho = \rho(s)$ — некоторая заданная функция на отрезке [0,1]. Далее будем предполагать, что функция $(\rho(s) - 1)$ достаточно гладкая и финитная, причем

$$1 \geq \rho(s) \geq \delta > 0, \quad s \in [0, 1].$$

Следуя [2], поставим при $s = 0, 1$ граничные условия, соответствующие известной в физике полупроводников задаче о баллистическом диоде (см. [3, 4]):

$$R(\tau, 0) = R(\tau, 1) = \vartheta(\tau, 0) = 1, \tag{1.3}$$

$$\varphi(\tau, 0) = A, \quad \varphi(\tau, 1) = A + B, \tag{1.4}$$

где A, B — некоторые постоянные, причем B (> 0) — так называемое *напряжение смещения.* Не нарушая общности, будем полагать далее, что $A = 0$. Количество граничных условий на каждой из границ поставлено с учетом предположения о том, что выполнены следующие неравенства:

$$0 < u(\tau, 0) < a(\tau, 0), \quad 0 < u(\tau, 1) < a(\tau, 1). \tag{1.5}$$

Здесь $a(\tau, s) = \sqrt{\frac{5}{3}\vartheta}$ — скорость звука. Численные исследования задачи о баллистическом диоде показали, что предположение (1.5) всегда выполнено (см. [2]). Наконец, как обычно, при $\tau = 0$ мы должны задать начальные условия.

Мы будем пользоваться также и другой, эквивалентной, постановкой смешанной задачи (1.1)–(1.4). В самом деле, следуя [2], добавим к системе (1.1) вместо уравнения Пуассона (1.2) соотношение

$$\varepsilon^2 Q_\tau = \int_0^1 R(\tau, \xi) u(\tau, \xi)\, d\xi - Ru. \tag{1.2$'$}$$

Само же уравнение Пуассона мы перепишем так:

$$\varepsilon^2 Q_s = R - \rho, \tag{1.2$''$}$$

и будем трактовать его теперь как дополнительный стационарный закон, которому должны удовлетворять начальные данные. Из граничных условий (1.4) следует, что агрегат $Q = Q(\tau, s)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_0^1 Q(\tau, \xi)\, d\xi = B, \tag{1.6}$$

которому также должны удовлетворять и начальные данные. Электрический потенциал $\varphi = \varphi(\tau, s)$ находим из очевидного равенства

$$\varphi(\tau, s) = \int_0^s Q(\tau, \xi)\, d\xi. \tag{1.7}$$

Таким образом, вместо смешанной задачи (1.1)–(1.4) можно рассматривать задачу (1.1), (1.2$'$), (1.3) с дополнительными соотношениями (1.2$''$), (1.6), которые, по существу, являются требованиями на начальные данные. Без труда можно показать эквивалентность этих двух формулировок интересующей нас смешанной задачи (по крайней мере на гладких решениях).

У задачи (1.1)–(1.4) есть следующее стационарное решение (состояние равновесия) при $B = 0$:

$$u(\tau, s) = \hat{u} = 0, \quad \vartheta(\tau, s) = \hat{\vartheta} = 1, \quad R(\tau, s) = \widehat{R}(s), \quad \varphi(\tau, s) = \widehat{\varphi}(s), \tag{1.8}$$

где функции $\widehat{R}(s)$, $\widehat{\varphi}(s)$ находятся как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\widehat{R}' = \widehat{R}\widehat{\varphi}', \quad \varepsilon^2 \widehat{\varphi}'' = \widehat{R} - \rho \tag{1.9}$$

с граничными условиями

$$\widehat{R}(0) = \widehat{R}(1) = 1, \quad \widehat{\varphi}(0) = \widehat{\varphi}(1) = 0. \tag{1.10}$$

Из первого уравнения системы (1.9) и граничных условий (1.10) следует, что

$$\widehat{R}(s) = e^{\widehat{\varphi}(s)}, \tag{1.11}$$

а $\widehat{\varphi}(s)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\varepsilon^2 \widehat{\varphi}'' = e^{\widehat{\varphi}} - \rho \tag{1.12}$$

с граничными условиями

$$\widehat{\varphi}(0) = \widehat{\varphi}(1) = 0. \tag{1.13}$$

Очевидно, что при малых ε

$$\widehat{R}(s) = \rho(s) + O(\varepsilon), \quad \widehat{\varphi}(s) = \ln \rho(s) + O(\varepsilon), \tag{1.14}$$

т. е. в дальнейшем можно полагать с большой точностью, что функции $(\widehat{R}(s) - 1)$, $\widehat{\varphi}(s)$ достаточно гладкие и финитные.

Замечание 1.1. Следуя [2], мы также можем выписать дополнительный энтропийный закон сохранения для газодинамической модели. В недивергентном виде он записывается так:

$$S_\tau + uS_s = \frac{1}{\vartheta}\left\{\lambda u^2 + \frac{3(1-\vartheta)}{2\tau_w}\right\}, \tag{1.15}$$

где S — энтропия, связанная с R, ϑ уравнением состояния:

$$\vartheta = R^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2}{3}S}. \tag{1.16}$$

Если $n = n(S)$ — достаточно гладкая функция от S, то вместо соотношения (1.15) можно взять

$$(n(S))_\tau + u(n(S))_s = \frac{n'(S)}{\vartheta}\left\{\lambda u^2 + \frac{3(1-\vartheta)}{2\tau_w}\right\}. \tag{1.15$'$}$$

Так, например, положив $n(S) = e^{\frac{2}{3}S}$, получим энтропийный закон в следующем виде:

$$(\vartheta R^{-\frac{2}{3}})_\tau + u(\vartheta R^{-\frac{2}{3}})_s = \frac{2}{3}R^{-\frac{2}{3}}\left\{\lambda u^2 + \frac{3(1-\vartheta)}{2\tau_w}\right\}. \tag{1.17}$$

Замечание 1.2. Положим $B = 0$. Тогда в силу определенных физических соображений (см. [1]) требуется, чтобы при любых начальных данных решение смешанной задачи (1.1)–(1.4) стремилось бы при $\tau \to \infty$ к состоянию равновесия, т. е.

$$u(\tau, s) \to 0, \quad \vartheta(\tau, s) \to 1, \quad R(\tau, s) \to \widehat{R}(s), \quad \varphi(\tau, s) \to \widehat{\varphi}(s).$$

Ниже этот факт будет доказан нами для линеаризованной смешанной задачи (правда, при некотором, весьма существенном, ограничении на функцию $\rho(s)$). Мы можем также доказать этот факт (это будет темой наших следующих публикаций) для исходной квазилинейной смешанной задачи в том случае, когда начальные данные мало отличаются от состояния равновесия.

§ 2. Линеаризация смешанной задачи (1.1)–(1.4)

Проведем линеаризацию интересующей нас смешанной задачи относительно состояния равновесия (1.8). В результате получим линейную систему (малые возмущения искомых величин будем обозначать теми же символами):

$$r_\tau + u_s + \widehat{\varphi}' u = 0, \quad u_\tau + r_s + \vartheta_s + \widehat{\varphi}' \vartheta = Q - \mu u, \quad \frac{3}{2}\vartheta_\tau + u_s + \frac{3}{2}\nu\vartheta = 0, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon^2 Q_\tau = -\widehat{R}u + \int\limits_0^1 \widehat{R}(\xi) u(\tau, \xi)\, d\xi. \tag{2.2}$$

Здесь $r = \frac{R}{\widehat{R}}$, $\mu = \frac{1}{\hat{\tau}_p} > 0$, $\nu = \frac{1}{\hat{\tau}_w} > 0$, $\hat{\tau}_p = \tau_p\bigl(\frac{3}{2}\bigr)$, $\hat{\tau}_w = \tau_w\bigl(\frac{3}{2}\bigr)$. Как следует из [2], постоянные μ, ν, β — большие параметры. Граничные условия для системы (2.1) примут вид

$$r(\tau, 0) = r(\tau, 1) = \vartheta(\tau, 0) = 0. \tag{2.3}$$

Линеаризация соотношений (1.2″), (1.6), (1.7) даст нам условия

$$\varepsilon^2 Q_s = \widehat{R} r, \quad \int\limits_0^1 Q(\tau, \xi)\, d\xi = 0, \quad \varphi(\tau, s) = \int\limits_0^s Q(\tau, \xi)\, d\xi. \tag{2.4}$$

Целью настоящей работы будет доказательство асимптотической устойчивости (по Ляпунову) тривиального решения линейной задачи (2.1)–(2.3). Для этого в последнем параграфе мы получим так называемую априорную оценку, из которой и будет следовать асимптотическая устойчивость тривиального решения.

Полагая $U = (r,\, u,\, \vartheta)^*$, где * означает транспонирование, перепишем систему (2.1) в векторном виде:

$$\mathbf{A}U_\tau + \mathbf{B}U_s + \mathbf{D}U = \mathbf{F}. \tag{2.1′}$$

Здесь

$$\mathbf{A} = \operatorname{diag}(1, 1, 3/2), \quad \mathbf{D} = \operatorname{diag}(0, \mu, (3/2)\nu) + \widehat{\varphi}' \mathbf{D}_1,$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{pmatrix};$$

$\operatorname{diag}(1, 1, 3/2)$, $\operatorname{diag}(0, \mu, (3/2)\nu)$ — диагональные матрицы.

Система (2.1′) симметрическая t-гиперболическая (по Фридрихсу) (см. [5]). Вычислим собственные значения матрицы $\mathbf{B}$:

$$\lambda(\mathbf{B}) = 0, \pm\sqrt{2}. \tag{2.5}$$

Из (2.5) вытекает (см. [5]), что одно граничное условие в (2.3) оказывается лишним. На самом же деле граничное условие $\vartheta(\tau, 0) = 0$ автоматически выполнено, если начальная функция $\vartheta_0(s)$ $(= \vartheta(0, s))$ обладает следующим свойством: $\vartheta_0(0) = 0$. Действительно, из граничных условий $r(\tau, 0) = r(\tau, 1) = 0$ и из первого уравнения системы (2.1) следует, что

$$u_s(\tau, 0) = u_s(\tau, 1) = 0. \tag{2.6}$$

При получении (2.6) мы также учли, что $\widehat{\varphi}(s)$ — достаточно гладкая финитная функция. Используя (2.6), из третьего уравнения системы (2.1) получаем

$$\vartheta_\tau(\tau,0)+\nu\vartheta(\tau,0)=0,\quad \vartheta_\tau(\tau,1)+\nu\vartheta(\tau,1)=0,$$

т. е.

$$\vartheta(\tau,0)=e^{-\nu\tau}\vartheta_0(0),\quad \vartheta(\tau,1)=e^{-\nu\tau}\vartheta_0(1).$$

Таким образом, граничное условие $\vartheta(\tau,0)=0$ выполнено, если $\vartheta_0(0)=0$. Далее будем также полагать, что $\vartheta_0(1)=0$, т. е. $\vartheta(\tau,1)=0$.

Тождество интеграла энергии для системы (2.1′) в дифференциальной форме имеет следующий вид (см. [5]):

$$\{\widehat{R}(\mathbf{A}U,U)\}_\tau+\{\widehat{R}(\mathbf{B}U,U)\}_s+\widehat{R}(2\mu u^2+3\nu\vartheta^2)=2\widehat{R}uQ, \tag{2.7}$$

где $(\mathbf{B}U,U)=2(ur+u\vartheta)$, причем в силу граничных условий

$$(\mathbf{B}U,U)|_{s=0,1}=0. \tag{2.8}$$

Интегрируя (2.7) по s от 0 до 1 (с учетом (2.8)), получим для системы (2.1′) тождество интеграла энергии в интегральной форме:

$$\frac{d}{d\tau}\|U(\tau)\|_A^2+2\int_0^1\widehat{R}(\mu u^2+\frac{3}{2}\nu\vartheta^2-uQ)\,d\xi=0. \tag{2.9}$$

Здесь $\|U(\tau)\|_A^2=\int\limits_0^1\widehat{R}(\mathbf{A}U,U)\,d\xi$.

Умножая (2.2) на $2Q$, интегрируя полученное выражение по s от 0 до 1 (с учетом соотношения $\int\limits_0^1 Q(\tau,\xi)\,d\xi=0$; см. (2.4)) и складывая его с (2.9), в итоге будем иметь

$$\frac{d}{d\tau}I^{(0)}(\tau)+2\int_0^1\widehat{R}\left(\mu u^2+\frac{3}{2}\nu\vartheta^2\right)d\xi=0, \tag{2.10}$$

где

$$I^{(0)}(\tau)=\|U(\tau)\|_A^2+\varepsilon^2\int_0^1 Q^2(\tau,\xi)\,d\xi.$$

Дифференцируя систему (2.1′) по τ, получим для вектора U_τ систему

$$\mathbf{A}(U_\tau)_\tau+\mathbf{B}(U_\tau)_s+\mathbf{D}U_\tau=\mathbf{F}_\tau. \tag{2.11}$$

Здесь $\mathbf{F}_\tau=\left(0,\ -\beta\widehat{R}u+\beta\int\limits_0^1\widehat{R}u\,d\xi,\ 0\right)^*$. Для системы (2.11) без труда запишем тождество интеграла энергии в интегральной форме:

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\|U_\tau(\tau)\|_A^2+\beta\int_0^1\widehat{R}^2u^2\,d\xi-\beta\left(\int_0^1\widehat{R}u\,d\xi\right)^2\right\}+2\int_0^1\widehat{R}\left(\mu u_\tau^2+\frac{3}{2}\nu\vartheta_\tau^2\right)d\xi=0. \tag{2.12}$$

Прибавим к (2.12) очевидное соотношение

$$\varepsilon^2 \frac{d}{d\tau}\left\{\int\limits_0^1 Q_\tau^2(\tau,\xi)\,d\xi\right\} = -2\int\limits_0^1 \widehat{R} u_\tau Q_\tau\,d\xi.$$

В итоге получим

$$\frac{d}{d\tau} I^{(1)}(\tau) + 2\int\limits_0^1 \widehat{R}\left(\mu u_\tau^2 + \frac{3}{2}\nu\vartheta_\tau^2\right) d\xi = 0, \tag{2.13}$$

где

$$I^{(1)}(\tau) = \|U_\tau(\tau)\|_A^2 + \varepsilon^2 \int\limits_0^1 Q_\tau^2(\tau,\xi)\,d\xi.$$

Наличие (2.10) означает корректность линейной смешанной задачи (2.1)–(2.3), поскольку из (2.10) следует априорная оценка

$$\frac{d}{d\tau} I^{(0)}(\tau) \le 0, \quad \text{т. е. } I^{(0)}(\tau) \le I^{(0)}(0), \quad \tau > 0. \tag{2.14}$$

Априорная оценка (2.14) означает, что

$$U(\tau,s) \in L_2(0,1), \quad Q(\tau,s) \in L_2(0,1)$$

при всех $\tau > 0$. Из (2.4) вытекает, что

$$\|\varphi(\tau)\|_{L_2(0,1)} \le \|Q(\tau)\|_{L_2(0,1)},$$

т. е. $\varphi(\tau,s) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ при всех $\tau > 0$, причем

$$\|\varphi(\tau)\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)} \le \|Q(\tau)\|_{L_2(0,1)}.$$

Из априорной оценки (2.14) также следует устойчивость тривиального решения линейной смешанной задачи (2.1)–(2.3). В последнем параграфе мы получим более тонкую априорную оценку, с помощью которой можно будет доказать и существование гладкого решения линейной смешанной задачи (2.1)–(2.3) при всех $\tau > 0$, и асимптотическую устойчивость (по Ляпунову) ее тривиального решения.

Замечание 2.1. На самом деле из (2.4) следует, что

$$Q(\tau,s) \in W_2^1(0,1), \quad \varphi(\tau,s) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,1)$$

при всех $\tau > 0$.

Замечание 2.2. Рассматривая уравнение Пуассона (см. (2.4))

$$\varphi_{ss} = \beta\widehat{R}r$$

как обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвестной функции φ с граничными условиями

$$\varphi(\tau,0) = \varphi(\tau,1) = 0,$$

без труда получаем (см. [2])

$$\varphi(\tau, s) = \beta \int\limits_0^1 g(s,\xi)\widehat{R}(\xi) r(\tau,\xi)\,d\xi \tag{2.15}$$

и

$$Q(\tau, s) = \varphi_s(\tau, s) = \beta \int\limits_0^s \widehat{R}(\xi) r(\tau,\xi)\,d\xi - \beta \int\limits_0^1 (1-\xi)\widehat{R}(\xi) r(\tau,\xi)\,d\xi. \tag{2.16}$$

Здесь $g(s,\xi)$ — функция Грина:

$$g(s,\xi) = \begin{cases} \xi(s-1) & \text{при } 0 < \xi \le s, \\ s(\xi - 1) & \text{при } s < \xi < 1. \end{cases}$$

Понятно, что функции φ, Q, определяемые формулами (2.15), (2.16), удовлетворяют условиям (2.4).

Замечание 2.3. Из (2.13) выводим априорную оценку

$$I^{(1)}(\tau) \le I^{(1)}(0), \quad \tau > 0. \tag{2.17}$$

Дифференцируя систему (2.11) еще раз по τ, в итоге получим оценку вида

$$I^{(2)}(\tau) \le I^{(2)}(0), \quad \tau > 0 \quad \text{и т. д.} \tag{2.18}$$

Здесь

$$I^{(2)}(\tau) = \|U_{\tau\tau}(\tau)\|_A^2 + \varepsilon^2 \int\limits_0^1 Q_{\tau\tau}^2(\tau,\xi)\,d\xi.$$

Замечание 2.4. Линеаризуя энтропийный закон (1.17), будем иметь дополнительное соотношение:

$$\left(\vartheta - \frac{2}{3} r\right)_\tau - \frac{2}{3}\widehat{\varphi}' u + \nu\vartheta = 0, \tag{2.19}$$

которое, как и следовало ожидать, является следствием из системы (2.1) (из третьего уравнения системы (2.1) надо вычесть ее первое уравнение).

Замечание 2.5. Будем говорить, что тривиальное решение линейной задачи (2.1)–(2.3) *асимптотически устойчиво*, если при любых начальных данных $U_0(s)$, принадлежащих некоторому пространству Соболева, решение $U(\tau, s)$ стремится к нулю при $\tau \to \infty$ (также в некотором пространстве Соболева).

§ 3. Вспомогательная смешанная задача

В этом параграфе сформулируем вспомогательную смешанную задачу, которая будет существенно использована при получении в следующем параграфе необходимой априорной оценки. Введем в рассмотрение потенциал (не путать с электрическим потенциалом φ!) $H = H(\tau, s)$ такой, что

$$\widehat{R} u = H_\tau, \quad \widehat{R} r = -H_s. \tag{3.1}$$

Понятно, что тогда первое уравнение системы (2.1) выполнено автоматически. Из двух первых граничных условий (2.3) следует, что

$$H_s(\tau, 0) = H_s(\tau, 1) = 0. \tag{3.2}$$

Перепишем теперь второе уравнение системы (2.1) сначала так:

$$(\widehat{R}u)_\tau + (\widehat{R}r)_s + (\widehat{R}\vartheta)_s - \widehat{\varphi}'\widehat{R}r + \mu\widehat{R}u = \widehat{R}Q,$$

а затем, используя соотношения (3.1), в следующем виде:

$$H_{\tau\tau} - H_{ss} + \mu H_\tau + \widehat{\varphi}' H_s + (\widehat{R}\vartheta)_s = \widehat{R}Q. \qquad (3.3)$$

Уравнение (2.2) с учетом (3.1) примет вид

$$\left(\varepsilon^2 Q + H - \int_0^1 H\,d\xi\right)_\tau = 0,$$

т. е.

$$\varepsilon^2 Q + H - \int_0^1 H\,d\xi = A_0(s),$$

где $A_0(s)$ — произвольная функция. Но, с другой стороны, с учетом условий (2.4) получаем

$$\varepsilon^2 Q_s = \widehat{R}r, \quad \text{т. е. } A_0'(s) = 0 \text{ и } A_0 = \mathrm{const}; \quad \int_0^1 Q\,d\xi = 0, \quad \text{т. е. } A_0 = 0.$$

Итак,

$$Q = \beta\left(\int_0^1 H\,d\xi - H\right) = \beta h(\tau, s). \qquad (3.4)$$

Введем теперь в рассмотрение оператор $d = \frac{\partial}{\partial\tau} + \nu$. Тогда третье уравнение системы (2.1) можно переписать с учетом (3.1):

$$d(\widehat{R}\vartheta) = -\frac{2}{3}H_{\tau s} + \frac{2}{3}\widehat{\varphi}' H_\tau. \qquad (3.5)$$

Подействуем на уравнение (3.3) оператором d. Принимая во внимание (3.4), (3.5), получим

$$\mathscr{L}_{\tau\tau} - \mathscr{L}_{ss} + \mu\mathscr{L}_\tau + \widehat{\varphi}'\mathscr{L}_s - \frac{2}{3}H_{\tau ss} + \frac{2}{3}(\widehat{\varphi}' H_\tau)_s + \beta\widehat{R}\mathscr{L} = \beta\widehat{R}\int_0^1 \mathscr{L}\,d\xi. \qquad (3.6)$$

Здесь $\mathscr{L} = dH$. Граничные условия для уравнения (3.6) получаются из (3.2) и выглядят так:

$$\mathscr{L}_s(\tau, 0) = \mathscr{L}_s(\tau, 1) = 0. \qquad (3.7)$$

Смешанная задача (3.6), (3.7) (или (3.2)) называется вспомогательной.

Далее, нам понадобится также уравнение, получаемое из (3.6) дифференцированием последнего по s:

$$\mathscr{G}_{\tau\tau} - \mathscr{G}_{ss} + \mu\mathscr{G}_\tau + \widehat{\varphi}'\mathscr{G}_s + \widehat{\varphi}''\mathscr{G} - \frac{2}{3}H_{\tau sss} + \frac{2}{3}(\widehat{\varphi}' H_\tau)_{ss} + \beta\widehat{R}\mathscr{G} = \beta\widehat{R}'\ell, \qquad (3.8)$$

где

$$\mathscr{G} = \mathscr{L}_s, \quad \ell = \ell(\tau, s) = \int_0^1 \mathscr{L}\,d\xi - \mathscr{L}.$$

Замечание 3.1. Из (3.1) следует, что при определении потенциала H допускается константный произвол. Начальное условие $H_0(s) = H(0,s)$ можно определить из соотношения

$$H_0' = -\widehat{R}(s)r_0(s),$$

причем, учитывая упомянутый выше произвол, определим функцию

$$H_0(s) = -\int\limits_0^s \widehat{R}(\xi)r_0(\xi)\,d\xi. \tag{3.9}$$

Заметим, что при этом $H_0(0) = 0$.

Замечание 3.2. Рассматривая (3.5) как обыкновенное дифференциальное уравнение для $\widehat{R}\vartheta$, можно записать его решение в следующем виде (переменная s выступает как параметр):

$$\begin{aligned}\widehat{R}(s)\vartheta(\tau,s) = e^{-\nu\tau}\left[\widehat{R}(s)\vartheta_0(s) - \frac{2}{3}\widehat{R}(s)r_0(s) - \frac{2}{3}\widehat{\varphi}'(s)H_0(s)\right]_\tau \\ + \frac{2}{3}\widehat{\varphi}'(s)\left[H(\tau,s) - \nu\int\limits_0^\tau e^{-\nu(\tau-\zeta)}H(\zeta,s)\,d\zeta\right] \\ - \frac{2}{3}\left[H_s(\tau,s) - \nu\int\limits_0^\tau e^{-\nu(\tau-\zeta)}H_s(\zeta,s)\,d\zeta\right],\end{aligned} \tag{3.10}$$

где $r_0(s)$, $\vartheta_0(s)$ — начальные условия.

Замечание 3.3. Заметим, что агрегат h (см. (3.4)) можно переписать так:

$$\begin{aligned}h(\tau,s) &= \int\limits_0^1 H(\tau,\xi)\,d\xi - H(\tau,s) \\ &= \int\limits_0^1 [H(\tau,\xi) - H(\tau,s)]\,d\xi = \int\limits_0^1\left[\int\limits_s^\xi H_z(\tau,z)\,dz\right]d\xi.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Аналогично

$$\ell(\tau,s) = \int\limits_0^1\left[\int\limits_s^\xi \mathscr{G}(\tau,z)\,dz\right]d\xi. \tag{3.12}$$

§ 4. Получение априорной оценки

Приступим теперь к получению нужной нам априорной оценки. С этой целью умножим (3.8) на $2\mathscr{G}_\tau$ и проинтегрируем полученное выражение по s от 0 до 1 (учитывая граничные условия (3.2)):

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left\{\int\limits_0^1\left[\mathscr{G}_\tau^2 + \mathscr{G}_s^2 + \frac{2}{3}H_{\tau ss}^2 + \beta(2\widehat{R} - \rho)\mathscr{G}^2\right]d\xi\right\} \\ + 2\int\limits_0^1\left[\mu\mathscr{G}_\tau^2 + \widehat{\varphi}'\mathscr{G}_\tau\mathscr{G}_s + \frac{2\nu}{3}H_{\tau ss}^2 + \frac{2}{3}\mathscr{G}_\tau(\widehat{\varphi}'H_\tau)_{ss}\right]d\xi = 2\beta\int\limits_0^1 \widehat{R}'\mathscr{G}_\tau\ell\,d\xi.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Аналогично, умножая (3.8) на $2\mathscr{G}$ и интегрируя затем полученное выражение по s от 0 до 1, имеем

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\int\limits_0^1\left[2\mathscr{G}\mathscr{G}_\tau+\mu\mathscr{G}^2+\frac{2\nu}{3}H_{ss}^2\right]d\xi\right\}+2\int\limits_0^1\left[-\mathscr{G}_\tau^2+\mathscr{G}_s^2+\widehat{\varphi}'\mathscr{G}\mathscr{G}_s\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}H_{\tau ss}^2+\frac{2}{3}\mathscr{G}(\widehat{\varphi}'H_\tau)_{ss}+\beta(2\widehat{R}-\rho)\mathscr{G}^2\right]d\xi=2\beta\int\limits_0^1\widehat{R}'\mathscr{G}\ell\,d\xi. \quad (4.2)$$

Теперь обратимся к уравнению (3.6). Умножим уравнение (3.6) на $2\mathscr{L}_\tau$ и проинтегрируем полученное выражение по s от 0 до 1 (естественно, учитывая граничные условия (3.2)):

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\int\limits_0^1\left[\mathscr{L}_\tau^2+\mathscr{L}_s^2+\frac{2}{3}H_{\tau s}^2\right]d\xi\right\}+$$
$$+2\int\limits_0^1\left[\mu\mathscr{L}_\tau^2+\widehat{\varphi}'\mathscr{L}_\tau\mathscr{L}_s+\frac{2\nu}{3}H_{\tau s}^2+\frac{2}{3}\mathscr{L}_\tau(\widehat{\varphi}'H_\tau)_s\right]d\xi=2\beta\int\limits_0^1\widehat{R}\mathscr{L}_\tau\ell\,d\xi. \quad (4.3)$$

Наконец, из тривиального следствия

$$d(H_\tau)=\mathscr{L}_\tau$$

вытекает

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\int\limits_0^1 H_\tau^2\,d\xi\right\}+2\nu\int\limits_0^1 H_\tau^2\,d\xi=2\int\limits_0^1 H_\tau\mathscr{L}_\tau\,d\xi. \quad (4.4)$$

Сложив (4.1)–(4.4), получим выражение

$$\frac{d}{d\tau}J^{(0)}+J^{(1)}=2\beta\int\limits_0^1\widehat{R}'\mathscr{G}_\tau\ell\,d\xi+2\beta\int\limits_0^1\widehat{R}'\mathscr{G}\ell\,d\xi+2\beta\int\limits_0^1\widehat{R}\mathscr{L}_\tau\ell\,d\xi+2\int\limits_0^1 H_\tau\mathscr{L}_\tau\,d\xi$$
$$\le 2\beta\left(\int\limits_0^1(\widehat{R}')^2\,d\xi\right)^{\frac12}\left(\int\limits_0^1\mathscr{G}_\tau^2\,d\xi\right)^{\frac12}\left(\int\limits_0^1\mathscr{G}^2\,d\xi\right)^{\frac12}+2\beta\left(\int\limits_0^1(\widehat{R}')^2\,d\xi\right)^{\frac12}\int\limits_0^1\mathscr{G}^2\,d\xi$$
$$+2\beta\left(\int\limits_0^1\widehat{R}^2\,d\xi\right)^{\frac12}\left(\int\limits_0^1\mathscr{L}_\tau^2\,d\xi\right)^{\frac12}\left(\int\limits_0^1\mathscr{G}^2\,d\xi\right)^{\frac12}+\int\limits_0^1 H_\tau^2\,d\xi+\int\limits_0^1\mathscr{L}_\tau^2\,d\xi. \quad (4.5)$$

Отметим, что в (4.5) использованы неравенства Гёльдера и Коши. При этом мы также использовали формулу (3.12). Кроме того, в (4.5)

$$J^{(0)}=\int\limits_0^1\left[\mathscr{G}_\tau^2+\mathscr{G}_s^2+\frac{2}{3}H_{\tau ss}^2+(\beta(2\widehat{R}-\rho)+\mu)\mathscr{G}^2\right.$$
$$\left.+2\mathscr{G}\mathscr{G}_\tau+\frac{2\nu}{3}H_{ss}^2+\mathscr{L}_\tau^2+\mathscr{G}^2+\frac{2}{3}H_{\tau s}^2+H_\tau^2\right]d\xi,$$

$$J^{(1)} = 2\int\limits_0^1 \Big[\mu\mathscr{G}_\tau^2 + \widehat{\varphi}'\mathscr{G}_\tau\mathscr{G}_s + \frac{2\nu}{3}H_{\tau ss}^2 + \frac{2}{3}\mathscr{G}_\tau(\widehat{\varphi}'H_\tau)_{ss} + \mathscr{G}_s^2 - \mathscr{G}_\tau^2$$

$$+ \widehat{\varphi}'\mathscr{G}\mathscr{G}_s + \frac{2}{3}H_{\tau ss}^2 + \frac{2}{3}(\widehat{\varphi}'H_\tau)_{ss}\mathscr{G} + \beta(2\widehat{R}-\rho)\mathscr{G}^2 + \mu\mathscr{L}_\tau^2 + \widehat{\varphi}'\mathscr{L}_\tau\mathscr{G}$$

$$+ \frac{2\nu}{3}H_{\tau s}^2 + \frac{2}{3}\mathscr{L}_\tau(\widehat{\varphi}'H_\tau)_s + \nu H_\tau^2\Big]\,d\xi.$$

С учетом оценки правой части перепишем (4.5) в виде следующего неравенства:

$$\frac{d}{d\tau}J^{(0)} + J^{(2)} \le 0, \tag{4.6}$$

где

$$J^{(2)} = J^{(1)} - \beta\left(\int\limits_0^1 (\widehat{R}')^2\,d\xi\right)^{\frac12}\varepsilon_1\int\limits_0^1 \mathscr{G}^2\,d\xi - \beta\left(\int\limits_0^1 (\widehat{R}')^2\,d\xi\right)^{\frac12}\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_0^1 \mathscr{G}_\tau^2\,d\xi$$

$$- 2\beta\left(\int\limits_0^1 (\widehat{R}')^2\,d\xi\right)^{\frac12}\int\limits_0^1 \mathscr{G}^2\,d\xi - \beta\left(\int\limits_0^1 \widehat{R}^2\,d\xi\right)^{\frac12}\varepsilon_2\int\limits_0^1 \mathscr{G}^2\,d\xi$$

$$- \beta\left(\int\limits_0^1 \widehat{R}^2\,d\xi\right)^{\frac12}\frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_0^1 \mathscr{L}_\tau^2\,d\xi - \int\limits_0^1 H_\tau^2\,d\xi - \int\limits_0^1 \mathscr{L}_\tau^2\,d\xi.$$

При получении агрегата $J^{(2)}$ использовано неравенство Коши с ε_1, ε_2. Здесь ε_1, ε_2 — некоторые положительные постоянные.

Выражение, стоящее под знаком интеграла (см. агрегат $J^{(0)}$), является положительно определенной квадратичной формой от следующих переменных: H_τ, H_s, $H_{\tau\tau}$, $H_{\tau s}$, H_{ss}, $H_{\tau ss}$, $H_{\tau\tau s}$, если выбрать параметры μ, ν, β достаточно большими (что соответствует физической реальности, см. § 2 и [2]). Заметим также, что в силу (1.14)

$$2\widehat{R} - \rho = \rho$$

с большой точностью.

Что касается агрегата $J^{(2)}$, то выражение, стоящее под знаком интеграла является квадратичной формой от тех же самых переменных. Видно, что эта форма будет положительно определенной, если опять же μ, ν, β — достаточно большие параметры (причем μ, ν намного больше, чем β, что соответствует физической реальности) и

$$\rho(s) > \left(\int\limits_0^1 (\rho'(\xi))^2\,d\xi\right)^{\frac12}. \tag{4.7}$$

Неравенство (4.7) как раз является тем самым существенным ограничением на функцию $\rho(s)$, о котором мы говорили в первый раз в замечании 1.2.

При выполнении (4.7) существует такая постоянная $M_0 > 0$, что

$$J^{(2)} \ge M_0 J^{(0)}. \tag{4.8}$$

В силу (4.8) неравенство (4.6) можно переписать так:

$$\frac{d}{d\tau}J^{(0)} + M_0 J^{(0)} \le 0,$$

т. е.

$$J^{(0)}(\tau) \le e^{-M_0\tau}J^{(0)}(0). \tag{4.9}$$

Вспоминая соотношения (3.1), мы можем теперь неравенство (4.9) записать в виде

$$\int\limits_0^1 \big[u^2(\tau,s) + r^2(\tau,s) + u_\tau^2(\tau,s) + r_\tau^2(\tau,s) + u_s^2(\tau,s) + r_s^2(\tau,s) \\ + u_{\tau s}^2(\tau,s) + u_{ss}^2(\tau,s) + r_{\tau\tau}^2(\tau,s) + r_{\tau s}^2(\tau,s)\big]\, d\xi \le M_1 e^{-M_0\tau}\sigma^2. \tag{4.10}$$

Здесь $M_1(>0)$ — некоторая постоянная,

$$\sigma^2 = \|U_0\|^2_{W_2^2(0,1)} = \int\limits_0^1 \big[(U_0,U_0) + (U_0',U_0') + \big(U_0'',U_0''\big)\big]\, d\xi$$

— квадрат нормы вектора начальных данных

$$U_0(s) = U(0,s) = (r_0(s),\ u_0(s),\ \vartheta_0(s))^*$$

в пространстве Соболева $W_2^2(0,1)$. При получении неравенства (4.10) надо также учесть, что компоненты векторов $U_\tau(0,s)$, $U_{\tau\tau}(0,s)$ определяются в конечном итоге через компоненты векторов $U_0(s)$, $U_0'(s)$, $U_0''(s)$.

Замечание 4.1. Постоянные M_0, M_1 (как и другие положительные постоянные M_k, $k=2,\dots,8$, которые будут появляться у нас дальше) определяются в конечном итоге через постоянные μ, ν, β и функцию $\rho(s)$ и ее производные (вплоть до порядка 3).

Замечание 4.2. Теперь ясно, почему мы назвали задачу (3.6), (3.2) вспомогательной. Получив для нее оценку (4.9), мы затем «убрали» из полученной оценки вспомогательную функцию $H(\tau,s)$, вернувшись к зависимым переменным исходной задачи (2.1)–(2.3).

Имея на руках неравенство (4.10), сконструируем требуемую априорную оценку. Так, с помощью третьего уравнения системы (2.1) можно оценить ϑ, ϑ_τ, ϑ_s, $\vartheta_{\tau\tau}$, $\vartheta_{\tau s}$. Для примера покажем, как оценивается функция ϑ. Умножим третье уравнение системы (2.1) на 2ϑ и проинтегрируем полученное выражение по s от 0 до 1. В итоге имеем

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\int\limits_0^1 \vartheta^2\, d\xi\right\} + 2\nu\int\limits_0^1 \vartheta^2\, d\xi = -\frac{4}{3}\int\limits_0^1 \vartheta u_s\, d\xi \le \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \vartheta^2\, d\xi + \frac{2}{3}\int\limits_0^1 u_s^2\, d\xi.$$

Далее, используя оценку (4.10), получаем

$$\int\limits_0^1 \vartheta^2\, d\xi \le M_3 e^{-M_2\tau}\sigma^2. \tag{4.11}$$

причем $M_2 = \min\{M_0, 2(\nu - \frac{1}{3})\}$. Аналогично оцениваем ϑ_s. Производные ϑ_τ, $\vartheta_{\tau\tau}$, $\vartheta_{\tau s}$ оцениваются с помощью самого третьего уравнения системы (2.3). Например, из уравнения следует, что

$$\vartheta_\tau = -\nu\vartheta - \frac{2}{3}u_s \quad \text{и т. д.}$$

Итак,

$$\int_0^1 \left[\vartheta^2(\tau,s) + \vartheta_\tau^2(\tau,s) + \vartheta_s^2(\tau,s) + \vartheta_{\tau s}^2(\tau,s) + \vartheta_{\tau\tau}^2(\tau,s)\right] d\xi \le M_4 e^{-M_2\tau}\sigma^2. \quad (4.12)$$

Заметим также, что производная $u_{\tau\tau}$ оценивается с помощью второго уравнения системы (2.1), продифференцированного по τ.

Нам осталось показать, как оцениваются производные r_{ss}, ϑ_{ss}. С этой целью воспользуемся вторым уравнением системы (2.1), продифференцировав его по s:

$$r_{ss} + \vartheta_{ss} = -u_{\tau s} - (\widehat{\varphi}'\vartheta)_s - \mu u_s + \beta\widehat{R}r, \quad (4.13)$$

и дополнительным соотношением (2.19), которое после дифференцирования его дважды по s примет вид

$$\left(\vartheta_{ss} - \frac{2}{3}r_{ss}\right)_\tau + \frac{3}{5}\nu\left(\vartheta_{ss} - \frac{2}{3}r_{ss}\right) = \frac{2}{3}(\widehat{\varphi}'u)_{ss} + \frac{2}{5}\nu[u_{\tau s} + (\widehat{\varphi}'\vartheta)_s - \beta\widehat{R}r + \mu u_s]. \quad (4.14)$$

Тогда сначала из (4.14) получаем

$$\int_0^1 \left(\vartheta_{ss} - \frac{2}{3}r_{ss}\right)^2 d\xi \le M_6 e^{-M_5\tau}\sigma^2, \quad (4.15)$$

где $M_5 = \min\{M_2, \frac{3}{5}\nu\}$, а затем из (4.15), (4.13) имеем

$$\int_0^1 \left[r_{ss}^2(\tau,s) + \vartheta_{ss}^2(\tau,s)\right] d\xi \le M_7 e^{-M_5\tau}\sigma^2. \quad (4.16)$$

Объединяя оценки (4.10)–(4.12), (4.16), в конце концов, можем выписать нужную нам априорную оценку:

$$\int_0^1 [(U,U) + (U_\tau,U_\tau) + (U_s,U_s) + (U_{\tau\tau},U_{\tau\tau}) + (U_{\tau s},U_{\tau s}) + (U_{ss},U_{ss})]\, d\xi$$
$$\le M_8 e^{-M_5\tau}\sigma^2, \quad \tau > 0. \quad (4.17)$$

Из оценки (4.17) следует, что

$$U(\tau,s) \in W_2^2(0,1), \quad Q(\tau,s) \in W_2^3(0,1), \quad \varphi(\tau,s) \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(0,1)$$

при всех $\tau > 0$. Из нее же вытекает (см. замечание 2.5) асимптотическая устойчивость (по Ляпунову) состояния равновесия в линейном приближении.

Замечание 4.3. Точнее, $r(\tau,s), \vartheta(\tau,s) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,1)$. Кроме того,

$$\|U(\tau)\|^2_{W_2^2(0,1)} \le M_8 e^{-M_5\tau}\sigma^2, \quad \tau > 0,$$

что и означает (см. замечание 2.5) асимптотическую устойчивость (по Ляпунову) тривиального решения смешанной задачи (2.1)–(2.3). Напомним, что

$$\|U(\tau)\|^2_{W_2^2(0,1)} = \int_0^1 [(U,U) + (U_s,U_s) + (U_{ss},U_{ss})]\, d\xi.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anile A. M., Muscato O.* Improved hydrodynamical model for carrier transport in semiconductors // Phys. Rev. B. 1997. V. 51, N 23. P. 16728–16740.

2. *Блохин А. М., Иорданиди А. А., Меражов И. З.* Численное исследование одной газодинамической модели переноса заряда в полупроводниках. Новосибирск, 1996. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики № 33).

3. *Gardner C. L., Jerome J. W., Rose D. J.* Numerical methods for hydrodynamic device model: subsonic flow // IEEE Trans. Computer-aided Design. 1989. V. 8, N 5. P. 501–507.

4. *Gardner C. L.* Numerical simulation of a steady-state electron shock wave in a submicrometer semiconductor device // IEEE Trans. Electron Devices. 1991. V. 38, N 2. P. 392–398.

5. *Блохин А. М.* Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986.

6. *Блохин А. М.* Элементы теории гиперболических систем и уравнений. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1995.

Статья поступила 17 октября 1997 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск
blokhin@math.nsc.ru, bush@math.nsc.ru