Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 512.55

ОБ ИНВАРИАНТАХ ДЕЙСТВИЯ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ НА СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЕ ЛИ

В. М. Петроградский

Аннотация: Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем характеристики нуль и конечная группа $G \subset \mathrm{GL}(V)$ действует на свободной алгебре Ли $L = L(V)$. Пусть Y — свободное порождающее множество для подалгебры инвариантов $H = L^G$. Найдена точная формула для производящей функции $\mathscr{H}(Y,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$, где Y_n — множество элементов степени n из Y. Получена асимптотика для $|Y_n|$. Библиогр. 14.

Напомним ситуацию в ассоциативном случае. Пусть $A = K\langle V\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра, порожденная базисом конечномерного векторного пространства V, и G — конечная подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$; поле произвольно. Действие группы продолжается на всю алгебру A. В отличие от произвольной подалгебры подалгебра инвариантов $K\langle V\rangle^G$ всегда свободна [1], причем подалгебра инвариантов конечно порождена тогда и только тогда, когда G действует скалярами [2, 3].

Перейдем к изучению инвариантов свободной алгебры Ли. Пусть $L = L(V)$ — свободная алгебра Ли, порожденная базисом конечномерного векторного пространства $V = \langle x_1, \dots, x_m\rangle_K$. Предположим, что G — конечная подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$; она естественным образом действует на всей алгебре Ли L. Рассмотрим подалгебру инвариантов $H = L^G = \{x \in L \mid g\cdot x = x,\ g \in G\}$. По теореме Ширшова — Витта любая подалгебра в свободной алгебре Ли свободна [4, 5]. Если $|G|$ обратим в K, то подалгебра инвариантов бесконечно порождена, это следствие более общего результата Дренски [6]. Наша цель состоит в более точном описании бесконечного порождающего множества подалгебры инвариантов в терминах производящих функций.

§ 1. Производящие функции и подалгебры инвариантов

Пусть K — основное поле. Нам понадобятся некоторые факты о модулях над группой $\mathrm{GL}_m(K)$. Предположим, что $W = W(x_1, \dots, x_m)$ — свободная алгебра некоторого (ассоциативного или лиева) многообразия, W является полиоднородной алгеброй. О многообразиях алгебр Ли см. монографию [7]. Введем по отношению к переменным $x_1, \dots, x_m$ полистепень $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_i \ge 0$;

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98–01–01020). программы «Университеты России» (грант 1357), гранта Министерства образования России.

обозначим $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$. Возникают компоненты для градуировки степенью W_n и полистепенью W_α, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Если $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n \subset W$ — однородное подпространство, то для него возникает ряд Гильберта — Пуанкаре $\mathscr{H}(V,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim V_n t^n$.

Действие группы $\mathrm{GL}_m(K)$ на векторном пространстве $V = \langle x_1, \ldots, x_m\rangle_K$ продолжается до автоморфизмов алгебры W, при этом каждая однородная компонента W_n является $\mathrm{GL}_m(K)$-подмодулем. Рассмотрим характер этого модуля [8]:

$$\chi(W_n, t_1, \ldots, t_m) = \sum_{|\alpha|=n} \dim W_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} t_1^{\alpha_1} \cdots t_m^{\alpha_m}.$$

Он является однородной симметрической функцией переменных $t_1, \ldots, t_m$ степени n. Если $g \in \mathrm{GL}_m(K)$ имеет характеристические корни $\xi_1, \ldots, \xi_m$, то на W_n он имеет следующий след [8]:

$$\mathrm{tr}_{W_n}(g) = \chi(W_n, \xi_1, \ldots, \xi_m).$$

Чтобы изучить всю алгебру W, рассматривают ряд Гильберта — Пуанкаре, заданный градуировкой полистепенью [9, 6] (в [10] изучены также немного другие ряды):

$$\mathscr{H}(W, t_1, \ldots, t_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi(W_n, t_1, \ldots, t_m).$$

Пусть $g \in \mathrm{GL}_m(K)$ имеет характеристические корни $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Тогда для изучения «следа» на W рассматривают ряд [6]

$$\chi_W(g,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{tr}_{W_n}(g) t^n = \mathscr{H}(W, \xi_1 t, \ldots, \xi_m t). \tag{1}$$

Следующее утверждение является аналогом классической формулы Молина об инвариантах действия конечной группы на кольце многочленов. Рассмотрим подалгебру инвариантов $W^G = \{w \in W \mid g \cdot w = w,\ g \in G\}$. Очевидно, она является градуированной $W^G = \bigoplus_{n=0}^{\infty} W_n^G$. Возьмем соответствующий ряд $\mathscr{H}(W^G, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_K W_n^G t^n$.

Лемма 1 [9]. *Пусть $\operatorname{char} K = 0$, $W = W(x_1, \ldots, x_m)$ — свободная алгебра некоторого многообразия и G — конечная подгруппа в $\mathrm{GL}_m(K)$. Тогда подалгебра инвариантов имеет следующий ряд Гильберта — Пуанкаре:*

$$\mathscr{H}(W^G, t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_W(g,t).$$

Перейдем к изучению инвариантов свободной алгебры Ли. Через $\mu(n)$ и $\Gamma(x)$ обозначаем функцию Мёбиуса и гамма-функцию.

Лемма 2. *Пусть $L = L(X)$, $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, — свободная алгебра Ли. Рассмотрим ряд Гильберта — Пуанкаре $\mathscr{H}(L, t_1, \ldots, t_m)$, заданный градуировкой полистепенью. Тогда*

$$\mathscr{H}(L, t_1, \ldots, t_m) = -\sum_{a=1}^{\infty} \frac{\mu(a)}{a} \ln(1 - t_1^a - \cdots - t_m^a).$$

Доказательство. Обозначим через $\Psi(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ размерность компоненты полистепени $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ в $L(X)$. Имеет место аналог формулы Витта [11, 2.8]:

$$\Psi(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=\frac{1}{|\alpha|}\sum_{q|\alpha_i}\mu(q)\frac{(|\alpha|/q)!}{(\alpha_1/q)!\cdots(\alpha_m/q)!}.$$

Получаем

$$\mathscr{H}(L,t_1,\dots,t_m)=\sum_{\alpha_i\ge 0}\Psi(\alpha_1,\dots,\alpha_m)t_1^{\alpha_1}\cdots t_m^{\alpha_m}=\sum_{\alpha_i\ge 0}\sum_{q|\alpha_i}\frac{\mu(q)}{|\alpha|}\frac{(|\alpha|/q)!t_1^{\alpha_1}\cdots t_m^{\alpha_m}}{(\alpha_1/q)!\cdots(\alpha_m/q)!}$$

положим $(\alpha_i/q=\beta_i, |\alpha|/q=n)$

$$=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\beta_1+\dots+\beta_m=n}\frac{n!}{\beta_1!\cdots\beta_m!}\big(t_1^q\big)^{\beta_1}\cdots\big(t_m^q\big)^{\beta_m}$$

$$=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big(t_1^q+\dots+t_m^q\big)^n=-\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)}{q}\ln\big(1-\big(t_1^q+\dots+t_m^q\big)\big).$$

Последний ряд абсолютно сходится при $|t_i|<1/m$, $i=1,\dots,m$, поэтому все преобразования законны.

Следствие 1. *Пусть* $L=L(X)$, $X=\{x_1,\dots,x_m\}$, — *свободная алгебра Ли и* $g\in\mathrm{GL}_m(K)$ *естественно действует на* L. *Тогда*

$$\chi_{L(X)}(g,t)=-\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\mu(a)}{a}\ln(1-\operatorname{tr}(g^a)t^a).$$

Доказательство. Предположим, что g имеет характеристические корни $\xi_1,\dots,\xi_m$; используем (1):

$$\chi_{L(X)}(g,t)=\mathscr{H}(L,\xi_1t,\dots,\xi_mt)=-\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\mu(a)}{a}\ln\big(1-\big(\xi_1^a+\dots+\xi_m^a\big)t^a\big)$$

$$=-\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\mu(a)}{a}\ln(1-\operatorname{tr}(g^a)t^a).$$

Пусть X — не более чем счетное множество с весовой функцией $\mathrm{wt}:X\to\mathbb{N}$ такое, что

$$X=\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i,\quad X_i=\{x\in X\mid \mathrm{wt}\,x=i\};\quad |X_i|<\infty,\ i\in\mathbb{N}.$$

Мы назовем такое множество *конечно-градуированным.* Для произвольного монома $y=x_{i_1}\dots x_{i_n}$, $x_{i_j}\in X$, полагаем $\mathrm{wt}\,y=\mathrm{wt}\,x_{i_1}+\dots+\mathrm{wt}\,x_{i_n}$. Если Y — множество однородных мономов (относительно wt), то рассматриваем ряд Гильберта — Пуанкаре

$$\mathscr{H}(Y,t)=\mathscr{H}_X(Y,t)=\sum_{i=1}^{\infty}|Y_i|t^i;\quad Y_i=\{y\in Y\mid \mathrm{wt}\,y=i\},\ i\in\mathbb{N}.$$

Если $A = A(X)$ — некоторая алгебра, порожденная конечно-градуированным множеством, то аналогично определяется ряд для однородного подпространства $V \subset A$. Для свободной ассоциативной алгебры $K\langle X\rangle$ имеем

$$\mathscr{H}(K\langle X\rangle, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}\big(\langle X\rangle_K^{\otimes n}, t\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}(X,t)^n = \frac{1}{1-\mathscr{H}(X,t)}. \tag{2}$$

Рассмотрим следующий оператор $\mathscr{E}$ на степенных рядах $\phi(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n t^n$, $b_n \in \{0,1,2,\dots\}$:

$$\mathscr{E} : \phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n \mapsto \mathscr{E}(\phi(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-t^n)^{b_n}}. \tag{3}$$

Лемма 3. *Оператор $\mathscr{E}$ обладает следующими свойствами:*
1) $\mathscr{E}(\phi_1(t)+\phi_2(t)) = \mathscr{E}(\phi_1(t)) \cdot \mathscr{E}(\phi_2(t))$ (*мультипликативность*),
2) $\mathscr{E}(\phi(t)) = \exp\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\phi(t^m)\right)$.

Доказательство. Первое свойство очевидно. Докажем второе:

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(\phi(t)) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} -b_n \ln(1-t^n)\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{nm}}{m}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (t^m)^n\right) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\phi(t^m)\right).\end{aligned}$$

Оператор $\mathscr{E}$ играет важную роль при изучении роста в алгебрах Ли [12] в силу следующего хорошо известного факта [13]. Пусть алгебра Ли L порождена множеством X и $U(L)$ — ее универсальная обертывающая алгебра. Тогда

$$\mathscr{H}_X(U(L), t) = \mathscr{E}(\mathscr{H}_X(L,t)). \tag{4}$$

Лемма 4. *Пусть конечно-градуированное множество Y порождает свободную алгебру Ли H. Тогда*

$$\mathscr{H}(Y,t) = 1 - \frac{1}{\mathscr{E}(\mathscr{H}(H,t))}.$$

Доказательство. Универсальная обертывающая алгебра $U(H)$ является свободной ассоциативной алгеброй, порожденной множеством Y. В силу (2) и (4) получаем

$$\frac{1}{1-\mathscr{H}(Y,t)} = \mathscr{H}(U(H),t) = \mathscr{E}(\mathscr{H}(H,t)),$$

отсюда следует требуемое соотношение.

§ 2. Основной результат

Теорема. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем характеристики нуль и конечная группа $G \subset \mathrm{GL}(V)$ естественно действует на свободной алгебре Ли $L = L(V)$, порожденной базисом V; обозначаем $\chi(g) = \mathrm{tr}_V(g)$, $g \in G$. Предположим, что подалгебра инвариантов $H = L^G$ свободно порождена множеством $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, где Y_n — множество элементов степени n в Y, и $\mathscr{H}(Y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$ — производящая функция для Y. Тогда*

1) *имеет место равенство*

$$\mathscr{H}(Y,t) = 1 - \prod_{g \in G} \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n|G|]{\prod_{a|n} (1 - \chi(g^a) t^n)^{\mu(a)}};$$

2) *если $g \in G$ имеет порядок с разложением на простые множители $p_1^{c_1} \cdots p_k^{c_k}$, то во втором произведении можно ограничиться множителями для $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, $a_i \geq 0$;*

3) *$g = e$ дает один множитель $\sqrt[|G|]{1 - mt}$, где $m = \dim V$.*

Доказательство. Используем лемму 1 и следствие 1:

$$\mathscr{H}(L^G, t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_L(g,t) = -\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\mu(a)}{a} \ln(1 - \mathrm{tr}(g^a) t^a).$$

Далее применяем леммы 4 и 3:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}(Y,t) - 1 &= -\frac{1}{\mathscr{E}(\mathscr{H}(L^G,t))} = -\exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \mathscr{H}(L^G, t^j)\right) \\
&= -\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j|G|} \sum_{g \in G} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\mu(a)}{a} \ln(1 - \mathrm{tr}(g^a) t^{ja})\right) = (ja = n) \\
&= -\exp\left(\sum_{g \in G} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a|n} \frac{\mu(a)}{n|G|} \ln(1 - \mathrm{tr}(g^a) t^n)\right) \\
&= -\prod_{g \in G} \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{a|n} (1 - \chi(g^a) t^n)^{\mu(a)/(n|G|)}.
\end{aligned}$$

Утверждение 1 доказано.

Рассмотрим $g \in G$ порядка $P = p_1^{c_1} \cdots p_k^{c_k}$, и пусть $B = B(g) = \{g_1, \dots, g_l\}$ — порождающие циклической подгруппы, порожденной элементом g. Зафиксируем число n вида $n = n_0 n_1$, где $n_0 = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$, $(n_1, P) = 1$. Аналогично представим его делители в виде $a = a_0 a_1$, $a_0 | n_0$, $a_1 | n_1$. Заметим, что $\{g_1^{a_1}, \dots, g_l^{a_1}\} = B$. Произведение соответствующих множителей равно

$$\begin{aligned}
\prod_{g \in B} \prod_{a|n} (1 - \chi(g^a) t^n)^{\mu(a)} &= \prod_{a_1|n_1} \prod_{a_0|n_0} \prod_{g \in B} (1 - \chi((g^{a_1})^{a_0}) t^n)^{\mu(a_0)\mu(a_1)} \\
&= \Bigl(\prod_{a_0|n_0} \prod_{g \in B} (1 - \chi(g^{a_0}) t^n)^{\mu(a_0)}\Bigr)^{\sum\limits_{a_1|n_1} \mu(a_1)}.
\end{aligned}$$

Если $n_1 > 1$, то по свойству функции Мёбиуса $\sum_{a_1|n_1} \mu(a_1) = 0$. Заметим, что группа G является непересекающимся объединением множеств $B(g)$. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3 является частным случаем предыдущих рассуждений при $n_0 = 1$, $n_1 = n$, $a_0 = 1$, $a_1 = a$; нетривиальный множитель возникает только при $n = 1$.

Для изучения асимптотики докажем сначала одну техническую лемму.

Лемма 5. *Пусть для рядов*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

известно, что $a_n \approx An^q\lambda^n$, $n \to \infty$; $\lambda > 0$, $q \in \mathbb{R}$ *и радиус сходимости* $g(t)$ *больше* $1/\lambda$. *Тогда для коэффициентов функции*

$$f(t)g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

имеет место соотношение $c_n \approx a_n g(1/\lambda)$, $n \to \infty$.

Доказательство. Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$. Подберем n_0 такое, что $a_n = An^q\lambda^n(1+\alpha(n))$, $|\alpha(n)| < \varepsilon$, $n \geq n_0$. Тогда

$$\frac{a_{n-i}}{a_n} = \frac{(1-i/n)^q}{\lambda^i}(1+\beta(n,i)), \quad |\beta(n,i)| < 3\varepsilon; \quad n > n-i \geq n_0. \tag{5}$$

Подберем n_1 так, что

$$\left| g(1/\lambda) - \sum_{i=0}^{n} b_i/\lambda^i \right| < \varepsilon, \quad n \geq n_1. \tag{6}$$

Зафиксируем связь между переменными величинами $m = [\sqrt{n}\,]$ и преобразуем выражение $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i a_{n-i}$ к виду

$$\frac{c_n}{a_n} = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{a_{n-i}}{a_n} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{a_{n-i}}{a_n} + \sum_{i=m+1}^{n-n_0-1} b_i \frac{a_{n-i}}{a_n} + \sum_{i=n-n_0}^{n} b_i \frac{a_{n-i}}{a_n}. \tag{7}$$

Для оценки числителя в (5) подберем n_2 так, что $|(1-1/\sqrt{n})^q - 1| < \varepsilon$, $n \geq n_2$, а n_3 — так, что $n_3 \geq \max\{n_1^2, n_2\}$ и $n - \sqrt{n} \geq n_0$ при $n \geq n_3$. Используя (6) и (5), имеем

$$\begin{aligned} \left| g(1/\lambda) - \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{a_{n-i}}{a_n} \right| &\leq \left| g(1/\lambda) - \sum_{i=0}^{m} \frac{b_i}{\lambda^i} \right| + \sum_{i=0}^{m} \left| \frac{b_i}{\lambda^i} - b_i \frac{a_{n-i}}{a_n} \right| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i=0}^{m} \frac{|b_i|}{\lambda^i} |1 - (1-i/n)^q(1+\beta(n,i))| \leq \varepsilon + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|b_i|}{\lambda^i} 5\varepsilon = B\varepsilon, \quad n \geq n_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Возьмем μ такое, что $1/\lambda < 1/\mu$ и $1/\mu$ меньше радиуса сходимости $g(t)$. Тогда существует n_4 такое, что $|b_n| < \mu^n$, $n \geq n_4$. Из (5) получаем оценку $|a_{n-i}/a_n| \leq n^{|q|}/\lambda^i(1+3\varepsilon)$, $n - i \geq n_0$. Оценим второе слагаемое в (7) при $n \geq n_5 = \max\{n_3, n_4^2\}$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=m+1}^{n-n_0-1} b_i \frac{a_{n-i}}{a_n} \right| &\leq \sum_{i=m+1}^{n-n_0-1} \frac{\mu^i}{\lambda^i} n^{|q|}(1+3\varepsilon) \\ &\leq n^{|q|} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{m+1} \frac{(1+3\varepsilon)}{1-\mu/\lambda} \leq n^{|q|} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\sqrt{n}} C < \varepsilon \end{aligned} \tag{9}$$

при $n \geq n_6$ для подходящего n_6. Последнее слагаемое в (7) оценим так:

$$\left|\sum_{i=n-n_0}^{n} b_i \frac{a_{n-i}}{a_n}\right| \leq \sum_{i=n-n_0}^{n} \frac{\mu^i |a_{n-i}|}{An^q \lambda^n (1-\varepsilon)} \leq \frac{\mu^{n-n_0}}{\lambda^n n^q} \frac{\sum_{i=0}^{n_0} |a_i| \mu^{n_0-i}}{A(1-\varepsilon)} < \varepsilon \tag{10}$$

при $n \geq n_7$ для достаточно большого n_7. Положим $N = \max\{n_5, n_6, n_7\}$. Из соотношений (7)–(10) получаем $|c_n/a_n - g(1/\lambda)| < (B+2)\varepsilon$, $n \geq N$. В силу произвольности ε лемма доказана.

Следствие 2. *В обозначениях теоремы предположим, что* $|G| = s > 1$. *Пусть* $G_0 = \{g \in G \mid g = \lambda e,\ \lambda \in K\}$ *— подгруппа скалярных матриц и* $q = |G_0|$. *Тогда*

1) $L^G \subset \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_{qn}$, $|Y_n| = 0$ *для* $q \not| n$;

2) $|Y_{qn}| \approx C(G) \frac{m^{qn}}{n^{1+1/s}}$, $n \to \infty$, *где*

$$C(G) = \frac{C_0(G)}{s\Gamma(1-1/s)}, \quad C_0(G) = \underbrace{\prod_{g\in G} \prod_{n=1}^{\infty}}_{(g,n)\notin G_0\times 1} \sqrt[n|G|]{\prod_{a|n} \left(1 - \frac{\chi(g^a)}{m^n}\right)^{\mu(a)}},$$

и на n *наложены те же условия, что и в теореме, а также пропущены множители для* $g \in G_0$, $n = 1$.

3) *если* $\psi_m(n)$ *— размерность однородной компоненты степени* n *в свободной алгебре Ли ранга* m, *то* $|Y_{qn}|/\psi_m(qn) \approx qC(G)/\sqrt[|G|]{n}$, $n \to \infty$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что G_0 является подгруппой, лежащей в центре группы G. Имеем естественное вложение группы G_0 в мультипликативную группу поля K^*, следовательно, G_0 является циклической. Получаем $G_0 = \{e, \varepsilon e, \varepsilon^2 e, \dots, \varepsilon^{q-1} e\}$, где ε — примитивный корень степени q из единицы. Рассмотрим однородный элемент $x \in L_n$. Тогда $(\varepsilon e) \cdot x = \varepsilon^n x$, и если $x \in L^G$ то $q|n$; первое утверждение доказано.

Характер группы G есть сумма корней из единицы. Отсюда вытекает, что $|\chi(g)| < m = \dim V$ для $g \neq G_0$, и для $g = \varepsilon^i e \in G_0$ имеем $\chi(g) = \varepsilon^i m$. Поэтому радиус сходимости для произвольного множителя $(1 - \chi(g^a)t^n)^{\mu(a)/(ns)}$ равен $1/\sqrt[n]{|\chi(g^a)|} \geq 1/m$, причем равенство достигается только для $g \in G_0$, $n = 1$.

Рассмотрим случай $G_0 = \{e\}$. Найдем асимптотику для главного множителя $\sqrt[s]{1-mt}$. Используя формулу Эйлера — Гаусса для гамма-функции

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}, \quad \alpha > 0,$$

получаем

$$\sqrt[s]{1-mt} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n,$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1/s \cdot (1/s-1) \cdots (1/s-n+1)}{n!}(-m)^n \\ &= -\frac{m^n}{sn(n-1)} \frac{(1-1/s)\cdots((1-1/s)+n-2)}{1 \cdot 2 \cdots (n-2)} \\ &\approx -\frac{m^n (n-1)^{1-1/s}}{sn^2 \Gamma(1-1/s)} \approx -\frac{m^n}{n^{1+1/s} s\Gamma(1-1/s)}. \end{aligned}$$

В формуле для $\mathscr{H}(Y,t)$ произведение остальных множителей аналитично в круге радиуса большего $1/m$; применяя лемму 5, приходим к требуемой асимптотике.

Рассмотрим случай $G_0 \neq \{e\}$. По доказанному выше $\mathscr{H}(Y,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |Y_{nq}| t^{nq}$. Асимптотика определяется множителями для $g \in G_0$, $n=1$, их произведение равно $\sqrt[s]{(1-mt)(1-\varepsilon mt)\cdots(1-\varepsilon^{q-1}mt)} = \sqrt[s]{1-m^q t^q}$. Замена $u = t^q$ позволяет применить предыдущие рассуждения.

Последнее утверждение вытекает из полученной асимптотики и формулы Витта [7, 11] $\psi_m(n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{a|n} \mu(a) m^{n/a} \approx m^n/n$.

О другом аспекте асимптотического строения свободной алгебры Ли конечного ранга, а именно о кратностях неприводимых модулей, см. [14].

§ 3. Примеры

Проиллюстрируем на конкретных примерах, как выглядит ряд $\mathscr{H}(Y,t)$, и приведем результаты вычислений на компьютере. Несмотря на нагромождение радикалов, видим, что действительно получаются ряды с целыми коэффициентами.

Пример 1 (группа $G = Z_2 = \{e, a\}$ и ее представление, заданное характером $\chi(e) = m$, $\chi(a) = l$, где $l \in \{m, m-2, \dots, -m+2, -m\}$). В этом случае

$$\mathscr{H}(Y,t) = 1 - \sqrt{(1-mt)(1-lt)} \prod_{d=1}^{\infty} \sqrt[2^{d+1}]{\frac{1-lt^{2^d}}{1-mt^{2^d}}}.$$

Рассмотрим частный случай $m=2$, $l=0$. Получаем

$$\mathscr{H}(Y,t) = t + t^3 + 2t^5 + t^6 + 4t^7 + 3t^8 + 10t^9 + 11t^{10} + 26t^{11} + 35t^{12} + 75t^{13} + \dots,$$

$$|Y_n| \approx \frac{C_0(G)}{2\sqrt{\pi}} \frac{2^n}{n^{3/2}}, \quad n \to \infty; \quad C_0(G) \approx 1.21.$$

Для случая $m=2$, $l=-2$ имеем $G = G_0$ и

$$\mathscr{H}(Y,t) = t^2 + 3t^4 + 6t^6 + 18t^8 + 45t^{10} + 138t^{12} + 411t^{14} + \dots,$$

$$|Y_{2n}| \approx \frac{C_0(G)}{2\sqrt{\pi}} \frac{2^{2n}}{n^{3/2}}, \quad n \to \infty; \qquad C_0(G) \approx 1.36.$$

Пример 2 (группа $G = S_3$ и ее 2-мерное неприводимое представление). Это представление имеет следующий характер:

	1	3	2
g	e	(12)	(123)
$\chi(g)$	2	0	-1

В этом случае

$$\mathscr{H}(Y,t) = 1 - \sqrt[6]{(1-2t)(1+t)^2} \prod_{d=1}^{\infty} \sqrt[2^{d+1}]{\frac{1}{1-2t^{2^d}}} \sqrt[3^{d+1}]{\frac{1+t^{3^d}}{1-2t^{3^d}}}$$
$$= t^5 + t^6 + 3t^7 + 4t^8 + 9t^9 + 15t^{10} + 30t^{11} + 50t^{12} + 98t^{13} + \dots,$$

$$|Y_n| \approx \frac{C_0(G)}{6\Gamma(5/6)} \frac{2^n}{n^{7/6}}, \quad n \to \infty; \quad C_0(G) \approx 1.449.$$

Лемма 6. *Пусть циклическая группа Z_m циклически переставляет элементы $\{x_1, \dots, x_m\}$ и $m = p_1^{c_1} \cdots p_k^{c_k}$ — разложение на простые множители. Тогда*

$$\mathscr{H}(Y,t) = 1 - \prod_{s=0}^{k} \prod_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le k} \prod_{a_1,\dots,a_s=1}^{\infty} \left(1 - mt^{p_{i_1}^{a_1} \cdots p_{i_s}^{a_s}}\right)^{\frac{(1-p_{i_1})\cdots(1-p_{i_s})}{m p_{i_1}^{a_1} \cdots p_{i_s}^{a_s}}},$$

где случаю $s = 0$ соответствует множитель $\sqrt[m]{1 - mt}$.

Доказательство. Рассмотрим формулу для $\mathscr{H}(Y,t)$, где оставлены только n в соответствии со вторым утверждением теоремы. Согласно свойствам функции Мёбиуса рассматриваем только множители с $a = p_{i_1} \cdots p_{i_s}$, $1 \le i_1 < \dots < i_s \le k$. Так как $\chi(e) = m$, $\chi(g) = 0$, $g \ne e$, имеем $g^a = e$. Мы утверждаем, что g имеет порядок в точности a. Действительно, пусть порядок g меньше и не содержит некоторого множителя p_{i_j}, $j \in \{1, \dots, s\}$. Тогда по второму утверждению теоремы мы рассматриваем n и его делители без простого множителя p_{i_j}; противоречие. Число элементов $g \in G$ порядка a равно $(p_{i_1} - 1) \cdots (p_{i_s} - 1)$, кроме того, $\mu(a) = (-1)^s$, что и дает требуемый множитель для набора $i_1, \dots, i_s$ и всевозможных $n = p_{i_1}^{a_1} \cdots p_{i_s}^{a_s}$, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, s$. Для $s = 0$ множитель $\sqrt[m]{1 - mt}$ возникает по теореме; он формально подходит под общую формулу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харченко В. К.* Об алгебрах инвариантов свободных алгебр // Алгебра и логика. 1978. Т. 17, № 4. С. 478–487.
2. *Dicks W., Formanek E.* Poincare series and a problem of S. Montgomery // Linear and Multilinear Algebra. 1982. V. 12, N 1. P. 21–30.
3. *Kharchenko V. K.* Noncommutative invariants of finite groups and Noetherian varieties // J. Pure Appl. Algebra. 1984. V. 31. P. 83–90.
4. *Ширшов А. И.* Подалгебры свободных алгебр Ли // Мат. сб. 1953. Т. 33. С. 441–452.
5. *Witt E.* Die Unterringe der freien Lieschen Ringe // Math. Z. 1956. Bd. 64. S. 195–216.
6. *Drensky V.* Fixed algebras of residually nilpotent Lie algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120, N 4. P. 1021–1028..
7. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
8. *Macdonald I. G.* Symmetric functions and Hall polynomials. Oxford: Oxford Univ. Press, 1995.
9. *Formanek E.* Noncommutative invariant theory // Contemp. Math., Group actions on rings, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1985. V. 43. P. 87–119.
10. *Молев А. И. Цаленко Л. М.* Представления симметрической группы в свободной (супер) алгебре Ли и пространстве гармонических многочленов // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20, № 2. С. 76–77.
11. *Bakhturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V.* Infinite dimensional Lie superalgebras. Berlin: de Gruyter, 1992. (de Gruyter Exp. Math. V. 7).
12. *Petrogradsky V. M.* Growth of finitely generated polynilpotent Lie algebras and groups, generalized partitions, and functions analytic in the unit circle // Internat. J. Algebra Comput. 1999. V. 9, N 2. P. 179–212.
13. *Уфнаровский В. А.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М.:ВИНИТИ. 1989. Т. 57. С. 5–177. (Итоги науки и техники).
14. *Hong J. Kwon J. H.* Decomposition of free Lie algebras into irreducible components // J. Algebra. 1997. V. 197. P. 127–145.

Статья поступила 25 июня 1999 г.

г. Ульяновск
Ульяновский гос. университет
vmp@mmf.ulsu.ru