Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 512.554

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОЛЬЦА ЛИ $sl_2(\mathbf{Z})$ НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

А. Н. Гришков

Аннотация: Описана структура тензорного произведения неприводимых диагональных модулей над кольцом Ли $sl_2(\mathbf{Z})$, и вычислен индекс максимального полупростого подмодуля в этом произведении. Библиогр. 2.

1. Введение

Обозначим через $\mathscr{O}$ категорию конечномерных $sl_2(\mathbf{Z})$-модулей без кручения, а через S — кольцо Ли $sl_2(\mathbf{Z})$. Таким образом, $V \in \mathscr{O}$, если для $v \in V$, $n \in \mathbf{Z}$ имеем $nv = 0 \to n = 0$ или $v = 0$, более того, $\dim V = \dim_{\mathbf{Q}} V \otimes \mathbf{Q} < \infty$. S-модуль $V \in \mathscr{O}$ называется *неприводимым*, если $S \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$-модуль $V \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ неприводим над $sl_2(\mathbf{Q})$. Зафиксируем стандартный базис в кольце $S : \{e, h, f\}$ такой, что $eh = 2e$, $ef = h$, $fh = -2f$. Для каждого модуля $V \in \mathscr{O}$ обозначим через V_d подмодуль, порожденный множеством $\{v \in V \mid \exists i \in \mathbf{Z}, vh = iv\}$. S-модуль V называется *диагональным*, если $V = V_d$, и *полупростым*, если он разлагается в прямую сумму неприводимых. Очевидно, что каждый диагональный S-модуль содержит единственный максимальный полупростой подмодуль, который мы будем обозначать через V_s. В следующем предложении содержится полное описание неприводимых S-модулей.

Предложение 1 [2]. *Пусть $\alpha = (\alpha_n, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_{2-n})$ — вектор с целочисленными неотрицательными координатами такой, что $(i+1)(i-n)/\alpha_{n-2i} = \beta_{n-2i-2} \in \mathbf{Z}$. Обозначим через $V(\alpha)$ S-модуль с $\mathbf{Z}$-базисом $\{v_n, v_{n-2}, \dots, v_{-n}\}$ таким, что*

$$v_i h = i v_i, \quad v_i e = \beta_i v_{i+2}, \quad v_i f = \alpha_i v_{i-2}, \quad i = n,\ n-2, \dots, -n.$$

Тогда $V(\alpha)$ — неприводимый диагональный S-модуль. Более того, любой неприводимый диагональный S-модуль имеет такой вид для подходящего вектора $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$ и $V(\alpha) \simeq V(\gamma)$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \gamma$.

Диагональный S-модуль называется *экстремальным*, если для каждого диагонального S-модуля W такого, что $V \subseteq W$, имеем $V_s \neq W_s$. Обозначим через $\mathscr{E}\mathscr{D}$ множество всех диагональных экстремальных S-модулей. Основная проблема в теории диагональных S-модулей — описание структуры экстремальных модулей. Заметим, что включение $V \oplus W \in \mathscr{E}\mathscr{D}$ влечет $V \in \mathscr{E}\mathscr{D}$, $W \in \mathscr{E}\mathscr{D}$. Обратное утверждение неверно (в самом деле, если V, W — неприводимые S-модули такие, что $V, W \in \mathscr{E}\mathscr{D}$, то, как правило, $V \oplus W \notin \mathscr{E}\mathscr{D}$). S-модуль V будем называть *связным*, если $V \simeq W_s$ для некоторого неразложимого модуля $W \in \mathscr{E}\mathscr{D}$. Проблема описания связных S-модулей пока открыта. Отметим, что любой связный S-модуль полупрост, т. е. является прямой суммой неприводимых модулей. Скорее всего, верна следующая важная

Гипотеза 1. *Если $V, W \in \mathscr{E}\mathscr{D}$, то $V \otimes W \in \mathscr{E}\mathscr{D}$.*

2. Тензорное произведение неприводимых диагональных $sl_2(\mathbf{Z})$-модулей

В этом, основном, параграфе мы опишем структуру тензорного произведения $(V \otimes W)$ и вычислим индекс $|V \otimes W : (V \otimes W)_s|$ для диагональных неприводимых S-модулей V, W.

Пусть $V = V(\alpha)$, $W = W(\gamma)$ — неприводимые диагональные S-модули с базисами $\{v_n, v_{n-2}, \dots, v_{-n}\}$, $\{w_m, w_{m-2}, \dots, w_{-m}\}$ соответственно и S-действием:

$$v_i h = i v_i, \quad v_i e = \alpha_i v_{i+2}, \quad v_i f = \beta_i v_{i-2}, \quad i = n, n-2, \dots, -n,$$
$$w_i h = i w_i, \quad w_i e = \tau_i w_{i+2}, \quad w_i f = \gamma_i w_{i-2}, \quad i = m, m-2, \dots, -m,$$

причем

$$\alpha_{n-2i}\beta_{n-2i+2} = -i(n-i+1), \quad \tau_{m-2i}\gamma_{m-2i+2} = -i(m-i+1). \tag{1}$$

Предположим, что $n \le m$. Если $U = V \otimes W$, тогда $U_s \simeq \sum\limits_{k=0}^{m} \oplus U_k$, где U_k — неприводимый диагональный S-модуль и $\dim U_k = n + m - 2k + 1$ [1]. Обозначим через $\left\{u^k_{n+m-2k}, u^k_{n+m-2k-2}, \dots, u^k_{-n-m+2k}\right\}$ стандартный базис модуля U_{n+m-2k}. Тогда $u^k_{n+m-2k}e = 0$ и

$$u^k_{n+m-2k} = \sum_{i=0}^{k} x^k_i v_{n-2i} \otimes w_{m-2k+2i},$$

где $x^k_i \in \mathbf{Z}, x^k_0 > 0$, $\left(x^k_0, \dots, x^k_k\right) = 1$. Здесь $(X), X \subseteq \mathbf{Z}$ означает наибольший общий делитель чисел из X.

Аналогично

$$u^k_{2k-m-n} f = 0, \quad u^k_{2k-m-n} = \sum_{i=0}^{k} y^k_i v_{-n+2i} \otimes w_{-m-2i+2k},$$

где $y^k_0, \dots, y^k_k \in \mathbf{Z}$, $y^k_0 > 0$, причем $\left(y^k_0, \dots, y^k_k\right) = 1$. Заметим, что эти условия определяют числа $x^k_0, \dots, x^k_k$, $y^k_0, \dots, y^k_k$ однозначно. Для

$$u = \sum_{i=n, j=m}^{-n,-m} a_{i,j} v_i w_j \in U$$

положим

$$|u| = (\{a_{i,j} \mid i = n, \dots, -n, \ j = m, \dots, -m\}), \quad \|u\| = u/|u|.$$

Обозначим $a^k_i = u^k_{n+m-2k} f^i$, $b^k_i = u^k_{2k-m-n} e^i$, $k = 0, \dots, m$, $i = 0, \dots, n + m - 2k$. Ясно, что $u^k_{n+m-2i} = \left\|a^k_{i-k}\right\|$, $u^k_{2k-m-n} = \left\|b^k_{i-k}\right\|$.

Будем использовать следующие обозначения:

$$\alpha^p_i = \prod_{j=0}^{p-1} \alpha_{2i+2j-n}, \quad \beta^p_i = \prod_{j=0}^{p-1} \beta_{n-2i-2j}, \quad \tau^p_i = \prod_{j=0}^{p-1} \tau_{2i+2j-m}, \quad \gamma^p_i = \prod_{j=0}^{p-1} \gamma_{m-2i-2j}. \tag{2}$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 1. *Пусть V, W — диагональные неприводимые S-модули с базисами, определенными выше. Тогда $(V\otimes W)_s$ имеет базис*

$$\left\{\left\|a_j^i\right\| \mid i=0,\dots,m,\ j=0,\dots,n+m-2i\right\}$$

и

$$\begin{aligned}
&|V\otimes W:(V\otimes W)_s| \\
&\quad= \left(x_0^m\right)^{n-m+1}\prod_{q=1}^{m-1}\left(x_0^q\right)^{n-q+1}\prod_{q=1}^{m-1}\left(y_0^q\right)^{m-q}(m!)^{n-m+1}\prod_{q=1}^{m-1}(q!)^{n+m-2q+1} \\
&\quad\times\left(\alpha_m^m\right)^{n-m+1}\prod_{q=1}^{m-1}\left(\alpha_q^q\right)^{m-q+1}\prod_{q=1}^{m-1}\left(\beta_{n-q}^q\right)^{m-q}\prod_{q=0}^{n-m-2}\left(\beta_q^{m+1}\right)^{n-m-1-q} \\
&\quad\times\left(\prod_{q=1}^{n}\prod_{k=0}^{q}\left|u_k^q\right|^{-1}\right)\left(\prod_{q=0}^{m-1}\prod_{k=0}^{q}\left|b_k^q\right|^{-1}\right)\prod_{p=0}^{2m-2}(n+m-p)^{g(p)}, \qquad (3)
\end{aligned}$$

где

$$g(t)=\begin{cases}[(t+2)/2](n+m-3[t/2]-2+(-1)^t), & \text{если } 0\le t\le m-2,\\ g(2m-4-t)+n-m+1, & \text{если } m-1\le t\le 2m-4.\end{cases}$$

Здесь $[x]$ — целая часть числа x.

Доказательство. Если $U^p=\{u\in U\mid uh=pu\}$, $U_s^p=U_s\cap U^p$, то

$$U=\sum_{p=-n-m}^{n+m}\oplus U^p,\quad U_s=\sum_{p=-n-m}^{n+m}\oplus U_s^p.$$

Следовательно,

$$|V\otimes W:(V\otimes W)_s|=\prod_{p=-n-m}^{n+m}\left|U^p:U_s^p\right|. \qquad (4)$$

Заметим, что $U^p=U_s^p=0$, если $p\not\equiv n+m \pmod 2$. Зафиксируем $q\in\{1,\dots,m\}$. Тогда элементы $\left\{\left\|a_{q-k}^k\right\|,\ k=0,\dots,q\right\}$ образуют базис модуля U_s^q. Если $a_{q-k}^k=\sum\limits_{i=0}^{q}t_k^i v_{n-2i}\otimes w_{m+2i-2q}$, то

$$\left|U^q:U_s^q\right|=\triangle_q\prod_{k=0}^{q}\left|a_{q-k}^k\right|^{-1}, \qquad (5)$$

где $\triangle_q=\det\left\|t_k^i\right\|_{i,k=0}^q$. Из определения t_k^i следует, что

$$t_k^i=\sum_{j=0}^{i}x_j^k\binom{i-j}{p-k}\beta_j^{i-j}\gamma_{k-j}^{q-k-i+j}. \qquad (6)$$

Докажем равенство

$$\triangle_q=\triangle_{q-1}\left(\sum_{j=0}^{q}(-1)^j x_j^q\beta_j^{q-j}\gamma_{q-j}^j\right). \qquad (7)$$

Разложим определитель $\triangle_q$ по последнему столбцу, который имеет вид $\bigl(x_0^q, \dots, x_q^q\bigr)$. Тогда

$$\triangle_q = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j x_j^q \nabla_j. \tag{8}$$

Обозначим через $\overline{\mathbf{w}}_0, \dots, \overline{\mathbf{w}}_{q-1}$ столбцы определителя $\triangle_{q-1}$ и через $\bar{\mathbf{v}}_0, \dots, \bar{\mathbf{v}}_q$ столбцы определителя из $\triangle_q$ без последней строки:

$$\overline{\mathbf{w}}_i = \left(\binom{i}{q-1}\beta_i\gamma_{q-i-1}, \dots, \sum_{j=0}^{i} x_j^k \binom{i-j}{q-k-1}\beta_j^{i-j}\gamma_{k-j}^{q-k-i+j-1}, \dots, x_i^{q-1}\right).$$

Зафиксируем $0 \le i \le q$ и будем делать линейные преобразования со столбцами определителя ∇_i. Обозначим через $\nabla_i^{(j)}$ определитель ∇_i, полученный заменой первых $j+1$ столбцов в определителе ∇_i следующими: $\overline{\mathbf{w}}_0, \dots, \overline{\mathbf{w}}_j$. Заметим, что $\bar{\mathbf{v}}_0 = \gamma_{m-2p+2}\overline{\mathbf{w}}_0$. Следовательно, $\nabla_i = \gamma_{m-2q+2}\nabla_i^{(0)}$. Предположим по индукции, что уже доказаны равенства $\nabla_i = \gamma_{q-j}^j \nabla_i^{(j-1)}$ для $0 \le j < i-1$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}}_j - \beta_{n-2j+2}\overline{\mathbf{w}}_{j-1} = \Biggl(\dots, &\sum_{l=0}^{j} x_l^k \binom{j-l}{q-k}\beta_l^{j-l}\gamma_{k-l}^{q-k-j+l} \\ &-\beta_{n-2j+2}\left(\sum_{l=0}^{j-1} x_l^k \binom{j-l-1}{q-k-1}\beta_l^{j-l-1}\gamma_{k-l}^{q-k-j+l}\right), \dots\Biggr).\end{aligned}$$

Так как $\beta_{n-2j+2}\beta_l^{j-l-1} = \beta_{n-2l}\dots\beta_{n-2j+4}\beta_{n-2j+2} = \beta_l^{j-l}$, имеем

$$\begin{aligned}&\bar{\mathbf{v}}_j - \beta_{n-2j+2}\overline{\mathbf{w}}_{j-1} \\ &\quad= \left(\dots, \sum_{l=0}^{j-1} x_l^k \left(\binom{j-l}{q-k}\binom{j-l-1}{q-k-1}\right)\beta_l^{j-l}\gamma_{k-l}^{q-k-j+l} + x_j^k\gamma_{k-j}^{q-k}, \dots\right) \\ &= \left(\dots, \gamma_{m-2q+2j+2}\sum_{l=0}^{j} x_l^k \binom{j-l}{q-k-1}\beta_l^{j-l}\gamma_{k-l}^{q-k-j+l-1}, \dots\right) = \gamma_{m-2q+2j+2}\overline{\mathbf{w}}_j.\end{aligned} \tag{9}$$

Из (9) следует, что $\nabla_i = \gamma_{p-1}^i \nabla_i^{(i-1)}$. Теперь обозначим через $\nabla_i^{[j]}$ определитель $\nabla_i^{(i-1)}$, в котором последние j столбцов заменим на $\overline{\mathbf{w}}_{q-j+1}, \dots, \overline{\mathbf{w}}_q$. Как и выше, мы можем показать, что $\nabla_i^{(i-1)} = \beta_i^{q-i}\nabla_i^{[q-1]}$. Так как $\nabla_i^{[q-i]} = \triangle_{q-1}$, то $\nabla_i = \gamma_{q-1}^i\beta_i^{q-i}\triangle_{q-1}$ и равенство (7) следует из (8).

Теперь надо вычислить

$$S_q = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j x_j^q \beta_j^{q-j}\gamma_{q-j}^j.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}u_{n+m-2k}^k e &= \left(\sum_{j=0}^{k} x_j^k v_{n-2j} \otimes w_{m-2k+2j}\right)e \\ &= \sum_{j=0}^{k} x_j^k (\alpha_{n-2j} v_{n-2j+2} \otimes + w_{m-2k+2j} + \tau_{m-2k+2j} v_{n-2j} \otimes w_{m-2k+2j+2} \\ &\qquad\qquad = \sum_{j=0}^{k} \bigl(x_{j+1}^k \alpha_{n-2j-2} + x_j^k \tau_{m-2k+2j}\bigr) v_{n-2j} \otimes w_{m-2k+2j+2}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$x_{j+1}^{k}\alpha_{n-2j-2}+x_{j}^{k}\tau_{m-2k+2j}=0. \tag{10}$$

Из (10) имеем

$$\begin{aligned} x_{j+1}^{k}=-\frac{x_{j}^{p}\tau_{m-2k+2j}}{\alpha_{n-2j-2}}&=\frac{x_{j-1}^{p}\tau_{m-2k+2j}\tau_{m-2k+2j-2}}{\alpha_{n-2j-2}\alpha_{n-2j}}\\ &=(-1)^{j+1}\frac{x_{0}^{k}\tau_{m-2k+2j}\dots\tau_{m-2k}}{\alpha_{n-2j-2}\dots\alpha_{n-2}}=(-1)^{j+1}\frac{x_{0}^{k}\tau_{m-k}^{j+1}}{\alpha_{n-j-1}^{j+1}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что равенства (1) и (2) влекут

$$\begin{aligned} &\gamma_{i-j}^{j}\tau_{m-i}^{j}=\gamma_{m-2i+2j}\dots\gamma_{m-2i+2}\tau_{m-2i}\dots\tau_{m-2i+2j-2}\\ &=(-1)^{j}(i-j+1)(m-i+1)\cdot\ldots\cdot(i-j)(m-i+j)=(-1)^{j}(i-j+1)^{[j]}(m-i+1)^{[j]}, \end{aligned}$$

где по определению $k^{[0]}=1$, $k^{[i]}=k(k+1)\dots(k+i-1)$. Аналогично

$$\alpha_{n-i}^{j}\beta_{i-j}^{j}=(-1)^{j}(i-j+1)^{[j]}(n-i+1)^{[j]}.$$

Более того,

$$\begin{aligned} S_{q}&=x_{0}^{q}\sum_{j=0}^{q}\frac{\tau_{m-q}^{j}\beta_{j}^{q-j}\gamma_{q-j}^{j}\alpha_{n-q}^{q-j}}{\alpha_{n-j}^{j}\alpha_{n-q}^{q-j}}\\ &=\frac{(-1)^{q}x_{0}^{q}}{\alpha_{q}^{q}}\sum_{j=0}^{q}(q-j+1)^{[j]}(m-q+1)^{[j]}(j+1)^{[q-j]}(n-q+1)^{[q-j]}\\ &=\frac{(-1)^{q}x_{0}^{q}}{\alpha_{q}^{q}}\sum_{j=0}^{q}\frac{q!}{j}\,\frac{q!}{(q-j)!}(m-q+1)^{[j]}(n-q+1)^{[q-j]}\\ &=\frac{(-1)^{q}x_{0}^{q}}{q!\alpha_{q}^{q}}\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}(m-q+1)^{[j]}(n-q+1)^{[q-j]}. \end{aligned} \tag{12}$$

Напомним следующую формулу, которую нетрудно доказать индукцией по q:

$$(a+b)^{[q]}=\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}a^{[j]}b^{[q-j]}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) получаем

$$S_{q}=x_{0}^{q}q!(n+m-2q+2)^{[q]}/\alpha_{q}^{q}.$$

Следовательно, ввиду (7)

$$\triangle_{q}=\prod_{p=0}^{q}x_{0}^{p}p!(n+m-2p+2)^{[p]}\big(\alpha_{p}^{p}\big)^{-1}. \tag{14}$$

Аналогично если

$$b_{q-k}^{k}=\sum_{i=0}^{q}s_{k}^{i}v_{2i-n}\otimes w_{2k-2i-m},\ k=0,\dots q,\quad \triangle^{q}=\det\big\|s_{k}^{i}\big\|_{i,k=0}^{q},$$

то

$$s_k^i = \sum_{j=0}^{i} y_j^k \binom{i-j}{q-k} \alpha_{i-j}^{i-j} \tau_{k-j}^{q-k-i+j}$$

и

$$\left|U^{m+n-q} : U_s^{m+n-q}\right| = \triangle^q \prod_{k=1}^{q} \left|b_{q-k}^k\right|, \quad 0 < q \le m. \tag{15}$$

Как при доказательстве формулы (14), можно получить равенство

$$\triangle^q = \prod_{p=0}^{q-1} y_0^p p!(n+m-2p+2)^{[p]} \left(\beta_{n-p}^p\right)^{-1}. \tag{16}$$

Теперь вычислим индексы $\left|U^p : U_s^p\right|$ для $m < p < n$. В этом случае $m < p < n$, $p \equiv n + m (\operatorname{mod} 2)$, и мы имеем

$$a_{p-k}^k = \sum_{i=p-m}^{p} t_k^i v_{n-2i} \otimes w_{m+2i-2p},$$

$$\left|U^p : U_s^p\right| = \triangle_p \prod_{k=0}^{m} \left|a_{p-k}^k\right|^{-1}, \tag{17}$$

где $\triangle_p = \det\left\|t_k^i\right\|_{i=p-m,k=0}^{p,m}$. Обозначим через $\mathbf{v}_i^p$ i-й столбец определителя $\triangle_p$. Следующее равенство доказывается по аналогии с равенством (9):

$$\mathbf{v}_i^{p+1} = \beta_{n-2i+2}\mathbf{v}_{i-1}^p + \gamma_{-m-2p+2i}\mathbf{v}_i^p,$$

поэтому

$$\triangle_{p+1} = \beta_{n-2p}\beta_{n-2p+2}\dots\beta_{n-2p+2m}\triangle_p = \beta_{p-m}^{m+1}\triangle_p$$

и

$$\triangle_p = \beta_{p-m}^{m+1}\beta_{p-m-2}^{m+1}\dots\beta_0^{m+1}\triangle_m. \tag{18}$$

Из равенств (4), (5), (14)–(18) имеем

$$\begin{aligned}
|U : U_s| = \prod_{q=0}^{n+m} &\left|U^q : U_s^q\right| \\
&= \left(\prod_{q=1}^{n} \triangle_q \prod_{k=0}^{q} \left|u_k^q\right|^{-1}\right)\left(\prod_{q=0}^{m-1} \triangle_q \prod_{k=0}^{q} \left|b_k^q\right|^{-1}\right) \\
&= \left(x_0^m\right)^{n-m+1} \prod_{q=1}^{m-1} \left(x_0^q\right)^{n-q+1} \prod_{q=1}^{m-1} \left(y_0^q\right)^{m-q} (m!)^{n-m+1} \prod_{q=1}^{m-1} (q!)^{n+m-q+1} \\
&\times \left(\alpha_m^m\right)^{n-m+1} \prod_{q=1}^{m-1} \left(\alpha_q^q\right)^{m-q+1} \prod_{q=1}^{m-1} \left(\beta_{n-q}^q\right)^{m-q} \prod_{q=0}^{n-m-2} \left(\beta_q^{m+1}\right)^{n-m-1-q} \\
&\times \left(\prod_{q=1}^{n}\prod_{k=0}^{q} \left|u_k^q\right|^{-1}\right)\left(\prod_{q=0}^{m-1}\prod_{k=0}^{q} \left|b_k^q\right|^{-1}\right) \\
&\times \left((n-m+2)^{[m]}\right)^{n-m+1} \prod_{q=1}^{m-1} \left((n+m-2q+2)^{[q]}\right)^{n+m-2q+1}.
\end{aligned}$$

Ясно, что существует целочисленная функция $g(p)$, $p \in \mathbf{Z}$, такая, что

$$((n-m+2)^{[m]})^{n-m+1} \prod_{q=1}^{m-1} ((n+m-2q+2)^{[q]})^{n+m-2q+1} = \prod_{p=0}^{2m-2} (n+m-p)^{g(p)}.$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{gathered} g(2t) = (t+1)(n+m-3t-1), \quad 0 \le 2t < m-1, \\ g(2t+1) = (t+1)(n+m-3t-3), \quad 0 \le 2t+1 < m-1, \\ g(m-2+t) = g(m-2-t), \quad 0 \le t < m-1. \end{gathered}$$

Отсюда и из (19) получим формулу (3).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
2. *Ющенко А.* Формы и представления кольца Ли $sl_2(\mathbf{Z})$: дипломная работа. Омск: Омск. ун-т, 1991.

Статья поступила 15 сентября 1999 г.

г. Омск
Омский гос. университет, кафедра алгебры и логики;
University of Sao Paulo, Brazil
grishkov@ime.usp.br