Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 517.544

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ И ОЦЕНКИ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. Н. Киясов

Аннотация: Рассмотрен класс сингулярных интегральных уравнений, эквивалентных однородной задаче линейного сопряжения с матрицей-функцией специального вида, метод исследования которых позволяет выделить уравнения и соответствующие им задачи линейного сопряжения, разрешаемые в замкнутой форме, а в общем случае получить оценки числа их линейно независимых решений. В качестве приложения приводятся оценки для частных индексов гёльдеровских матриц-функций второго порядка. Библиогр. 4.

В работе рассмотрен класс сингулярных интегральных уравнений, эквивалентных однородной задаче линейного сопряжения с матрицей-функцией (МФ) специального вида.

Для упрощения исследования будем рассматривать интегральные уравнения и соответствующие им МФ, заданные на простом гладком замкнутом контуре Γ, разбивающем плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- ($0 \in D^+$, $\infty \in D^-$), и изучать их в классе $H_\mu(\Gamma)$. Под *факторизацией* H_μ-непрерывной на Γ МФ $G(t)$ будем понимать ее представление в виде $G(t) = G^+(t)G^-(t)$, $t \in \Gamma$, где $G(z)$ — МФ конечного порядка на бесконечности [1, с. 12], $\det G(z) \neq 0$ в конечной части плоскости, а на бесконечности порядок $\det G^-(z)$ равен сумме порядков $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_n$ строк МФ $G^-(z)$. Эти числа называют *частными индексами*, а их сумму $\varkappa = \operatorname{ind}\det G(t)$ — *суммарным индексом* МФ $G(t)$. Если в указанном представлении для МФ $G^-(z)$ не выполнено условие на бесконечности, то будем называть такое представление МФ $G(t)$ нормальным представлением. Наконец, если $\det G^+(z_0) = 0$ ($\det G^-(z_0) = 0$) в некоторой конечной точке $z_0 \in D^+(D^-)$, то, применяя указанный в [2] метод построения нормальной матрицы, получим для $G(t)$ нормальное представление, позволяющее эффективно построить факторизацию и в этом случае.

Рассмотрим на Γ сингулярное интегральное уравнение

$$K\varphi(t) \equiv a_0(t)\varphi(t) + a_1(t)S[k_1\varphi](t) + \dots + a_n(t)S[k_n\varphi](t) = f(t), \tag{1}$$

правую часть которого возьмем в виде

$$f(t) = 2M_{1,m_1}(t)a_1(t) + \dots + 2M_{n,m_n}(t)a_n(t),$$

где $M_{k,m_k}(t)$, $k = \overline{1,n}$, — многочлен степени m_k; $a_0(t), a_i(t), k_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, — H_μ-непрерывные функции точек контура, а через $S[\omega](t)$ обозначен сингулярный оператор. Если $a_i(t) \not\equiv a_j(t)$, $k_i(t) \not\equiv k_j(t)$, $t \in \Gamma$, при $i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$, то будем называть уравнение (1) *сингулярным интегральным уравнением с n ядрами.*

Остановимся лишь на случае нормальной разрешимости, требуя, чтобы выражение $\Delta_n = \Delta_{2n}/\Delta_{1n}$, $\Delta_{1n} = a_0 + \Delta_0$, $\Delta_{2n} = a_0 - \Delta_0$, $\Delta_0 = k_1 a_1 + \dots + k_n a_n$ не обращалось в нуль и бесконечность на Γ. С оператором S связаны операторы $P = [I+S]/2$ и $Q = [I-S]/2$ (I — единичный оператор). Пусть $\varphi(t)$ — решение этого уравнения (в случае его разрешимости). Тогда, вводя обозначения

$$\varphi_i^+ = P[k_i\varphi] - M_{i,m_i}, \quad \varphi_i^- = Q[k_i\varphi] + M_{i,m_i}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

придем к однородной задаче линейного сопряжения:

$$\mathbf{\Phi}^+(t) = G(t)\mathbf{\Phi}^-(t), \quad t \in \Gamma, \quad (\mathbf{\Phi}(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z))), \tag{3}$$

$$G = G_0 - E, \quad G_0 = \|g_{ij}\|, \quad (g_{ij} = 2k_i a_j/\Delta_{1n}), \quad i,j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где $\det G_0 = 0$, $\det G = (-1)^n \Delta_n$.

Итак, если $\varphi(t)$ — решение уравнения (1), то функции (2) определяют решение задачи (3), (4), порядок которого на бесконечности равен $\max(m_1, \dots, m_n)$. Обратно, если $\mathbf{\Phi}(z)$ — решение задачи (3), (4), то H_μ-непрерывная на Γ функция

$$\varphi(t) = \bigl(\varphi_1^+(t) + \varphi_1^-(t)\bigr)/k_1(t) = \dots = \bigl(\varphi_n^+(t) + \varphi_n^-(t)\bigr)/k_n(t) \tag{5}$$

будет решением уравнения (1).

Пусть для МФ (4) частный индекс $\varkappa_1$ положителен ($\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \dots \geq \varkappa_n$). Тогда у задачи (3) существует решение $\mathbf{\Phi}(z)$, имеющее на бесконечности порядок $-\varkappa_1$, а вектор-функции $z^k\mathbf{\Phi}(z)$, $k = \overline{0, \varkappa_1 - 1}$, будут линейно независимыми решениями задачи, исчезающими на бесконечности. Этим решениям согласно (5) соответствует $\varkappa_1$ линейно независимых решений $t^k\varphi(t)$, $k = \overline{0, \varkappa_1 - 1}$, уравнения $K\varphi = 0$. Если и $\varkappa_2 > 0$, то задача (3) имеет $\varkappa_2$ линейно независимых решений, исчезающих на бесконечности и не связанных с рассмотренными решениями никакой линейной комбинацией с полиномиальными коэффициентами [1, с. 26]. Этим решениям будет соответствовать вторая серия из $\varkappa_2$ линейно независимых решений. Наконец, если $\varkappa_k > 0$, а $\varkappa_{k+1} \leq 0$, то уравнение $K\varphi = 0$ будет иметь k серий, состоящих из $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_k$ линейно независимых решений соответственно.

Рассмотрим союзное уравнение. Поступая аналогично, приведем это уравнение к эквивалентной однородной задаче линейного сопряжения с МФ $F = F_0 - E$, $F_0 = \|f_{ij}\|$ ($f_{ij} = -2a_i k_j/\Delta_{2n}$), $i,j = \overline{1,n}$, где $\det F_0 = 0$, $\det F = 1/\det G$.

Можно показать, что МФ F равна G'^{-1}, т. е. получается из МФ G при помощи операции транспонирования и взятия обратной матрицы. Таким образом, соответствующие однородные задачи линейного сопряжения оказываются союзными, и частные индексы МФ F и G отличаются лишь знаком [1, с. 38].

Отметим случай, когда индекс уравнения (1) равен нулю. Тогда союзные однородные уравнения имеют одинаковое число линейно независимых решений. Учитывая связь этих уравнений с соответствующими союзными задачами, заключаем, что уравнение $K\varphi = 0$ в случае нулевого индекса не имеет нетривиальных решений тогда и только тогда, когда частные индексы МФ (4) равны нулю.

Определение. Заданные на Γ уравнения с n ядрами $K\varphi = 0$ и

$$K_1\psi(t) \equiv a_0'(t)\psi(t) + a_1'(t)S[k_1'\psi](t) + \dots + a_n'(t)S[k_n'\psi](t) = 0 \tag{6}$$

назовем *равносильными*, если они эквивалентны одной и той же задаче линейного сопряжения (3), (4).

Согласно этому определению равносильные уравнения $K\varphi = 0$ и $K_1\psi = 0$ имеют одинаковое число линейно независимых решений, связанных между собой соотношением $\varphi = k_i' k_i^{-1}\psi$, $i = \overline{1,n}$. В самом деле, любая H_μ-непрерывная МФ G вида (4) определяет класс равносильных уравнений с n ядрами, для которых

$$k_i a_j = a_0 g_{ij}/(2 - g_{11} - \dots - g_{nn}), \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Отсюда непосредственно получаем $a_i' = \alpha a_i$, $k_i' = \beta k_i$, $i = \overline{1,n}$; $\alpha\beta = a_0'/a_0$ и в силу (5) $\varphi = \beta\psi$ (при $a_0' = a_0$, $\beta = 1/\alpha$).

Введенное определение позволяет исследовать нормально разрешимые уравнения с n ядрами, коэффициенты которых могут иметь в конечном числе точек контура степенные особенности. В самом деле, для такого уравнения всегда можно указать равносильное ему уравнение с H_μ-непрерывными коэффициентами, решение которого определит H_μ-непрерывное решение исходного уравнения, удовлетворяющее последнему всюду на контуре.

Рассмотрим уравнение с n ядрами

$$K_{\boldsymbol\alpha}\varphi \equiv a_0\varphi + a_1\alpha_1^{-1}S[k_1\alpha_1\varphi] + \dots + a_n\alpha_n^{-1}S[k_n\alpha_n\varphi] = f_{\boldsymbol\alpha}(t), \tag{7}$$

где $f_{\boldsymbol\alpha}(t) = 2M_{1,m_1}(t)a_1(t)/\alpha_1(t) + \dots + 2M_{n,m_n}(t)a_n(t)/\alpha_n(t)$, а $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, — H_μ-непрерывные функции точек контура, не имеющие нулей на Γ. Уравнение (7) эквивалентно однородной задаче линейного сопряжения с МФ:

$$G_{\boldsymbol\alpha} = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} G \operatorname{diag}\{\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}\}. \tag{8}$$

Подберем α_i, $i = \overline{1,n}$, так, чтобы соответствующая МФ (8) факторизовалась эффективно. Обозначим через $\varkappa$ индекс уравнения (1). Рассмотрим сначала случай $\varkappa \geq 0$.

Пусть в уравнении $K\varphi = 0$ отношения $a_1(t)/a_i(t)$, $i = \overline{2,n}$, не обращаются в нуль и бесконечность на контуре. Тогда, полагая $\alpha_1(t) \equiv 1$, $\alpha_2(t) \equiv a_2(t)/a_1(t), \dots, \alpha_n(t) \equiv a_n(t)/a_1(t)$, придем к эквивалентному в смысле совпадения множества их решений уравнению $a_0\varphi + a_1 S\big[\Delta_0 a_1^{-1}\varphi\big] = 0$.

Если отношения $k_1(t)/k_i(t)$, $i = \overline{2,n}$, не обращаются в нуль и бесконечность на Γ, то, полагая $\alpha_1(t) \equiv 1$, $\alpha_2(t) \equiv k_1(t)/k_2(t), \dots, \alpha_n(t) \equiv k_1(t)/k_n(t)$, придем к эквивалентному уравнению $a_0\varphi + \Delta_0 k_1^{-1}S[k_1\varphi] = 0$. Полученные уравнения с одним ядром являются равносильными, и их индекс равен индексу уравнения (1).

Таким образом, при указанных значениях α_i, $i = \overline{1,n}$, решения уравнения (7) строятся в явном виде. Поэтому формулы (2), в которых следует заменить k_i на $k_i\alpha_i$, $i = \overline{1,n}$, определят систему решений соответствующей задачи линейного сопряжения с МФ (8). Это, в свою очередь, позволяет получить на Γ представление

$$G_{\boldsymbol\alpha}(t) = G_{\boldsymbol\alpha}^+(t) G_{\boldsymbol\alpha}^-(t), \tag{9}$$

а значит, в силу выше сказанного эффективно построить ее факторизацию.

Если предположения относительно нулей коэффициентов уравнения (1) не выполняются, то, «перебрасывая», например, нули коэффициентов a_i к k_i, $i = \overline{1,n}$, придем к уравнению вида (7), для которого реализуется первый из рассмотренных случаев, а число линейно независимых решений однородного уравнения не изменяется. Это вытекает из связи соответствующих задач линейного сопряжения, выражаемой формулой (8), и возможности факторизации получаемой МФ с теми же частными индексами, что проверяется непосредственно в случае нулей целой кратности переносом схемы решения скалярной задачи Римана в исключительных случаях [3, с. 131].

Если $\varkappa < 0$, то, рассматривая союзное для (1) уравнение и факторизуя соответствующую МФ $F_{\boldsymbol{\alpha}} = {G'_{\boldsymbol{\alpha}}}^{-1}$, получим факторизацию МФ (8) и в этом случае.

Пусть, например, представление (9) — факторизация МФ (8). Поскольку всякая непрерывная на Γ функция $\alpha(t)$ может быть с любой точностью равномерно аппроксимирована рациональными функциями, получаем тождества $\alpha_i(t) \equiv r_i(t)\Theta_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t \in \Gamma$, в которых $r_i(t)$ — рациональные функции, а $\Theta_i(t)$ — H_μ-непрерывные на Γ функции, норма которых $\|\Theta_i\|_\mu$ в пространстве $H_\mu(\Gamma)$ [1, с. 45] может быть сделана сколь угодно близкой к единице. При этом $r_i(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, и $\operatorname{ind} r_i(t) = \operatorname{ind} \alpha_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. Используя (9), получим, что МФ

$$G_{\boldsymbol{\Theta}} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{diag}\{\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n\} G \operatorname{diag}\{\Theta_1^{-1}, \Theta_2^{-1}, \dots, \Theta_n^{-1}\} \tag{10}$$

представима в виде

$$G_{\boldsymbol{\Theta}} = \operatorname{diag}\{r_1^{-1}, r_2^{-1}, \dots, r_n^{-1}\} G_{\boldsymbol{\alpha}}^+ G_{\boldsymbol{\alpha}}^- \operatorname{diag}\{r_1, r_2, \dots, r_n\}.$$

Пусть для рациональных функций $r_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, справедливо разложение $r_i(t) = p_i^+(t)p_i^-(t)/q_i^+(t)q_i^-(t)$, где $p_i^+(t)$, $q_i^+(t)$ — многочлены, нули которых расположены в области D^+, а $p_i^-(t), q_i^-(t)$ — многочлены, нули которых лежат в области D^-. Тогда для МФ (10) придем к представлению

$$G_{\boldsymbol{\Theta}} = \operatorname{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\} G_{\boldsymbol{\alpha}}^+ G_{\boldsymbol{\alpha}}^- \operatorname{diag}\{s_1^{-1}, s_2^{-1}, \dots, s_n^{-1}\} = G_{\boldsymbol{\Theta}}^+ G_{\boldsymbol{\Theta}}^-, \tag{11}$$

в котором МФ $G_{\boldsymbol{\Theta}}(z)$ имеет конечное число нулей определителя в областях D^+ и D^-, а значит, факторизуется эффективно. В (11) полагаем

$$G_{\boldsymbol{\Theta}}^+ = \operatorname{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\} G_{\boldsymbol{\alpha}}^+, G_{\boldsymbol{\Theta}}^- = G_{\boldsymbol{\alpha}}^- \operatorname{diag}\{s_1^{-1}, s_2^{-1}, \dots, s_n^{-1}\},$$

а рациональные функции s_i, $i = \overline{1,n}$, имеют вид

$$s_i = \frac{s_i^+}{s_i^-}, \quad s_i^+ = q_i^+ \prod_{j=1, j\neq i}^n p_j^+, \quad s_i^- = p_i^- \prod_{j=1, j\neq i}^n q_j^-.$$

Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ — частные индексы МФ $G_{\boldsymbol{\Theta}}$ ($\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \varkappa$). Согласно утверждению [4, ч. II, с. 11] существует такая δ-окрестность МФ $G_{\boldsymbol{\Theta}}$, что частные индексы $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \dots \geq \varkappa_n$ ($\varkappa_1 + \dots + \varkappa_n = \varkappa$) любой МФ G из этой δ-окрестности удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^n \max(\varkappa_i, 0) \leq \sum_{i=1}^n \max(\lambda_i, 0),$$

заключены в промежутке

$$\lambda_n \leq \varkappa_n \leq \dots \leq \varkappa_1 \leq \lambda_1 \tag{12}$$

и совпадают с набором частных индексов МФ $G_{\boldsymbol{\Theta}}$ в случае устойчивости последних ($\lambda_1 - \lambda_n \leq 1$). Поскольку при достаточно малых $\|1 - \Theta_i\|_\mu$, $i = \overline{1,n}$, значение $\|G_{\boldsymbol{\Theta}} - G\|_\mu$ может быть сделано сколь угодно малым, МФ (4) попадет в эту δ-окрестность и для ее частных индексов окажутся справедливыми неравенства (12).

Итогом проведенного исследования служит

Теорема. *Пусть* $\varkappa$ *— индекс уравнения* (1), $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ *— частные индексы* МФ (10), $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \dots \geq \varkappa_n$ *— частные индексы* МФ (4), *возможные значения которых заключены в промежутке* (12).

Если $\lambda_n \geq 0$, *то уравнение* $K\varphi = 0$ *имеет* $\varkappa$ *линейно независимых решений, образующих при* $\lambda_n > 0$ n *серий, состоящих из* $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_n$ *решений.*

Если $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s > 0 \geq \lambda_{s+1} \geq \dots \geq \lambda_n$, *то уравнение имеет не более* $\sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i$ *линейно независимых решений.*

Если $\lambda_1 \leq 0$, *то уравнение не имеет нетривиальных решений.*

Замечание. Если в представлении (8) $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, — рациональные функции, то факторизация МФ (4) строится эффективно.

В качестве приложения этого результата получим оценки для частных индексов гёльдеровских МФ второго порядка.

Пусть $T = \|t_{ij}\|$, $i,j = 1,2,$ — H_μ-непрерывная на Γ МФ, определитель которой $\Delta(t)$, а также элементы $t_{ij}(t)$, $i,j = 1,2$, не имеют нулей на контуре. Пусть $\Delta = \Delta^+\Delta^-$, $t_{ij} = t_{ij}^+ t_{ij}^-$, $i,j = 1,2,$ — факторизация указанных функций с индексами Коши $\varkappa$ и $\varkappa_{ij}$, $i,j = 1,2$, соответственно. Непосредственно проверяется справедливость на Γ представления

$$T = T_{11}^+ F T_{11}^-, \tag{13}$$

в котором

$$T_{11}^+ = \begin{pmatrix} t_{11}^+ & 0 \\ t_{11}^+ P\bigl[\frac{t_{21}}{t_{11}}\bigr] + \frac{\Delta^+}{t_{11}^+}\bigl\{P\bigl[Q\bigl[\frac{t_{21}}{t_{11}}\bigr]\frac{(t_{11}^+)^2}{\Delta^+}\bigr] + c_1\bigr\} & \frac{\Delta^+}{t_{11}^+} \end{pmatrix},$$

$$T_{11}^- = \begin{pmatrix} t_{11}^- & t_{11}^- Q\bigl[\frac{t_{12}}{t_{11}}\bigr] + \frac{\Delta^-}{t_{11}^-}\bigl\{Q\bigl[P\bigl[\frac{t_{12}}{t_{11}}\bigr]\frac{(t_{11}^-)^2}{\Delta^-}\bigr] - c_2\bigr\} \\ 0 & \frac{\Delta^-}{t_{11}^-} \end{pmatrix},$$

а МФ

$$F = \begin{pmatrix} 1 & P\bigl[P\bigl[\frac{t_{12}}{t_{11}}\bigr]\frac{(t_{11}^-)^2}{\Delta^-}\bigr] + c_2 \\ Q\bigl[Q\bigl[\frac{t_{21}}{t_{11}}\bigr]\frac{(t_{11}^+)^2}{\Delta^+}\bigr] - c_1 & 1 + \bigl\{P\bigl[P\bigl[\frac{t_{12}}{t_{11}}\bigr]\frac{(t_{11}^-)^2}{\Delta^-}\bigr] + c_2\bigr\}\bigl\{Q\bigl[Q\bigl[\frac{t_{21}}{t_{11}}\bigr]\frac{(t_{11}^+)^2}{\Delta^+}\bigr] - c_1\bigr\} \end{pmatrix}$$

имеет нулевой суммарный индекс. Подберем в (13) в силу ограниченности операторов P и Q постоянные c_1, c_2 так, чтобы индексы Коши элементов МФ F были равны нулю. Тогда, факторизуя ее элемент $f_{22}(t) = f_{22}^+(t) f_{22}^-(t)$, от представления (13) перейдем к представлению $T = T_{11}^+[N^+]^{-1} G [N^-]^{-1} T_{11}^-$, в котором $N(z) = \operatorname{diag}\bigl\{1, f_{22}^{-1}(z)\bigr\}$, а МФ $G(t) = N^+(t) F(t) N^-(t)$ также имеет нулевой суммарный индекс, элементы на главной диагонали, равные единице, и элементы g_{12} и g_{21}, не имеющие нулей на Γ.

Пусть $\mathbf{\Phi}(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ — исчезающее на бесконечности решение однородной задачи линейного сопряжения с МФ $G(t)$. Тогда H_μ-непрерывная на Γ функция $\varphi(t) = \varphi_1^-(t)$ будет решением сингулярного интегрального уравнения с двумя ядрами

$$(2 - g_{12}g_{21})\varphi + Q[g_{12}]S[g_{21}\varphi] + S[g_{21}P[g_{12}]\varphi] = 0,$$

для коэффициентов которого реализуется хотя бы одно из рассмотренных условий, налагаемых на коэффициенты уравнения (1). Обратно, нетривиальное решение этого уравнения определит исчезающее на бесконечности решение задачи: $\varphi_1^- = \varphi$, $\varphi_1^+ = -P[g_{12}Q[g_{21}\varphi]]$; $\varphi_2^- = -Q[g_{21}\varphi]$, $\varphi_2^+ = P[g_{21}\varphi]$. Пусть уравнение имеет n_{11} линейно независимых решений. Тогда частные индексы МФ $G(t)$ равны $\pm n_{11}$ и можно выбрать такую факторизацию МФ, для которой у МФ $G^{-}(z)$ порядок на бесконечности элементов первой строки в точности равен n_{11}.

Если $\varkappa \geq 2\varkappa_{11}$, то в нормальном представлении МФ T МФ $T^{-}(z)$ будет иметь на бесконечности порядки строк, соответственно равные $\varkappa - \varkappa_{11} \pm n_{11}$. При переходе к факторизации суммарный порядок строк этого нормального представления понижается на $\varkappa - 2\varkappa_{11}$ единиц. Значит, при таком переходе порядок первой строки, соответствующей большему из значений частных индексов МФ T, не может быть сделан ниже, чем $\varkappa_{11} + n_{11}$, что приводит нас к оценке

$$\varkappa_{11} + (-1)^{k-1} n_{11} \leq \varkappa_k \leq \varkappa - \varkappa_{11} + (-1)^{k-1} n_{11}, \quad k = 1, 2 \quad (\varkappa_1 \geq \varkappa_2).$$

Если $\varkappa < 2\varkappa_{11}$, то придем к нормальному представлению МФ T с порядками строк на бесконечности не выше $\varkappa_{11} \pm n_{11}$, откуда

$$\varkappa - \varkappa_{11} + (-1)^{k-1} n_{11} \leq \varkappa_k \leq \varkappa_{11} + (-1)^{k-1} n_{11}, \quad k = 1, 2.$$

Рассматривая представление (13) для МФ $T\widehat{E}$, $\widehat{E}T$, $\widehat{E}T\widehat{E}$, где $\widehat{E}$ — перестановочная матрица ($\widehat{E}^2 = E$), и объединяя соответствующие оценки, окончательно получим

$$\max_{i,j=1,2} \min\{(\varkappa_{ij}, \varkappa - \varkappa_{ij}) + (-1)^{k-1} n_{ij}\} \leq \varkappa_k \leq \min_{i,j=1,2} \max\{(\varkappa_{ij}, \varkappa - \varkappa_{ij}) + (-1)^{k-1} n_{ij}\},$$

где $k = 1, 2$, а n_{ij}, $i, j = 1, 2$, — числа линейно независимых решений соответствующих сингулярных интегральных уравнений с двумя ядрами. Можно привести примеры рациональных МФ, для которых полученные оценки будут точными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевая задача Римана для системы n пар функций // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7, № 4. С. 3–54.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
4. *Литвинчук Г. С., Спитковский И. М.* Факторизация матриц-функций. М.: ВИНИТИ, 1984. Ч. I, II. (Итоги науки и техники).

Статья поступила 1 июня 1999 г.,
окончательный вариант — 4 апреля 2000 г.

г. Казань
Казанский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра дифференциальных уравнений
Sergey.Kiasov@ksu.ru