Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 512.542

РАНГОВЫЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМ ХОЛЛА И БЭРА

Н. Ю. Макаренко

Аннотация: Доказано, что если $(k+1)$-й член нижнего центрального ряда конечной нильпотентной группы G имеет ранг r, то фактор-группа группы G по $(2k)$-му члену верхнего центрального ряда имеет (k,r)-ограниченный ранг. Как следствие теоремы Манна — Любоцкого о том, что ранг мультипликатора Шура конечной группы ограничен в терминах ранга самой группы, доказано, что если ранг фактор-группы конечной группы G по k-му члену верхнего центрального ряда равен r, то $(k+1)$-й член нижнего центрального ряда группы G имеет (k,r)-ограниченный ранг. Полученные результаты являются ранговыми аналогами теорем Холла (см. *Hall Ph.* Finite-by-nilpotent groups // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1956. V. 52. P. 611–616) и Бэра (см. *Baer R.* Representation of groups as quotient groups. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1945. V. 58, P. 295–419). Библиогр. 6.

1. Введение. По определению конечная группа имеет *ранг* r, если r — наименьшее натуральное число такое, что каждая ее подгруппа может быть порождена r элементами.

Теорема 1. *Если $(k+1)$-й член нижнего центрального ряда конечной нильпотентной группы G имеет ранг r, то фактор-группа группы G по $(2k)$-му члену верхнего центрального ряда имеет (k,r)-ограниченный ранг.*

(Здесь и далее величина $(a,b,\dots)$-*ограничена*, если она ограничена некоторой функцией, зависящей только от параметров $a,b,\dots$.)

Теорема 1 является аналогом теоремы Ф. Холла [1], утверждающей, что если порядок $(k+1)$-го члена нижнего центрального ряда произвольной группы конечен и равен n, то индекс $2k$-го члена верхнего центрального ряда конечен и (n,k)-ограничен.

Второй результат данной статьи является простым, но явным образом не отмеченным, следствием теоремы Манна — Любоцкого [2, теорема 4.2.3].

Теорема 2. *Если ранг фактор-группы конечной группы G по k-му члену верхнего центрального ряда равен r, то $(k+1)$-й член нижнего центрального ряда группы G имеет (k,r)-ограниченный ранг.*

По теореме Бэра [3] порядок $(k+1)$-го члена нижнего центрального ряда ограничен некоторой функцией, зависящей только от k и индекса k-го члена верхнего центрального ряда. А. Манн и А. Любоцкий [2] с использованием созданной ими теории мощных p-групп показали, что ранг мультипликатора Шура конечной группы ранга r ограничен некоторой функцией от r, откуда следует, что ранг коммутанта конечной группы ограничен в терминах ранга

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00576) и СО РАН (грант для коллективов молодых ученых, постановление Президиума № 83 от 10.03.2000).

фактор-группы по центру. Теорема 2 легко получается по индукции из этого утверждения.

Доказательство теоремы 1 похоже на доказательство теоремы Ф. Холла и использует следующую лемму Горчакова — Мерзлякова — Холла [4–6].

Лемма 1. *Ранг p-группы автоморфизмов конечной p-группы ранга r ограничен в терминах r.*

Примеры, показывающие, что значение $2k$ в заключении теоремы 1 неулучшаемо, можно найти в [1]. Отметим, что теорема 1 не может быть распространена на случай произвольной конечной группы. Как показывает следующий пример, невозможно получить аналог теоремы Ф. Холла даже для конечных разрешимых групп.

Пример. Пусть p, $q_1, q_2, \dots, q_n$ — различные простые числа, C_i — циклические группы порядка q_i, и пусть P — конечная p-группа ступени нильпотентности k.

Рассмотрим прямое произведение сплетений групп C_i с группой P:

$$G = (C_1 \wr P) \times (C_2 \wr P) \times \ldots \times (C_n \wr P).$$

Здесь C_i — базы соответствующих сплетений, P — активная группа. Так как ступень нильпотентности группы P равна k, подгруппа $\gamma_{k+1}(C_i \wr P)$ лежит в базе сплетения, т. е. является подгруппой элементарной абелевой q_i-группы ранга $|P|$, поэтому ее ранг не превосходит $|P|$. Поскольку все q_i различны, ранг подгруппы $\gamma_{k+1}(G)$ не превосходит максимума рангов подгрупп $\gamma_{k+1}(C_i \wr P)$. В то же время все члены верхнего центрального ряда групп $C_i \wr P$ лежат в соответствующих базах сплетений, поэтому ранг фактор-группы группы G по любому члену верхнего центрального ряда не меньше ранга группы

$$\underbrace{P \times P \times \cdots \times P}_{n}.$$

С увеличением n ранг этой группы неограниченно возрастает.

2. Обозначения. Через $\gamma_i(G)$ будем обозначать члены нижнего центрального ряда группы G:

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_{s+1}(G) = [\gamma_s(G), G],$$

а через $\zeta_i(G)$ — члены верхнего центрального ряда группы G: $\zeta_1(G) = Z(G)$ — центр группы G и, далее, по индукции $\zeta_{i+1}(G)$ — полный прообраз в G подгруппы $Z(G/\zeta_i(G))$.

Группа, порожденная множеством M, обозначается через $\langle M \rangle$.

3. Доказательство аналога теоремы Холла. Докажем теорему 1. Поскольку конечная нильпотентная группа является прямым произведением своих силовских подгрупп, теорему достаточно доказать для конечной p-группы, где p — простое число.

Зафиксируем представители b_i смежных классов, порождающих фактор-группу $G/C_G(\gamma_{k+1}(G))$. Их будет r-ограниченное число, так как фактор-группа $G/C_G(\gamma_{k+1}(G))$ вкладывается в группу автоморфизмов группы $\gamma_{k+1}(G)$ и по лемме 1 ее ранг r-ограничен. Для каждого упорядоченного набора $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{2k-1})$ длины $2k-1$, составленного из фиксированных представителей b_i, определим отображение

$$\theta_{\bar{b}} : y \to [y, b_1, b_2, \dots, b_{2k-1}]$$

из группы $C_G(\gamma_{k+1}(G))$ в группу $\gamma_{2k}(G)$.

Покажем, что это отображение — гомоморфизм. Для этого нам необходима следующая техническая лемма.

Лемма 2. *Любой коммутатор веса* $\geq 2k+1$ *с произвольной расстановкой скобок равен* 1, *если в нем встречаются по крайней мере два элемента из подгруппы* $C_G(\gamma_{k+1}(G))$.

Доказательство. Обозначим

$$C = C_G(\gamma_{k+1}(G)), \quad H_s = \prod_{n+m=s-2} [C, \underbrace{G, \dots, G}_{n}, C, \underbrace{G, \dots, G}_{m}].$$

Покажем, что подгруппа вида

$$[\dots[\dots[C, G, \dots, G], \dots], \dots [\dots [C, G, \dots, G], \dots], \dots]$$

с произвольной расстановкой скобок, где встречается 2 раза буква C, остальные буквы — G и общее число букв равно s, лежит в H_s. Для этого сначала переносим одну из букв C в начало, пользуясь равенством $[[G, \dots, G], C] = [C, [G, \dots, G]]$, а затем, многократно пользуясь включением

$$[A, [B, C]] \leq [A, B, C][A, C, B],$$

раскрываем все скобки.

Для доказательства леммы достаточно показать, что $H_{2k+1} = 1$. Ясно, что подгруппы

$$[C, \underbrace{G, \dots, G}_{n}, C, \underbrace{G, \dots, G}_{m}],$$

где $n \geq k$, тривиальны, поскольку $[C, \gamma_{k+1}(G)] = 1$. Если $n \leq k$, то, применяя включения $[A, B, C] \leq [A, [B, C]][A, C, B]$, получим

$$[C, \underbrace{G, \dots, G}_{n}, C, \underbrace{G, \dots, G}_{m}] \leq \prod_{\substack{i \geq n \\ i+j=2k-1}} [[C, \underbrace{G, \dots, G}_{i}], [C, \underbrace{G, \dots, G}_{j}]].$$

В каждом множителе либо $i \geq k$, либо $j \geq k$. В обоих случаях множитель тривиален, так как $[C, \gamma_{k+1}(G)] = 1$.

Вернемся к доказательству теоремы 1. Последовательно расписываем коммутатор $[y_1 y_2, b_1, b_2, \dots, b_{2k-1}]$ по коммутаторному тождеству

$$[xy, z] = [x, z][x, z, y][y, z].$$

Индукцией по s покажем, что

$$[y_1 y_2, b_1, \dots, b_s] \equiv [y_1, b_1, \dots, b_s][y_2, b_1, \dots, b_s] \bmod H_{s+2}.$$

При $s = 1$ имеем

$$[y_1 y_2, b_1] = [y_1, b_1][y_2, b_1] h_3,$$

где $h_3 \in H_3$. Пусть

$$[y_1 y_2, b_1, \dots, b_{s-1}] \equiv [y_1, b_1, \dots, b_{s-1}][y_2, b_1, \dots, b_{s-1}] \bmod H_{s+1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}[y_1 y_2, b_1, \dots, b_s] &= [[y_1, b_1, \dots, b_{s-1}][y_2, b_1, \dots, b_{s-1}] h_{s+1}, b_s] \\ &\equiv [y_1, b_1, \dots, b_{s-1}, b_s][y_2, b_1, \dots, b_{s-1}, b_s] \bmod H_{s+2}.\end{aligned}$$

В результате

$$[y_1y_2, b_1, b_2, \dots, b_{2k-1}] = [y_1, b_1, b_2, \dots, b_{2k-1}][y_2, b_1, b_2, \dots, b_{2k-1}]f,$$

где $f \in H_{2k+1}$. Вследствие леммы 2 элемент f равен 1, поэтому отображение $\theta_{\bar b}$ — гомоморфизм. Ядро этого гомоморфизма — нормальная подгруппа в C. Так как $\gamma_{2k}(G) \leq \gamma_{k+1}(G)$, ранг $\gamma_{2k}(G)$ не превосходит r, откуда следует, что ранг фактор-группы $C/\operatorname{Ker}\theta_{\bar b}$ также $\leq r$.

Положим

$$K = \bigcap_{\bar b} \operatorname{Ker}\theta_{\bar b},$$

где $\bar b = (b_1, b_2, \dots b_{2k-1})$ пробегает все упорядоченные наборы длины $2k-1$ из представителей b_i. По теореме Ремака группа C/K изоморфна некоторому подпрямому произведению фактор-групп $C/\operatorname{Ker}\theta_{\bar b}$, поэтому ранг фактор-группы C/K не превосходит суммы рангов фактор-групп $C/\operatorname{Ker}\theta_{\bar b}$ и, следовательно, (r,k)-ограничен.

Покажем теперь, что

$$[K, \underbrace{G, \dots, G}_{2k}] = 1.$$

Произвольный элемент g из G представляется в виде произведения элемента из C и произведения некоторых фиксированных представителей b_i. Подставляя в коммутатор

$$[l, g_1, g_2, \dots, g_{2k}]$$

вместо всех элементов g_i их представления через $c_i \in C$ и b_i и делая преобразования с помощью коммутаторных тождеств, получим произведения простых коммутаторов веса $\geq 2k+1$, в которых на первом месте стоит элемент $l \in K$, затем чередуются элементы c_i и b_i, и коммутаторов с произвольной расстановкой скобок веса $\geq 2k+2$, где имеется не менее двух элементов $l \in K$. По лемме 2 все коммутаторы веса $\geq 2k+1$ с двумя вхождениями элементов из C равны 1, поэтому остаются сомножители с начальным отрезком вида $[l, b_1, b_2, \dots, b_{2k}]$. Из определения подгруппы K следует, что все эти коммутаторы также равны 1.

Осталось показать, что ранг фактор-группы $G/\zeta_{2k}(G)$ не превосходит суммы рангов фактор-групп G/C и C/K. Действительно,

$$\begin{aligned} \text{ранг}\, G/\zeta_{2k}(G) &\leq \text{ранг}\, C\zeta_{2k}(G)/\zeta_{2k}(G) + \text{ранг}\, G/C\zeta_{2k}(G) \\ &\leq \text{ранг}\, C/K + \text{ранг}\, G/C. \end{aligned}$$

4. Доказательство аналога теоремы Бэра. Докажем теорему 2. Пусть $b_1, b_2, \dots, b_r$ — представители смежных классов, порождающих фактор-группу $G/\zeta_k(G)$. В произвольный коммутатор $[g_1, g_2, \dots, g_{k+1}]$ веса $k+1$ от элементов из G подставим вместо всех g_i их выражения через фиксированные элементы b_i и элементы $c_i \in \zeta_k(G)$, а затем распишем коммутатор по коммутаторным тождествам

$$[xy, z] = [x, z][x, z, y][y, z], \quad [x, yz] = [x, z][x, y][x, y, z].$$

Так как $[\underbrace{G, \dots, G}_{i}, \zeta_k(G), \underbrace{G, \dots, G}_{j}] = 1$, если $i + j = k$, в результате получим произведение простых коммутаторов от элементов b_i веса $\geq k+1$. Таким образом, $\gamma_{k+1}(G) \leq \gamma_{k+1}(\langle b_1, b_2, \dots, b_r\rangle)$, и можно с самого начала считать, что $G = \langle b_1, b_2, \dots, b_r\rangle$. Теорема 2 очевидным образом вытекает из следующего предложения.

Предложение. *Пусть G — r-порожденная конечная группа, причем ранг фактор-группы $G/\zeta_k(G)$ равен s. Тогда ранг группы G не превосходит некоторой функции $f(k,r,s)$, зависящей только от k, r и s.*

Доказательство. Индукция по k. Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Имеем

$$\text{ранг}\, G/Z(G)\cap G' \leq \text{ранг}\, G/G' + \text{ранг}\, G'/Z(G)\cap G' \leq r+s.$$

По теореме Манна — Любоцкого ранг мультипликатора Шура группы $X = G/Z(G)\cap G'$ ограничен некоторой функцией, зависящей только $r+s$. Если F — универсальная накрывающая для X, то $F/Z(F) \simeq X$, где $Z(F)$ — мультипликатор группы X, и группа G является гомоморфным образом группы F. Так как

$$\text{ранг}\, F \leq \text{ранг}\, X + \text{ранг}\, Z(F),$$

ранг группы G ограничен в терминах r и s.

Предположим, что предложение выполнено для всех номеров верхнего центрального ряда $\leq k$. В r-порожденной группе $\overline{G} = G/\zeta_{k-1}(G)$ фактор-группа по центру имеет ранг s, поэтому, как мы только что показали, ранг группы $\overline{G} = G/\zeta_{k-1}(G)$ не превосходит $f(1,r,s)$. Из индукционного предположения вытекает, что

$$\text{ранг}\, G \leq f(k-1,r,f(1,r,s)) = f(k,r,s).$$

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall Ph.* Finite-by-nilpotent groups // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1956. V. 52. P. 611–616.
2. *Lubotzky A., Mann A.* Powerful p-groups. I: finite groups // J. Algebra. 1987. V. 105. P. 484–505.
3. *Baer R.* Representation of groups as quotient groups. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1945. V. 58. P. 295–419.
4. *Горчаков Ю. М.* О существовании абелевых подгрупп бесконечных рангов в локально разрешимых группах // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156. С. 17–22.
5. *Мерзляков Ю. И.* О локально разрешимых группах конечного ранга // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, № 2. С. 5–16.
6. *Rosenblade J. E.* On groups in which every subgroup is subnormal // J. Algebra. 1965. V. 2. P. 402–412.

Статья поступила 15 декабря 1999 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
makarenk@math.nsc.ru