Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 519.48

О ФУНКЦИЯХ, КОММУТИРУЮЩИХ С ПОЛУГРУППАМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ АЛГЕБР

А. Г. Пинус

Аннотация: Указаны индуктивные определения функций, коммутирующих на конечных алгебрах с полугруппами эндоморфизмов и группами автоморфизмов этих алгебр и сохраняющих подалгебры. Изучаются свойства этих функций и их совокупностей. Библиогр. 8.

В работах $[1, 2]$ автора определены понятия условного и позитивно условного термов, связанные с понятиями программ вычислений в универсальных алгебрах. В ряде дальнейших работ (обзор результатов см. в [3]) выявлены интересные алгебраические свойства условно термальных и позитивно условно термальных функций. В частности, доказано, что условно и позитивно условно термальные функции на конечных алгебрах (равномерно локально конечных алгебрах конечной сигнатуры) суть функции, коммутирующие с полугруппами внутренних изоморфизмов, соответственно внутренних гомоморфизмов этих алгебр. Цель настоящей работы — нахождение аналогичного описания для функций, коммутирующих с другими естественными полугруппами преобразований универсальных алгебр. Напомним соответствующие определения из работ $[1, 2]$.

Определение 1. *Условием сигнатуры* σ (*позитивным условием*) назовем систему

$$\mathscr{T}(\bar{x}) = \begin{cases} t_1^1(\bar{x}) =^{i_1} t_1^2(\bar{x}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ t_n^1(\bar{x}) =^{i_n} t_n^2(\bar{x}) \end{cases}$$

уравнений и неравенств (уравнений) между термами сигнатуры σ. Здесь $t_j^i(\bar{x})$ — термы сигнатуры σ, $i_j \in \{0, 1\}$ (соответственно $i_j = 1$) и $=^0$ — неравенство $\neq$, а $=^1$ — равенство $=$.

Определение 2. *Полной системой условий сигнатуры* σ назовем конечное множество условий $\{\mathscr{T}_1(\bar{x}), \dots, \mathscr{T}_k(\bar{x})\}$ данной сигнатуры такое, что

$$\vdash \forall \bar{x} \left(\bigvee_{i=1}^{k} \mathscr{T}_i(\bar{x}) \right) \quad \text{и} \quad \vdash \forall \bar{x}\, \neg(\mathscr{T}_i(\bar{x}) \,\&\, \mathscr{T}_j(\bar{x}))$$

при $i \neq j$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00571).

Определение 3. *Условные термы сигнатуры* σ определяются индукцией по их длине:

(а) любая переменная и константа сигнатуры σ является условным термом сигнатуры σ;

(б) если $t_1(\bar{x}), \dots, t_l(\bar{x})$ — условные термы сигнатуры σ и $f(x_1, \dots, x_l) \in \sigma$, то $f(t_1(\bar{x}), \dots, t_l(\bar{x}))$ — условный терм сигнатуры σ;

(в) если $t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x})$ — условные термы сигнатуры σ, а $\{\mathscr{T}_1(\bar{x}), \dots, \mathscr{T}_k(\bar{x})\}$ — полная система условий этой сигнатуры, то

$$t(\bar{x}) = \begin{cases} \mathscr{T}_1(\bar{x}) \to t_1(\bar{x}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathscr{T}_k(\bar{x}) \to t_k(\bar{x}) \end{cases}$$

также условный терм сигнатуры σ.

Каждый условный терм $t(\bar{x})$ сигнатуры σ определяет на универсальной алгебре $\mathscr{A} = \langle A; \sigma \rangle$ сигнатуры σ *условно термальную функцию* $t(\bar{x})$. В случаях (а), (б) определения 3 определение условно термальной функции соответствует стандартному индуктивному определению термальных функций. В случае, когда $t(\bar{x})$ определен согласно правилу (в) определения 3, для $\bar{a}, b \in A$ равенство $t(\bar{a}) = b$ соответствует тому, что для некоторого $i \leq k$ имеет место $\mathscr{A} \models \mathscr{T}_i(\bar{a})$ и $t_i(\bar{a}) = b$.

Через $CT(\mathscr{A})(T(\mathscr{A}))$ обозначим совокупность условно термальных (термальных) функций алгебры $\mathscr{A}$.

Определение 4. *Позитивно условные термы для алгебры* $\mathscr{A} = \langle A; \sigma \rangle$ определяются индукцией по их длине:

(а) любая переменная и константа сигнатуры σ являются позитивно условными термами алгебры $\mathscr{A}$;

(б) если $t_1(\bar{x}), \dots, t_l(\bar{x})$ — позитивно условные термы для алгебры $\mathscr{A}$ и $f(x_1, \dots, x_l) \in \sigma$, то $f(t_1(\bar{x}), \dots, t_l(\bar{x}))$ также позитивно условный терм для $\mathscr{A}$;

(в) если $t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x})$ — позитивно условные термы для $\mathscr{A}$, а $\{P_1(\bar{x}), \dots, P_k(\bar{x})\}$ — некоторая совокупность позитивных условий сигнатуры σ и при этом

$$\mathscr{A} \models \forall \bar{x} \left(\bigvee_{i=1}^{k} P_i(\bar{x}) \right), \quad \mathscr{A} \models \forall \bar{x} (P_i(\bar{x}) \& P_j(\bar{x}) \to t_i(\bar{x}) = t_j(\bar{x}))$$

для любых $i, j \leq k$, то

$$t(\bar{x}) = \begin{cases} P_1(\bar{x}) \to t_1(\bar{x}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ P_k(\bar{x}) \to t_k(\bar{x}) \end{cases}$$

также позитивно условный терм для $\mathscr{A}$.

Каждый позитивно условный терм для алгебры $\mathscr{A} = \langle A; \sigma \rangle$ определяет на $\mathscr{A}$ *позитивно условно термальную функцию* на $\mathscr{A}$. В случаях (а), (б) из определения 4 определение позитивно условно термальной функции на $\mathscr{A}$ соответствует стандартному индуктивному определению термальных функций. В случае, когда $t(\bar{x})$ определен согласно правилу (в) определения 4, для $\bar{a}, b \in \mathscr{A}$ равенство $t(\bar{a}) = b$ соответствует тому, что для некоторого $i \leq k$ имеют место $\mathscr{A} \models P_i(\bar{a})$ и $t_i(\bar{a}) = b$.

Через $PCT(\mathscr{A})$ обозначим совокупность всех позитивно условно термальных функций на алгебре $\mathscr{A}$.

Под *внутренним изоморфизмом* (*внутренним гомоморфизмом*) алгебры $\mathscr{A}$ будем понимать любой изоморфизм (любой гомоморфизм) произвольной подалгебры алгебры $\mathscr{A}$ на любую подалгебру алгебры $\mathscr{A}$. Совокупность всех внутренних изоморфизмов (внутренних гомоморфизмов) алгебры $\mathscr{A}$ вместе с пустым отображением образует полугруппу $\operatorname{Iso}\mathscr{A}(\operatorname{Ihm}(\mathscr{A}))$ относительно естественным образом определенной операции суперпозиции. В работах [2, 4] доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любой конечной или равномерно локально конечной с конечной сигнатурой алгебры $\mathscr{A} = \langle A; \sigma\rangle$ и для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ на $\mathscr{A}$ выполнены утверждения:*

(а) *$f \in CT(\mathscr{A})$ тогда и только тогда, когда f коммутирует со всеми отображениями из $\operatorname{Iso}\mathscr{A}$ и подалгебры алгебры $\mathscr{A}$ замкнуты относительно f;*

(б) *$f \in PCT(\mathscr{A})$ тогда и только тогда, когда f коммутирует со всеми отображениями из $\operatorname{Ihm}\mathscr{A}$ и подалгебры алгебры $\mathscr{A}$ замкнуты относительно f.*

В тех же работах показано, что условия равномерной локальной конечности и (в случае бесконечности $\mathscr{A}$) конечности сигнатуры являются существенными в утверждениях теоремы 1.

Из утверждений теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Для любой конечной или равномерно локально конечной с конечной сигнатурой алгебры $\mathscr{A}_1 = \langle A_1; \sigma_1\rangle$ справедливы утверждения:*

(а) *для любой алгебры $\mathscr{A}_2 = \langle A_2; \sigma_2\rangle$ и для любой биекции $\pi : A_1 \to A_2$ отображение π сопрягает совокупности функций $CT(\mathscr{A}_1)$ и $CT(\mathscr{A}_2)$ тогда и только тогда, когда π сопрягает $\operatorname{Iso}\mathscr{A}_1$ и $\operatorname{Iso}\mathscr{A}_2$;*

(б) *для любой алгебры $\mathscr{A}_2 = \langle A_1; \sigma_2\rangle$ равенство $CT(\mathscr{A}_1) = CT(\mathscr{A}_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{Iso}\mathscr{A}_1 = \operatorname{Iso}\mathscr{A}_2$;*

(в) *для любой алгебры $\mathscr{A}_2 = \langle A_2; \sigma_2\rangle$ и для любой биекции $\pi : A_1 \to A_2$ отображение π сопрягает совокупности функций $PCT(\mathscr{A}_1)$ и $PCT(\mathscr{A}_2)$ тогда и только тогда, когда π сопрягает $\operatorname{Ihm}\mathscr{A}_1$ и $\operatorname{Ihm}\mathscr{A}_2$;*

г) *для любой алгебры $\mathscr{A}_2 = \langle A_1; \sigma_2\rangle$ равенство $PCT(\mathscr{A}_1) = PCT(\mathscr{A}_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ihm}\mathscr{A}_1 = \operatorname{Ihm}\mathscr{A}_2$.*

Заметим, что утверждения теоремы 1 и следствия 1 получены в работах [2, 4] как следствия результатов, связанных с так называемой условно рациональной эквивалентностью условных многообразий.

Естественными полугруппами преобразований универсальных алгебр помимо полугрупп $\operatorname{Iso}\mathscr{A}$, $\operatorname{Ihm}\mathscr{A}$ являются полугруппа $\operatorname{End}\mathscr{A}$ всех эндоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$ и группа $\operatorname{Aut}\mathscr{A}$ всех автоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$. И столь же естественными представляются вопросы описания функций, коммутирующих с этими полугруппами.

В работе [5] определено понятие ω-условного терма. Напомним это понятие, предпочитая здесь термину «ω-условный терм» термин «элементарно условный терм».

Определение 5. Под *элементарным условием сигнатуры* σ будем понимать любую элементарную формулу сигнатуры σ. *Полная система элементарных условий* определяется на основе понятия элементарного условия абсолютно так же, как полная система условий на основе понятия условия. И точно так же, как понятие условного терма определяется на основе понятия полной системы условий, на основе понятия полной системы элементарных условий определяется понятие *элементарно условного терма.* Естественным образом на основе последнего понятия определяется понятие *элементарно условно термальной функции* на алгебре.

Через $ECT(\mathscr{A})$ обозначим совокупность всех элементарно условно термальных функций алгебры $\mathscr{A}$.

В работе [5] получено описание элементарно условно рационально эквивалентных многообразий универсальных алгебр, из которого можно было бы получить описание функций, коммутирующих со всеми автоморфизмами конечной алгебры, относительно которых замкнуты подалгебры данной алгебры, но мы получим этот результат здесь непосредственно.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{A} = \langle A; \sigma \rangle$ — конечная универсальная алгебра. Тогда для любой функции f, определенной на A, включение $f \in ECT(\mathscr{A})$ эквивалентно тому, что f коммутирует с отображениями из $\operatorname{Aut}\mathscr{A}$ и подалгебры алгебры $\mathscr{A}$ замкнуты относительно f.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — элементарно условно термальная функция на алгебре $\mathscr{A}$. Непосредственно индукцией по построению элементарно условных термов проверяется то, что f коммутирует со всеми автоморфизмами алгебры $\mathscr{A}$ и подалгебры алгебры $\mathscr{A}$ замкнуты относительно f.

Покажем обратное. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ коммутирует со всеми автоморфизмами алгебры $\mathscr{A}$ и подалгебры алгебры $\mathscr{A}$ замкнуты относительно f. Для каждого кортежа $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ элементов из A через $T_{\bar{a}}(\bar{x})$ обозначим элементарный тип кортежа $\bar{a}$ в алгебре $\mathscr{A}$, т. е. совокупность всех элементарных формул $\psi(\bar{x})$ таких, что $\mathscr{A} \models \psi(\bar{a})$. Так как A конечно, найдутся конечные подмножества $T'_{\bar{a}}(\bar{x}) \subseteq T_{\bar{a}}(\bar{x})$ такие, что для любого $\bar{b} \in \mathscr{A}$ имеет место $\mathscr{A} \models T'_{\bar{a}}(\bar{b}) \to T_{\bar{a}}(\bar{b})$. Пусть

$$\{T'_{\bar{a}_1}(\bar{x}), \dots, T'_{\bar{a}_k}(\bar{x})\} = \{T'_{\bar{a}}(\bar{x}) \mid \bar{a} \in \mathscr{A}\}$$

и $T_0(\bar{x})$ — конъюнкция отрицаний $T'_{\bar{a}}(\bar{x})$ для всех $\bar{a} \in \mathscr{A}$. Тогда

$$\{T'_{\bar{a}_1}(\bar{x}), \dots, T'_{\bar{a}_k}(\bar{x}), T_0(\bar{x})\}$$

образует полную систему элементарных условий. Через $\langle \bar{a} \rangle_{\mathscr{A}}$ обозначим подалгебру алгебры $\mathscr{A}$, порожденную элементами $\bar{a}$. Поскольку $f(\bar{a}) \in \langle \bar{a} \rangle_{\mathscr{A}}$, найдется терм $t_{\bar{a}}(\bar{x})$ такой, что $f(\bar{a}) = t_{\bar{a}}(\bar{a})$. Заметим также, что для любых $\bar{a}, \bar{b} \in \mathscr{A}$, если $T'_{\bar{a}}(\bar{x}) = T'_{\bar{b}}(\bar{x})$, то $T_{\bar{a}}(\bar{x}) = T_{\bar{b}}(\bar{x})$ и найдется $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathscr{A}$ такой, что $\varphi(\bar{a}) = \bar{b}$. Рассмотрим элементарно условный терм

$$t(\bar{x}) = \begin{cases} T'_{\bar{a}_1}(\bar{x}) \to t_{\bar{a}_1}(\bar{x}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ T'_{\bar{a}_k}(\bar{x}) \to t_{\bar{a}_k}(\bar{x}) \\ T_0(\bar{x}) \to x_1 \end{cases}$$

и покажем что для любого $\bar{b} \in \mathscr{A}$ имеет место равенство $f(\bar{b}) = t(\bar{b})$. Действительно, пусть $\bar{a}_i \in \mathscr{A}$ таково, что $\mathscr{A} \models T'_{\bar{a}_i}(\bar{b})$. Тем самым требуется показать, что $f(\bar{b}) = t_{\bar{a}_i}(\bar{b})$. Как замечено выше, найдется $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathscr{A}$ такой, что $\varphi(\bar{a}_i) = \bar{b}$. Но тогда

$$f(\bar{b}) = f(\varphi(\bar{a}_i)) = \varphi(f(\bar{a}_i)) = \varphi(t_{\bar{a}_i}(\bar{a}_i)) = t_{\bar{a}_i}(\varphi(\bar{a}_i)) = t_{\bar{a}_i}(\bar{b}).$$

Теорема доказана.

Из утверждения этой теоремы непосредственно вытекает

Следствие 2. *Для любой конечной универсальной алгебры* $\mathscr{A}_1 = \langle A_1; \sigma_1 \rangle$ *имеют место утверждения:*

(а) *для любой алгебры* $\mathscr{A}_2 = \langle A_2; \sigma_2 \rangle$ *и любой биекции* $\pi : A_1 \to A_2$ *отображение* π *сопрягает совокупности функций* $ECT(\mathscr{A}_1)$ *и* $ECT(\mathscr{A}_2)$ *тогда и только тогда, когда* π *сопрягает* $\operatorname{Aut} \mathscr{A}_1$ *и* $\operatorname{Aut} \mathscr{A}_2$ *и индуцирует биекцию совокупности подалгебр* $\operatorname{Sub} \mathscr{A}_1$ *алгебры* $\mathscr{A}_1$ *на* $\operatorname{Sub} \mathscr{A}_2$*;*

(б) *для любой алгебры* $\mathscr{A}_1 = \langle A_1; \sigma_2 \rangle$ *равенство* $ECT(\mathscr{A}_1) = ECT(\mathscr{A}_2)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Aut} \mathscr{A}_1 = \operatorname{Aut} \mathscr{A}_2$ *и* $\operatorname{Sub} \mathscr{A}_1 = \operatorname{Sub} \mathscr{A}_2$.

Покажем, что ограничения конечностью алгебры $\mathscr{A}$ в формулировке теоремы 2 (а значит, и эквивалентного ей следствия 2) существенны, т. е. в отличие от утверждения теоремы 1 утверждение теоремы 2 становится неверным уже даже для бесконечных равномерно локально конечных алгебр конечной сигнатуры.

Пример 1. Рассмотрим интервальную булеву алгебру $\mathscr{B}$ над линейно упорядоченным множеством $\omega^2 + 1$. Через $F^2(\mathscr{B})$ обозначим вторую итерацию фильтра Фреше алгебры $\mathscr{B}$. Определим функцию $f(x)$ на $\mathscr{B}$ следующим образом:

$$f(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a/F^2(\mathscr{B}) = 0/F^2(\mathscr{B}), \\ 1, & \text{если } a/F^2(\mathscr{B}) = 1/F^2(\mathscr{B}). \end{cases}$$

Очевидно, что f коммутирует со всеми автоморфизмами равномерно локально конечной алгебры $\mathscr{B}$, имеющей конечную сигнатуру, и подалгебры алгебры $\mathscr{B}$ замкнуты относительно f. Пусть теперь $c \in \mathscr{B}$ соответствует интервалу порядкового типа ω линейно упорядоченного множества $\omega^2 + 1$. Так как все бесконечные атомные булевы алгебры элементарно эквивалентны, для любого элементарного условия $\mathscr{T}(x)$ выполнено $\mathscr{B} \models \mathscr{T}(c) \Leftrightarrow \mathscr{T}(\neg c)$ и, значит, для любого элементарно условного терма $t(x)$ имеет место равенство $t(c) = t(\neg c)$. Равенства же $f(c) = 0$ и $f(\neg c) = 1$ доказывают в этом случае то, что f не является элементарно условно термальной функцией на алгебре $\mathscr{B}$.

Определение 6. Под $\exists$-*позитивным условием сигнатуры* σ будем понимать любую позитивную элементарную $\exists$-формулу сигнатуры σ. Определим $\exists$-*позитивно условные термы для алгебры* $\mathscr{A} = \langle A; \sigma \rangle$ индукцией по их длине:

а) любая переменная и константа сигнатуры σ являются $\exists$-позитивно условными термами для алгебры $\mathscr{A}$;

б) если $t_1(\bar{x}), \ldots, t_l(\bar{x})$ являются $\exists$-позитивно условными термами для алгебры $\mathscr{A}$ и $f(x_1, \ldots, x_l) \in \sigma$, то $f(t_1(\bar{x}), \ldots, t_l(\bar{x}))$ также $\exists$-позитивно условный терм для $\mathscr{A}$;

в) если $t_1(\bar{x}), \ldots, t_k(\bar{x})$ являются $\exists$-позитивно условными термами для алгебры $\mathscr{A}$, а $\{P_1(\bar{x}), \ldots, P_k(\bar{x})\}$ — некоторая совокупность $\exists$-позитивных условий сигнатуры σ и при этом

$$\mathscr{A} \models \forall \bar{x} \left(\bigvee_{i=1}^{k} P_i(\bar{x}) \right), \quad \mathscr{A} \models \forall \bar{x} (P_i(\bar{x}) \& P_j(\bar{x}) \to t_i(\bar{x}) = t_j(\bar{x}))$$

для любых $i, j \leq k$, то

$$t(\bar{x}) = \begin{cases} P_1(\bar{x}) \to t_1(\bar{x}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_k(\bar{x}) \to t_k(\bar{x}) \end{cases}$$

также $\exists$-позитивно условный терм для $\mathscr{A}$.

Как и в случаях условных, позитивно условных, элементарно условных термов естественным образом каждый $\exists$-позитивно условный терм для алгебры $\mathscr{A}$ определяет на $\mathscr{A}$ *$\exists$-позитивно условно термальную функцию.*

Через $\exists^+CT(\mathscr{A})$ обозначим совокупность всех $\exists$-позитивно условно термальных функций на алгебре $\mathscr{A}$. Очевидным образом индукцией по построению $\exists$-позитивно условных термов замечается, что $\exists$-позитивно условно термальные функции коммутируют с любыми эндоморфизмами алгебры $\mathscr{A}$ и подалгебры алгебры $\mathscr{A}$ замкнуты относительно этих функций.

Верно и обратное.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{A} = \langle A; \sigma\rangle$ — конечная универсальная алгебра. Тогда для любой функции f, определенной на A, включение $f \in \exists^+CT(\mathscr{A})$ эквивалентно тому, что f коммутирует с отображениями из $\operatorname{End}\mathscr{A}$ и подалгебры алгебры $\mathscr{A}$ замкнуты относительно f.*

Доказательство утверждения теоремы 3 полностью аналогично доказательству теоремы 2. Необходимо лишь в качестве $T_{\bar a}(\bar x)$ рассмотреть $\exists$-позитивные типы, т. е. совокупности $\exists$-позитивных элементарных формул, истинных на кортеже $\bar a$, и заметить, что для любого $\bar b \in \mathscr{A}$ если $\mathscr{A} \models T_{\bar a}(\bar b)$, то существует эндоморфизм φ алгебры $\mathscr{A}$ такой, что $\varphi(\bar a) = \bar b$.

Следствие 3. *Для любой конечной универсальной алгебры $\mathscr{A}_1 = \langle A_1; \sigma_1\rangle$ справедливы утверждения:*

(а) *для любой алгебры $\mathscr{A}_2 = \langle A_2; \sigma_2\rangle$ и любой биекции $\pi : A_1 \to A_2$ отображение π сопрягает совокупности функций $\exists^+CT(\mathscr{A}_1)$ и $\exists^+CT(\mathscr{A}_2)$ тогда и только тогда, когда π сопрягает $\operatorname{End}\mathscr{A}_1$ и $\operatorname{End}\mathscr{A}_2$ и индуцирует биекцию совокупности подалгебр $\operatorname{Sub}\mathscr{A}_1$ алгебры $\mathscr{A}_1$ на $\operatorname{Sub}\mathscr{A}_2$;*

(б) *для любой алгебры $\mathscr{A}_2 = \langle A_1; \sigma_2\rangle$ равенство $\exists^+CT(\mathscr{A}_1) = \exists^+CT(\mathscr{A}_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{End}\mathscr{A}_1 = \operatorname{End}\mathscr{A}_2$ и $\operatorname{Sub}\mathscr{A}_1 = \operatorname{Sub}\mathscr{A}_2$.*

Заметим, что, как и утверждение теоремы 2, утверждение теоремы 3 не верно даже для равномерно локально конечных алгебр конечной сигнатуры.

Пример 2. Действительно, пусть $\mathscr{B}^*$ является обогащением булевой алгебры $\mathscr{B}$, рассмотренной выше в примере 1 с помощью функции $g(x)$ такой, что

$$g(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0, \\ 1, & \text{если } a \neq 0. \end{cases}$$

В этом случае $\operatorname{End}\mathscr{B}^* = \operatorname{Aut}\mathscr{B}$ и $\operatorname{Sub}\mathscr{B}^* = \operatorname{Sub}\mathscr{B}$. Тем самым, как замечено выше, функция f коммутирует со всеми эндоморфизмами алгебры $\mathscr{B}^*$, подалгебры алгебры $\mathscr{B}^*$ замкнуты относительно f, но $f \notin \exists^+CT(\mathscr{B}^*) \subseteq ECT(\mathscr{B})$.

Очевидно, что для любой универсальной алгебры $\mathscr{A} = \langle A; \sigma\rangle$ имеют место следующие включения между клонами функций на множестве A:

$$T(\mathscr{A}) \subseteq PCT(\mathscr{A}) \begin{matrix} \subseteq \exists^+CT(\mathscr{A}) \\ \subseteq CT(\mathscr{A}) \end{matrix} \subseteq ECT(\mathscr{A}). \tag{$*$}$$

Возникает естественный вопрос о порождаемости этих клонов функций на множестве A, в частности, о конечной порожденности клонов $PCT(\mathscr{A})$, $\exists^+CT(\mathscr{A})$, $CT(\mathscr{A})$, $ECT(\mathscr{A})$ над клоном $T(\mathscr{A})$.

Как замечено в [1], *клон $CT(\mathscr{A})$ является однопорожденным над клоном $T(\mathscr{A})$ для любой алгебры $\mathscr{A}$.* Действительно, $CT(\mathscr{A}) = T(\mathscr{A}^d)$, где $\mathscr{A}^d$ — обогащение алгебры $\mathscr{A}$ с помощью дискриминаторной функции $d(x, y, z)$.

В работе [6] доказано, что для *бесконечных алгебр $\mathscr{A}$, вообще говоря, клоны $ECT(\mathscr{A})$ и $PCT(\mathscr{A})$ могут не быть конечно порожденными над $T(\mathscr{A})$.*

Пусть теперь $|A| = n < \omega$. Пусть $D_s(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ (где $s \in S = \{s_1, \dots, s_k\}$) — произвольная диаграмма возможных равенств и неравенств между $n+1$ элементами $x_1, \dots, x_{n+1}$ из n-элементного множества и z_s ($s \in S$) — попарно различные переменные, отличные от $x_1, \dots, x_{n+1}$. Пусть $\mathscr{A}^*$ является обогащением алгебры $\mathscr{A}$ введением в сигнатуру последней представителей из всех классов равных друг другу n-местных $ECT(\mathscr{A})$-функций. Пусть $\mathscr{A}^{**}$ — обогащение алгебры $\mathscr{A}^*$ введением в сигнатуру последней функции $h(x_1, \dots, x_{n+1}, z_1, \dots, z_k)$, где

$$h(x_1, \dots, x_{n+1}, z_1, \dots, z_k) = \begin{cases} D_{s_1}(x_1, \dots, x_{n+1}) \to z_{s_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_{s_k}(x_1, \dots, x_{n+1}) \to z_{s_k}. \end{cases}$$

Таким образом, сигнатура алгебры $\mathscr{A}^{**}$ является конечным обогащением сигнатуры алгебры $\mathscr{A}$. Подставляя вместо переменных z_i произвольные n-местные $ECT(\mathscr{A})$-функции, мы очевидным образом получаем произвольные $(n+1)$-местные $ECT(\mathscr{A})$-функции. Итерации функции h позволяют подобным образом получить произвольную $ECT(\mathscr{A})$-функцию. Тем самым $ECT(\mathscr{A}) = T(\mathscr{A}^{**})$ и конечная порожденность клона $ECT(\mathscr{A})$ над клоном $T(\mathscr{A})$ для любой конечной алгебры $\mathscr{A}$ доказана.

Вопрос о конечной порожденности клонов $PCT(\mathscr{A})$ над клонами $T(\mathscr{A})$ для конечных алгебр $\mathscr{A}$ остается открытым.

Если алгебра $\mathscr{A} = \langle A; \sigma \rangle$ бесконечна, то клон $\exists^+ CT(\mathscr{A})$ также не обязан быть конечно порожденным над клоном $T(\mathscr{A})$. Действительно, пример равномерно локально конечной алгебры $\mathscr{A}$, построенной в доказательстве теоремы 1 работы [6], с помощью рассуждений, приведенных в доказательстве этой теоремы, демонстрирует, что клон $\exists^+ CT(\mathscr{A})$ не является конечно порожденным над клоном $T(\mathscr{A})$.

Вопрос о конечной порожденности клона $\exists^+ CT(\mathscr{A})$ над клоном $T(\mathscr{A})$ для любой конечной алгебры $\mathscr{A}$ остается открытым.

В связи с диаграммой $(*)$ представляются естественными вопросы о возможных случаях равенств между различными членами этой диаграммы. Как уже отмечалось, равенство $T(\mathscr{A}) = CT(\mathscr{A})$ для произвольной алгебры $\mathscr{A}$ равносильно ее дискриминаторности (в случае конечной $\mathscr{A}$ — ее квазипримальности, т. е. арифметичности и наследственной простоте). Равенство $T(\mathscr{A}) = ECT(\mathscr{A})$ для конечных алгебр $\mathscr{A}$ в силу теоремы 2 равносильно условию: каждая функция, коммутирующая с автоморфизмами алгебры $\mathscr{A}$ и такая, что подалгебры алгебры $\mathscr{A}$ замкнуты относительно этой функции, является термальной в алгебре $\mathscr{A}$. Конечные алгебры с таким условием изучались Квакенбушем в [7] под названием деми-семи-примальных, где доказано, что конечная алгебра $\mathscr{A}$ является деми-семи-примальной тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}$ арифметична, наследственно проста и любой внутренний изоморфизм алгебры $\mathscr{A}$ продолжим до ее автоморфизма. Так как равенство $T(\mathscr{A}) = ECT(\mathscr{A})$ равносильно конъюнкции равенств $T(\mathscr{A}) = CT(\mathscr{A}) = ECT(\mathscr{A})$, естественно предположить, что равенство $CT(\mathscr{A}) = ECT(\mathscr{A})$ эквивалентно для конечных алгебр $\mathscr{A}$ условию продолжимости внутренних изоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$ до ее автоморфизмов. Действительно, имеет место

Теорема 4. *Для конечных алгебр $\mathscr{A}$ равенство $CT(\mathscr{A}) = ECT(\mathscr{A})$ равносильно условию продолжимости любого внутреннего изоморфизма алгебры $\mathscr{A}$*

до ее автоморфизма.

В самом деле, если подобная продолжимость имеет место, то в силу характеризации функций из $CT(\mathscr{A})$ и $ECT(\mathscr{A})$, приведенной выше, равенство $CT(\mathscr{A}) = ECT(\mathscr{A})$ очевидно. Покажем, что верно и обратное. Пусть $\mathscr{A}$ — конечная алгебра, $\{a_1, \dots, a_n\}$ — подалгебра алгебры $\mathscr{A}$ и π — внутренний изоморфизм подалгебры $\{a_1, \dots, a_n\}$ на подалгебру $\{b_1, \dots, b_n\}$ такой, что $\pi(a_i) = b_i$ и π не имеет продолжений до автоморфизма алгебры $\mathscr{A}$. Заметим, что можно считать $n > 1$. Пусть $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ и $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$. Через $tp_{\bar{a}}(\bar{x})$ обозначим элементарный тип кортежа $\bar{a}$ в алгебре $\mathscr{A}$. Таким образом, для любого $\bar{c} = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$ из $\mathscr{A}$ $\mathscr{A} \models tp_{\bar{a}}(\bar{c})$ тогда и только тогда, когда существует автоморфизм δ алгебры $\mathscr{A}$ такой, что $\delta(\bar{a}) = \bar{c}$. Рассмотрим элементарно условный терм

$$t(\bar{x}) = \begin{cases} tp_{\bar{a}}(\bar{x}) \to x_1 \\ \neg tp_{\bar{a}}(\bar{x}) \to x_2. \end{cases}$$

Элементарно условно термальная функция $t(\bar{x})$ коммутирует со всеми автоморфизмами алгебры $\mathscr{A}$. Заметим, что $t(\bar{x})$ не коммутирует с внутренним изоморфизмом π. Действительно,

$$\pi(t(\bar{a})) = \pi(a_1) = b_1 \neq b_2 = t(\bar{b}) = t(\pi(\bar{a})).$$

Теорема доказана.

Очевидные примеры квазипримальных алгебр с внутренними изоморфизмами, не имеющими продолжений до автоморфизмов и конечных алгебр, у которых все внутренние изоморфизмы продолжимы до автоморфизмов, но не являющихся квазипримальными, доказывают независимость равенств $T(\mathscr{A}) = CT(\mathscr{A})$ и $CT(\mathscr{A}) = ECT(\mathscr{A})$ друг от друга.

Представляет интерес нахождение алгебраических условий на алгебру $\mathscr{A}$ для иных равенств между членами диаграммы $(*)$.

В работе [8] найдена синтаксическая характеризация формул, определяющих CT-функции. Напомним соответствующие определения. Формула $\Phi(\bar{x}, y)$ исчисления предикатов первого порядка называется *y-функциональной на классе алгебр K*, если имеет место $K \models \forall \bar{x} \exists! y \Phi(\bar{x}, y)$. Формула $\Phi(\bar{x}, y)$ называется *y-зависимой*, если любая атомная подформула формулы $\Phi(\bar{x}, y)$, содержащая переменную y, имеет вид $y = h(\bar{x})$, где $h(\bar{x})$ — терм, не содержащий y, и y не входит в отрицания атомных формул, входящих в $\Phi(\bar{x}, y)$. В [8] доказано следующее утверждение: *формула $\Phi(\bar{x}, y)$ исчисления предикатов первого порядка определяет условно термальные функции на алгебрах некоторого класса K тогда и только тогда, когда на классе K формула $\Phi(\bar{x}, y)$ эквивалентна некоторой бескванторной y-функциональной y-зависимой формуле.*

Очевидно, что любая PCT-функция ($\exists^+ CT$-функция, ECT-функция) определима некоторой бескванторной формулой (некоторой $\exists$-формулой, некоторой элементарной формулой) исчисления предикатов первого порядка. Представляет интерес описание формул исчисления предикатов, определяющих PCT ($\exists^+ CT, ECT$)-функции, подобное приведенному выше для CT-функций.

Теорема 5. *Формула $\Phi(\bar{x}, y)$ исчисления предикатов первого порядка определяет PCT-функции на алгебрах некоторого класса K тогда и только тогда, когда на классе K формула $\Phi(\bar{x}, y)$ эквивалентна некоторой бескванторной позитивной y-функциональной y-зависимой формуле.*

Доказательство. Непосредственно из определения позитивно условных термов замечается, что позитивно условно термальные функции определимы бескванторными позитивными y-функциональными y-зависимыми формулами исчисления предикатов первого порядка.

Покажем обратное. Пусть на некоторой алгебре $\mathscr{A}$ y-зависимая бескванторная позитивная формула $\Psi(\bar{x}, y)$ является y-функциональной.

Пусть

$$\Psi(\bar{x}, y) = \bigvee_{i=1}^{n} \&_{j=1}^{k_i} \Phi_{ij}(\bar{x}, y),$$

где $\Phi_{i,j}(\bar{x}, y)$ — атомные формулы. Прежде всего если какая-то из формул $\&_{j=1}^{k_i} \Phi_{ij}(\bar{x}, y)$ не содержит переменной y, то в силу функциональности формулы $\Psi(\bar{x}, y)$ эта формула $\&_{j=1}^{k_l} \Phi_{lj}(\bar{x}, y)$ либо ложна, либо следует из формулы

$$\bigvee_{i=1, i \neq l}^{n} \&_{j=1}^{k_i} \Phi_{ij}(\bar{x}, y).$$

Тем самым с точностью до эквивалентности можно считать, что переменная y содержится во всех формулах вида $\&_{j=1}^{k_l} \Phi_{lj}(\bar{x}, y)$. В силу y-зависимости формулы $\Psi(\bar{x}, y)$ эти вхождения y в формулы вида $\Phi_{l,j}(\bar{x}, y)$ должны иметь вид $y = h(\bar{x})$. С другой стороны, если формула $\&_{j=1}^{k_l} \Phi_{lj}(\bar{x}, y)$ содержит два подобных равенства $y = h(\bar{x})$ и $y = g(\bar{x})$, то конъюнкция $y = h(\bar{x}) \& y = g(\bar{x})$, входящая в $\&_{j=1}^{k_l} \Phi_{lj}(\bar{x}, y)$, может быть заменена в этой формуле конъюнкцией $y = h(\bar{x}) \& h(\bar{x}) = g(\bar{x})$. Таким образом, можно считать, что переменная y в каждой из формул $\&_{j=1}^{k_l} \Phi_{lj}(\bar{x}, y)$ встречается лишь один раз, т. е. для любого $l \leq n$ формула $\&_{j=1}^{k_l} \Phi_{lj}(\bar{x}, y)$ имеет вид

$$\&_{j=1}^{s_l} P_{lj}(\bar{x}) \& h_l(\bar{x}) = y,$$

где $P_{lj}(\bar{x})$ — атомные формулы.

Очевидным образом в силу y-функциональности формулы $\Psi(\bar{x}, y)$ имеет место

$$\mathscr{A} \models \forall \bar{x} \left(\bigvee_{i=1}^{n} \&_{j=1}^{s_j} P_{ij}(\bar{x}) \right)$$

и для $k \neq l \leq n$

$$\mathscr{A} \models \forall \bar{x} (\&_{j=1}^{s_k} P_{kj}(\bar{x}) \& \&_{j=1}^{s_l} P_{lj}(\bar{x}) \to h_k(\bar{x}) = h_l(\bar{x})).$$

В конечном итоге функции, определимые на K-алгебрах $\mathscr{A}$ формулой $\Psi(\bar{x}, y)$, совпадают с функциями, определимыми на алгебрах $\mathscr{A}$ позитивно условным термом

$$t(\bar{x} = \begin{cases} \&_{j=1}^{s_1} P_{1j}(\bar{x}) \to h_1(\bar{x}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \&_{j=1}^{s_n} P_{nj}(\bar{x}) \to h_n(\bar{x}), \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

$\exists$-формулу $\Phi(\bar{x}, y)$ назовем *y-зависимой от* $\bar{x}$, если любая атомная ее подформула, содержащая переменную y, имеет вид $y = h(\bar{x})$, где $h(\bar{x})$ — терм не содержащий ни y, ни связанных переменных формулы $\Phi(\bar{x}, y)$, и y не входит в отрицания атомных подформул формулы $\Phi(\bar{x}, y)$.

Абсолютно аналогично доказательству теоремы 5 доказывается

Теорема 6. *Формула $\Phi(\bar{x}, y)$ исчисления предикатов первого порядка определяет $\exists^+CT$-функции на алгебрах некоторого класса K тогда и только тогда, когда на K формула $\Phi(\bar{x}, y)$ эквивалентна некоторой позитивной y-функциональной y-зависимой от $\bar{x}$ $\exists$-формуле.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pinus A. G.* On the conditional terms and conditional identities on the universal algebras // Siberian Adv. in Math. 1998. V. 8, N 2. P. 96–109.
2. *Пинус А. Г.* Внутренние гомоморфизмы и позитивно условные термы // Алгебра и логика (в печати).
3. *Pinus A. G.* Conditional terms and their applications // Algebra: Proc. of Kurosh conference. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2000. P. 291–300.
4. *Пинус А. Г.* Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 4. С. 381–408.
5. *Пинус А. Г.* N-условные термы и n-условно рациональная эквивалентность // Изв. вузов. Математика. 1999. № 1. С. 36–40.
6. *Pinus A. G.* The positive and generalized discriminators don't exists // Discussiones Math., General Algebra (To appear).
7. *Quackenbush R. W.* Demi-semi-primal algebras and Mal'cev-type conditions // Math. Z. 1971. V. 122, N 2. P. 166–176.
8. *Пинус А. Г.* Характеризация условно термальных функций // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 161–165.

Статья поступила 28 июля 1999 г.,
окончательный вариант — 23 мая 2000 г.

г. Новосибирск