Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 512.57

КВАЗИТОЖДЕСТВА КОНГРУЭНЦ–ДИСТРИБУТИВНЫХ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР

А. М. Нуракунов

Аннотация: Найдены необходимые условия конечной аксиоматизируемости конгруэнц-дистрибутивных квазимногообразий алгебр. В частности, этим условиям удовлетворяют локально конечные (нётеровы, артиновы) конгруэнц-дистрибутивные квазимногообразия алгебр с конечно аксиоматизируемым классом конечно подпрямо неразложимых алгебр. Доказано, что любое относительное многообразие конгруэнц-дистрибутивного квазимногообразия алгебр, имеющее конечно аксиоматизируемый класс конечно подпрямо неразложимых алгебр, является конечно базируемым относительно данного квазимногообразия. Библиогр. 9.

Пусть $\mathbf{R}$ — произвольное квазимногообразие алгебр, A — алгебра, не обязательно лежащая в $\mathbf{R}$. Конгруэнцию $\theta \in \operatorname{Con} A$ будем называть $\mathbf{R}$-*конгруэнцией*, если $A/\theta \in \mathbf{R}$. Множество $\operatorname{Con}_{\mathbf{R}} A$ всех $\mathbf{R}$-конгруэнций алгебры A образует алгебраическую решетку относительно включения. Квазимногообразие алгебр $\mathbf{R}$ называется *конгруэнц-дистрибутивным*, если для любой алгебры A решетка $\mathbf{R}$-конгруэнций дистрибутивна. В случае, когда $\mathbf{R}$ — многообразие, это определение совпадает с определением конгруэнц-дистрибутивного многообразия. Алгебра A из квазимногообразия $\mathbf{R}$ называется *конечно подпрямо* $\mathbf{R}$-*неразложимой*, если для любого представления A в виде конечного подпрямого произведения $\prod\{A_i \in \mathbf{R} : i < n\}$ одно из проектирований $\pi_i : A \to A_i$ является изоморфизмом. Отметим, что если $\mathbf{R}$ конгруэнц-дистрибутивно, то любая конечно подпрямо $\mathbf{R}$-неразложимая алгебра является (абсолютно) конечно подпрямо неразложимой (см. [1, 2]).

Известно [3], что конгруэнц-дистрибутивное многообразие алгебр конечной сигнатуры с конечно аксиоматизируемым классом конечно подпрямо неразложимых алгебр имеет конечный базис тождеств. В серии работ (см. [1, 4, 5]) спрашивалось, всякое ли конгруэнц-дистрибутивное квазимногообразие алгебр $\mathbf{R}$ с конечно аксиоматизируемым классом конечно подпрямо $\mathbf{R}$-неразложимых алгебр имеет конечный базис квазитождеств? Положительное решение этого вопроса известно в двух частных случаях: для конечно порожденных квазимногообразий [1] и для квазимногообразий с эквационально определимыми пересечениями главных конгруэнций [5].

Будем говорить, что решетка L имеет *не более чем счетную ширину*, если любая антицепь в L не более чем счетна. Решетка L удовлетворяет *условию минимальности*, если любая цепь в L имеет наименьший элемент. Двойственным образом определяются решетки с *условием максимальности*. Будем говорить, что класс алгебр $\mathbf{R}$ *конечно аксиоматизируем относительно класса* $\mathbf{K}$, если существует такое конечное множество предложений Ψ, что $\mathbf{R} = \mathbf{K} \cap \operatorname{Mod}(\Psi)$. В настоящей работе доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{R}$ — *конгруэнц-дистрибутивное квазимногообразие алгебр конечной сигнатуры, для которого класс конечно подпрямо* $\mathbf{R}$*-неразложимых алгебр конечно аксиоматизируем. Тогда существует такое конечное число* $\mathbf{n}$ (*зависящее от* $\mathbf{R}$), *что если решетка конгруэнций* $\mathbf{R}$*-свободной алгебры ранга* $\mathbf{n}$ *имеет не более чем счетную ширину либо удовлетворяет условию минимальности или условию максимальности, то* $\mathbf{R}$ *имеет конечный базис квазитождеств.*

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{K}$ — *конгруэнц-дистрибутивное квазимногообразие алгебр конечной сигнатуры,* $\mathbf{R} = \mathbf{K} \cap \mathbf{V}$, *где* $\mathbf{V}$ — *некоторое многообразие алгебр, и класс конечно подпрямо* $\mathbf{R}$*-неразложимых алгебр конечно аксиоматизируем. Тогда* $\mathbf{R}$ *конечно аксиоматизируем относительно* $\mathbf{K}$.

Как следствие мы получаем положительный ответ на упомянутый выше вопрос для локально конечных квазимногообразий алгебр.

Терминология соответствует [2, 6].

§1. Определения и основные свойства

Далее считаем, что все алгебры имеют данную конечную сигнатуру Λ.

Пусть $\mathbf{R}$ — произвольное квазимногообразие алгебр и A — алгебра, не обязательно принадлежащая $\mathbf{R}$. Для любого множества $H \subseteq A \times A$ через $\theta_{\mathbf{R}}(H)$ обозначим наименьшую $\mathbf{R}$-конгруэнцию на A, содержащую множество H. Нулевую конгруэнцию $\{(a,a) : a \in A\}$ обозначаем через Δ_A или Δ, если не возникает недоразумений.

Лемма 1 [1, 6]. *Для любых алгебры* A *и непустого множества* $H \subseteq A \times A$ *пара* (a,b) *принадлежит* $\theta_{\mathbf{R}}(H)$ *тогда и только тогда, когда* $(a,b) \in H$ *либо найдется такое квазитождество*

$$\forall x_1 \dots x_n \Big(\mathop{\&}_{i<m} p_i(x_1,\dots,x_n) \approx q_i(x_1,\dots,x_n) \to p(x_1,\dots,x_n) \approx q(x_1,\dots,x_n) \Big),$$

истинное в $\mathbf{R}$, *что*

$$(p_i(a_1,\dots,a_n), q_i(a_1,\dots,a_n)) \in H,\ i<m, \quad (p(a_1,\dots,a_n), q(a_1,\dots,a_n)) = (a,b)$$

для некоторых элементов $a_1,\dots,a_n \in A$.

В случае, когда $\mathbf{R}$ является многообразием, индекс $\mathbf{R}$ в записи $\theta_{\mathbf{R}}(H)$ будем опускать.

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{R}$ — *конгруэнц-дистрибутивное квазимногообразие алгебр,* $A \in \mathbf{R}$ *и* $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathbf{R}} A$. *Тогда для любого подмножества* S *в* $\mathrm{Con}_{\mathbf{R}} A$

$$\theta \cap \bigvee^{\mathbf{R}} \{\rho : \rho \in S\} = \bigvee^{\mathbf{R}} \{\theta \cap \rho : \rho \in S\},$$

где знак $\bigvee^{\mathbf{R}}$ *обозначает сумму в решетке* $\mathrm{Con}_{\mathbf{R}} A$.

Доказательство. Действительно, пусть $a, b \in A$ и $(a,b) \in \theta$, $(a,b) \in \bigvee^{\mathbf{R}}\{\rho : \rho \in S\}$. Тогда по лемме 1 найдется такое квазитождество

$$\forall x_1 \dots x_n \Big(\mathop{\&}_{i<m} p_i(x_1,\dots,x_n) \approx q_i(x_1,\dots,x_n) \to p(x_1,\dots,x_n) \approx q(x_1,\dots,x_n) \Big),$$

истинное в $\mathbf{R}$, что для некоторых $a_1,\dots,a_n \in A$

$$(p_i(a_1,\dots,a_n), q_i(a_1,\dots,a_n)) \in \cup\{\rho : \rho \in S\}, \quad i<m,$$

и $(p(a_1,\dots,a_n),q(a_1,\dots,a_n))=(a,b)$. Следовательно,

$$(p_i(a_1,\dots,a_n),q_i(a_1,\dots,a_n))\in\cup\{\rho:\rho\in S_0\}$$

для некоторого конечного множества $S_0\subseteq S$. В силу дистрибутивности $\mathrm{Con}_{\mathbf{R}}\,A$ и леммы 1 получаем, что $(a,b)\in\bigvee^{\mathbf{R}}\{\theta\cap\rho:\rho\in S_0\}$, т. е. $(a,b)\in\bigvee^{\mathbf{R}}\{\theta\cap\rho:\rho\in S\}$. □

Будем говорить, что квазимногообразие $\mathbf{R}$ имеет *определимые пересечения главных* $\mathbf{R}$*-конгруэнций* (коротко, ОПГК), если существует такое конечное множество пар термов

$$\begin{aligned}&M(x,y,u,v,w_1,\dots,w_l)\\&\qquad=\{(\sigma_i(x,y,u,v,w_1,\dots,w_l),\tau_i(x,y,u,v,w_1,\dots,w_l)):i<k\},\end{aligned}$$

что для любых $A\in\mathbf{R}$ и $a,b,c,d\in A$ имеет место

$$\begin{aligned}&\theta_{\mathbf{R}}(a,b)\cap\theta_{\mathbf{R}}(c,d)=\Delta_A\\&\qquad\iff A\models\forall w_1\dots w_l\mathop{\&}_{i<k}\sigma_i(a,b,c,d,w_1,\dots,w_l)\approx\tau_i(a,b,c,d,w_1,\dots,w_l).\end{aligned}$$

В этом случае говорим, что формула

$$\begin{aligned}&\forall w_1\dots w_l\,\varphi(x,y,u,v,w_1,\dots,w_l)\\&\qquad=\forall w_1\dots w_l\mathop{\&}_{i<k}\sigma_i(x,y,u,v,w_1,\dots,w_l)\approx\tau_i(x,y,u,v,w_1,\dots,w_l)\end{aligned}$$

определяет пересечения главных $\mathbf{R}$*-конгруэнций*. Далее кортеж $w_1,\dots,w_l$ будем обозначать символом $\mathbf{w}$. Аналогичные обозначения используются и в других случаях.

Через $\mathbf{R}_{FSI}$ обозначим класс всех конечно подпрямо неразложимых алгебр из $\mathbf{R}$.

Лемма 2 [1, 5]. *Для квазимногообразия алгебр* $\mathbf{R}$ *следующие условия равносильны:*

a) *для любых* $A\in\mathbf{R}$ *и* $a,b,c,d\in A$ *имеет место*

$$\theta_{\mathbf{R}}(a,b)\cap\theta_{\mathbf{R}}(c,d)=\Delta_A\iff A\models\forall\mathbf{w}\,\varphi(a,b,c,d,\mathbf{w});$$

b) *для любых* $A\in\mathbf{R}$ *и* $a,b,c,d\in A$ *имеет место*

$$\theta_{\mathbf{R}}(a,b)\cap\theta_{\mathbf{R}}(c,d)=\bigvee^{\mathbf{R}}\{\theta_{\mathbf{R}}(M(a,b,c,d,\mathbf{e})):\mathbf{e}\in A^l\},$$

где $M(a,b,c,d,\mathbf{e})=\{(\sigma_i(a,b,c,d,\mathbf{e}),\tau_i(a,b,c,d,\mathbf{e})):i<k\}$;

c) $\mathbf{R}_{FSI}\models\forall xyuv(\forall\mathbf{w}\,\varphi(x,y,u,v,\mathbf{w})\leftrightarrow x\approx y\vee u\approx v)$.

Лемма 3 [1, 5]. *Квазимногообразие алгебр* $\mathbf{R}$ *имеет* ОПГК *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{R}$ *конгруэнц-дистрибутивно и класс* $\mathbf{R}_{FSI}$ *аксиоматизируем.*

Пусть $\mathbf{R}$ — квазимногообразие алгебр и формула $\forall\mathbf{w}\,\varphi(x,y,u,v,\mathbf{w})$ определяет пересечения главных $\mathbf{R}$-конгруэнций. Так как формула

$$\forall\mathbf{w}\,\varphi(x,y,u,v,\mathbf{w})\&\forall\mathbf{w}\,\varphi(y,x,u,v,\mathbf{w})\&\forall\mathbf{w}\,\varphi(u,v,x,y,\mathbf{w})$$

также определяет пересечения главных $\mathbf{R}$-конгруэнций, будем считать, что

$$\varphi(x,y,u,v,\mathbf{w})=\varphi(y,x,u,v,\mathbf{w})=\varphi(u,v,x,y,\mathbf{w}).\tag{1}$$

Очевидно, что в $\mathbf{R}$ истинны следующие предложения:

$$\varphi_0 = \forall xuv\mathbf{w}\,\varphi(x,x,u,v,\mathbf{w});\quad \varphi_1 = \forall xy(\forall \mathbf{w}\,\varphi(x,y,x,y,\mathbf{w}) \to x \approx y).$$

Пусть $\varphi(\varphi(x,y,u,v,\mathbf{w}_0),s,t,\mathbf{w}_1)$ обозначает формулу

$$\mathop{\&}_{i<k} \varphi(\sigma_i(x,y,u,v,\mathbf{w}_0),\tau_i(x,y,u,v,\mathbf{w}_0),s,t,\mathbf{w}_1).$$

Аналогично $\varphi(x,y,\varphi(u,v,s,t,\mathbf{w}_0),\mathbf{w}_1)$ служит сокращением для формулы

$$\mathop{\&}_{i<k} \varphi(x,y,\sigma_i(u,v,s,t,\mathbf{w}_0),\tau_i(u,v,s,t,\mathbf{w}_0),\mathbf{w}_1).$$

Покажем, что в $\mathbf{R}$ истинно также предложение

$$\varphi_2 = \forall xyuvst[\forall \mathbf{w}_0\mathbf{w}_1\,\varphi\big(\varphi(x,y,u,v,\mathbf{w}_0),s,t,\mathbf{w}_1) \\ \leftrightarrow \forall \mathbf{w}_0\mathbf{w}_1\,\varphi(x,y,\varphi(u,v,s,t,\mathbf{w}_0),\mathbf{w}_1)].$$

Действительно, пусть $A \in \mathbf{R}$ и для некоторых $a,b,c,d,g,h \in A$ имеет место

$$A \models \forall \mathbf{w}_0\mathbf{w}_1\,\varphi(\varphi(a,b,c,d,\mathbf{w}_0),g,h,\mathbf{w}_1).$$

Значит,

$$\theta_{\mathbf{R}}\big(\sigma_i(a,b,c,d,\mathbf{e}),\tau_i(a,b,c,d,\mathbf{e})\big) \cap \theta_{\mathbf{R}}(g,h) = \Delta$$

для всех $i < k$ и $\mathbf{e} \in A^l$. В силу конгруэнц-дистрибутивности $\mathbf{R}$ и следствия 1 получаем

$$\theta_{\mathbf{R}}(g,h) \cap \bigvee^{\mathbf{R}}\{\theta_{\mathbf{R}}(M(a,b,c,d,\mathbf{e})) : \mathbf{e} \in A^l\} = \Delta.$$

Согласно лемме 2

$$\bigvee^{\mathbf{R}}\{\theta_{\mathbf{R}}(M(a,b,c,d,\mathbf{e})) : \mathbf{e} \in A^l\} = \theta_{\mathbf{R}}(a,b) \cap \theta_{\mathbf{R}}(c,d).$$

Отсюда

$$\theta_{\mathbf{R}}(g,h) \cap \bigvee^{\mathbf{R}}\{\theta_{\mathbf{R}}(M(a,b,c,d,\mathbf{e})) : \mathbf{e} \in A^l\} = \theta_{\mathbf{R}}(a,b) \cap \theta_{\mathbf{R}}(c,d) \cap \theta_{\mathbf{R}}(g,h) = \Delta.$$

Таким образом, $A \models \forall \mathbf{w}_0\mathbf{w}_1\,\varphi\big(\varphi(a,b,c,d,\mathbf{w}_0),g,h,\mathbf{w}_1\big)$ равносильно тому, что

$$\theta_{\mathbf{R}}(a,b) \cap \theta_{\mathbf{R}}(c,d) \cap \theta_{\mathbf{R}}(g,h) = \Delta. \tag{$*$}$$

Аналогично получаем, что $A \models \forall \mathbf{w}_0\mathbf{w}_1\,\varphi\big(a,b,\varphi(c,d,g,h,\mathbf{w}_0),\mathbf{w}_1\big)$ также равносильно $(*)$. Следовательно, в $\mathbf{R}$ истинно φ_2.

§ 2. Классы Mod(˘(˚))

Пусть $\mathbf{R}$ — квазимногообразие, формула $\forall \mathbf{w}\,\varphi(x,y,u,v,\mathbf{w})$ определяет пересечения главных $\mathbf{R}$-конгруэнций и ψ — предложение вида

$$\forall \mathbf{x}\Big(\forall \mathbf{y} \mathop{\&}_{i<m} p_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) \approx q_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to \forall \mathbf{z} \mathop{\&}_{i<n} s_i(\mathbf{x},\mathbf{z}) \approx t_i(\mathbf{x},\mathbf{z})\Big). \tag{2}$$

Через $\Phi(\psi)$ обозначим предложение вида

$$\forall uv\mathbf{x}\Big[\forall \mathbf{y}\mathbf{w} \mathop{\&}_{i<m} \varphi(p_i(\mathbf{x},\mathbf{y}),q_i(\mathbf{x},\mathbf{y}),u,v,\mathbf{w}) \to \forall \mathbf{z}\mathbf{w} \mathop{\&}_{i<n} \varphi\big(s_i(\mathbf{x},\mathbf{z}),t_i(\mathbf{x},\mathbf{z}),u,v,\mathbf{w})\Big].$$

Лемма 4. *Пусть κ — квазитождество и $\mathbf{R} \models \kappa$. Тогда $\mathbf{R} \models \Phi(\kappa)$. В частности, в $\mathbf{R}$ истинны следующие предложения:*

$$\varphi_3 = \forall xyzuv[\forall \mathbf{w}(\varphi(x,y,u,v,\mathbf{w}) \& \varphi(y,z,u,v,\mathbf{w})) \to \forall \mathbf{w}\, \varphi(x,z,u,v,\mathbf{w})]$$

и для всякой n-арной основной операции f

$$\varphi_f = \forall \mathbf{x} yuv \mathop{\&}_{i=1}^{n} \bigl[\forall \mathbf{w} \varphi(x_i,y,u,v,\mathbf{w}) \to \forall \mathbf{w}\, \varphi(f(\mathbf{x}), f\bigl(\mathbf{x}_y^i\bigr), u, v, \mathbf{w})\bigr],$$

где $\mathbf{x} = x_1,\ldots,x_n$, а $\mathbf{x}_y^i$ получается из $\mathbf{x}$ заменой x_i на y.

Доказательство. Пусть κ имеет вид

$$\forall \mathbf{x}\Bigl(\mathop{\&}_{i<m} p_i(\mathbf{x}) \approx q_i(\mathbf{x}) \to p(\mathbf{x}) \approx q(\mathbf{x})\Bigr),$$

где $\mathbf{x} = x_1,\ldots,x_r$. Предположим, что $A \in \mathbf{R}$ и для некоторых $a,b \in A$, $\mathbf{e} \in A^r$ выполняется

$$A \models \forall \mathbf{w} \mathop{\&}_{i<m} \varphi(p_i(\mathbf{e}), q_i(\mathbf{e}), a, b, \mathbf{w}).$$

Значит, $\theta_{\mathbf{R}}(a,b) \cap \theta_{\mathbf{R}}(p_i(\mathbf{e}), q_i(\mathbf{e})) = \Delta$ для всех $i < m$. В силу конгруэнц-дистрибутивности $\mathbf{R}$ (лемма 3) получаем

$$\theta_{\mathbf{R}}(a,b) \cap \bigvee_{i<m}^{\mathbf{R}} \theta_{\mathbf{R}}\bigl(p_i(\mathbf{e}), q_i(\mathbf{e})\bigr) = \Delta.$$

Поскольку $A \models \kappa$, имеем

$$\bigvee_{i<m}^{\mathbf{R}} \theta_{\mathbf{R}}(p_i(\mathbf{e}), q_i(\mathbf{e})) \supseteq \theta_{\mathbf{R}}(p(\mathbf{e}), q(\mathbf{e})),$$

так что $\theta_{\mathbf{R}}(a,b) \cap \theta_{\mathbf{R}}\bigl(p(\mathbf{e}), q(\mathbf{e})\bigr) = \Delta$. Следовательно,

$$A \models \forall \mathbf{w}\, \varphi\bigl(p(\mathbf{e}), q(\mathbf{e}), a, b, \mathbf{w}\bigr). \quad \square$$

Как обычно, для множеств предложений Σ_0 и Σ_1 пишем $\Sigma_0 \models \Sigma_1$, если $\mathrm{Mod}(\Sigma_0) \supseteq \mathrm{Mod}(\Sigma_1)$.

Лемма 5. *Для любого квазитождества κ выполняется $\varphi_0, \varphi_1, \Phi(\kappa) \models \kappa$.*

Доказательство. Пусть κ имеет вид

$$\forall \mathbf{x}\Bigl(\mathop{\&}_{i<m} p_i(\mathbf{x}) \approx q_i(\mathbf{x}) \to p(\mathbf{x}) \approx q(\mathbf{x})\Bigr).$$

Предположим, что $A \models \varphi_0, \varphi_1, \Phi(\kappa)$ и для некоторого $\mathbf{e} \in A^r$ имеем $p_i(\mathbf{e}) = q_i(\mathbf{e})$, $i < m$. Тогда в силу φ_0 получаем

$$A \models \forall \mathbf{w} \mathop{\&}_{i<m} \varphi\bigl(p_i(\mathbf{e}), q_i(\mathbf{e}), p(\mathbf{e}), q(\mathbf{e}), \mathbf{w}\bigr).$$

Отсюда согласно формуле $\Phi(\kappa)$

$$A \models \forall \mathbf{w} \varphi(p(\mathbf{e}), q(\mathbf{e}), p(\mathbf{e}), q(\mathbf{e}), \mathbf{w}),$$

и по формуле φ_1 выводим $p(\mathbf{e}) = q(\mathbf{e})$. $\square$

Лемма 6. *Для любого предложения ψ вида* (2) *выполняется* $\varphi_2, \Phi(\psi) \models \Phi(\Phi(\psi))$.

Доказательство. Заметим, что формула $\Phi(\Phi(\psi))$ эквивалентна следующей:

$$\forall \mathbf{x} u_0 v_0 u_1 v_1 \Big[\forall \mathbf{y} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 \mathop{\&}_{i<m} \varphi(\varphi(p_i(\mathbf{x},\mathbf{y}), q_i(\mathbf{x},\mathbf{y}), u_0, v_0, \mathbf{w}_0), u_1, v_1, \mathbf{w}_1) \\ \to \forall \mathbf{z} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 \mathop{\&}_{i<n} \varphi(\varphi(s_i(\mathbf{x},\mathbf{z}), t_i(\mathbf{x},\mathbf{z}), u_0, v_0, \mathbf{w}_0), u_1, v_1, \mathbf{w}_1)\Big].$$

Пусть $A \models \varphi_2, \Phi(\psi)$ и для некоторых $a, b, c, d \in A$, $\mathbf{e} \in A^r$ имеет место

$$A \models \forall \mathbf{y} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 \mathop{\&}_{i<m} \varphi(\varphi(p_i(\mathbf{e},\mathbf{y}), q_i(\mathbf{e},\mathbf{y}), a, b, \mathbf{w}_0), c, d, \mathbf{w}_1).$$

Тогда по формуле φ_2

$$A \models \forall \mathbf{y} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 \mathop{\&}_{i<m} \varphi(p_i(\mathbf{e},\mathbf{y}), q_i(\mathbf{e},\mathbf{y}), \varphi(a, b, c, d, \mathbf{w}_0), \mathbf{w}_1).$$

В силу формулы $\Phi(\psi)$ отсюда следует, что

$$A \models \forall \mathbf{z} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 \mathop{\&}_{i<n} \varphi(s_i(\mathbf{e},\mathbf{z}), t_i(\mathbf{e},\mathbf{z}), \varphi(a, b, c, d, \mathbf{w}_0), \mathbf{w}_1).$$

Применяя снова φ_2, получаем

$$A \models \forall \mathbf{z} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 \mathop{\&}_{i<n} \varphi(\varphi(s_i(\mathbf{e},\mathbf{z}), t_i(\mathbf{e},\mathbf{z}), a, b, \mathbf{w}_0), c, d, \mathbf{w}_1).$$

Таким образом, $A \models \Phi(\Phi(\psi))$. $\square$

Лемма 7. *Пусть A — произвольная алгебра, X — непустое подмножество $A \times A$ и θ — такая конгруэнция на A, что* $A/\theta \models \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_f (f \in \Lambda), \Phi(\psi)$, *где ψ — предложение вида* (2). *Тогда множество*

$$\Phi_\theta(X) = \{(a,b) \in A \times A : A/\theta \models \forall \mathbf{w}\, \varphi(a/\theta, b/\theta, c/\theta, d/\theta, \mathbf{w}) \text{ для всех } (c,d) \in X\}$$

является конгруэнцией на A, причем $X \cap \Phi_\theta(X) \subseteq \theta$ и $A/\Phi_\theta(X) \models \psi, \Phi(\psi)$.

Доказательство. Для краткости обозначим $\chi = \Phi_\theta(X)$. Ввиду соглашения (1) отношение χ симметрично, а из истинности на A/θ предложений φ_0 и φ_3 следует, что отношение χ также рефлексивно и транзитивно. Далее, в силу транзитивности χ и истинности на A/θ предложений φ_f, $f \in \Lambda$, получаем, что χ замкнуто относительно основных операций алгебры A. Таким образом, $\chi \in \operatorname{Con} A$.

Допустим $(a,b) \in X \cap \chi$. Тогда $A/\theta \models \forall \mathbf{w}\, \varphi(a/\theta, b/\theta, a/\theta, b/\theta, \mathbf{w})$ и по формуле φ_1 получаем $a/\theta = b/\theta$.

Далее, предположим, что для некоторого $\mathbf{e} \in A^r$ имеет место

$$A/\chi \models \forall \mathbf{y} \mathop{\&}_{i<m} p_i(\mathbf{e}/\chi, \mathbf{y}) \approx q_i(\mathbf{e}/\chi, \mathbf{y}),$$

где $\mathbf{e}/\chi = e_1/\chi, \ldots, e_r/\chi$. Тогда $\big(p_i(\mathbf{e},\mathbf{e}'), q_i(\mathbf{e},\mathbf{e}')\big) \in \chi$ для всех $i < m$ и $\mathbf{e} \in A^{r'}$ (где r' — длина $\mathbf{y}$). Это означает, что

$$A/\theta \models \forall \mathbf{y} \mathbf{w} \mathop{\&}_{i<n} \varphi(p_i(\mathbf{e},\mathbf{y})/\theta, q_i(\mathbf{e},\mathbf{y})/\theta, c/\theta, d/\theta, \mathbf{w})$$

для всех $(c,d) \in X$. Последнее, в свою очередь, означает, что $(s_i(\mathbf{e},\mathbf{e}''), t_i(\mathbf{e},\mathbf{e}''))$ $\in \chi$, для всех $i < n$ и $\mathbf{e}'' \in A^{r''}$ (где r'' — длина $\mathbf{z}$). Получили, что

$$A/\chi \models \forall \mathbf{z} \mathop{\&}_{i<n} s_i(\mathbf{e}/\chi, \mathbf{z}) \approx t_i(\mathbf{e}/\chi, \mathbf{z}).$$

Таким образом, $A/\chi \models \psi$.

Наконец, так как $A/\theta \models \varphi_2, \Phi(\psi)$, согласно лемме 6 $A/\theta \models \Phi(\Phi(\psi))$. Поскольку $\Phi(\psi)$ имеет вид, аналогичный (2), по доказанному $A/\chi \models \Phi(\psi)$. $\square$

В случае, когда $\theta = \Delta$, индекс θ в записи $\Phi_\theta(X)$ будем опускать и при $X = (a,b)$ записываем $\Phi(X)$ в виде $\Phi(a,b)$.

Пусть Σ — множество квазитождеств и $\mathbf{Q} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Положим

$$\Phi(\Sigma) = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \cup \{\varphi_f : f \in \Lambda\} \cup \{\Phi(\varphi_1)\} \cup \{\Phi(\kappa) : \kappa \in \Sigma\}$$

и $\mathbf{K} = \mathrm{Mod}(\Phi(\Sigma))$. Через $\mathrm{Con}_\mathbf{K} A$ обозначим множество $\mathbf{K}$-*конгруэнций*, т. е. таких конгруэнций θ алгебры A, что $A/\theta \in \mathbf{K}$. Так как единичная алгебра лежит в $\mathbf{K}$, множество $\mathrm{Con}_\mathbf{K} A$ непусто. Нетрудно проверить, что класс $\mathbf{K}$ замкнут относительно подпрямых произведений. Следовательно, множество $\mathrm{Con}_\mathbf{K} A$ замкнуто относительно произвольных пересечений (и образует полную решетку относительно включения). Для любой пары $(a,b) \in A \times A$ через $\theta_\mathbf{K}(a,b)$ обозначим наименьшую $\mathbf{K}$-конгруэнцию на A, содержащую (a,b). Отметим, что решетка $\mathrm{Con}_\mathbf{K} A$ в общем случае не является алгебраической.

Алгебра $A \in \mathbf{K}$ называется *конечно подпрямо* $\mathbf{K}$-*неразложимой*, если для любого представления алгебры A в виде конечного подпрямого произведения $\prod\{A_i \in \mathbf{K} : i < n\}$ одно из проектирований π_i является изоморфизмом, т. е. если нуль решетки $\mathrm{Con}_\mathbf{K} A$ неразложим. Класс всех конечно подпрямо $\mathbf{K}$-неразложимых алгебр будем обозначать через $\mathbf{K}_{FSI}$.

Решетка L называется *решеткой с относительными псевдодополнениями*, если для любых $a, b \in L$ множество $\{c \in L : a \wedge c \leqslant b\}$ имеет наибольший элемент (называемый *псевдодополнением* a *относительно* b). Нетрудно проверить, что всякая решетка с относительными псевдодополнениями дистрибутивна.

Следствие 2. *Пусть* Σ *— произвольное множество квазитождеств и* $\mathbf{K} = \mathrm{Mod}(\Phi(\Sigma))$. *Тогда*

(a) *для любых* $A \in \mathbf{K}$ *и* $a, b, c, d \in A$ *имеет место*

$$\theta_\mathbf{K}(a,b) \cap \theta_\mathbf{K}(c,d) = \Delta \iff \theta(a,b) \cap \theta(c,d) = \Delta \iff A \models \forall \mathbf{w}\, \varphi(a,b,c,d,\mathbf{w}).$$

В частности, всякая конечно подпрямо $\mathbf{K}$-*неразложимая алгебра является конечно подпрямо неразложимой.*

(b) $\mathbf{K}_{FSI} \models \forall xyuv(\forall \mathbf{w}\, \varphi(x,y,u,v,\mathbf{w}) \leftrightarrow x \approx y \vee u \approx v)$.

(c) *Для любой алгебры* A *решетка* $\mathrm{Con}_\mathbf{K} A$ *является полной дистрибутивной решеткой с относительными псевдодополнениями.*

Доказательство. (a) Пусть $\theta(a,b) \cap \theta(c,d) = \Delta$. Тогда пара гомоморфизмов $f_0 : a \mapsto a/\theta(a,b)$, $a \in A$, и $f_1 : a \mapsto a/\theta(c,d)$, $a \in A$, индуцирует подпрямое вложение A в $A/\theta(a,b) \times A/\theta(c,d)$. Из истинности тождества φ_0 на A следует, что $f_i(A) \models \forall \mathbf{w}\, \varphi(f_i(a), f_i(b), f_i(c), f_i(d), \mathbf{w})$, $i = 0, 1$. Поэтому $A \models \forall \mathbf{w}\, \varphi(a,b,c,d,\mathbf{w})$.

Обратно, пусть $A \models \forall \mathbf{w}\, \varphi(a,b,c,d,\mathbf{w})$. Тогда $(a,b) \in \Phi(c,d)$ и в силу леммы 7 $\theta_\mathbf{K}(a,b) \subseteq \Phi(c,d)$. Отсюда получаем, что $(c,d) \in \Phi(\theta_\mathbf{K}(a,b))$ и ввиду той же леммы $\theta_\mathbf{K}(c,d) \subseteq \Phi(\theta_\mathbf{K}(a,b))$, причем $\Phi(\theta_\mathbf{K}(a,b)) \cap \theta_\mathbf{K}(a,b) = \Delta$. Следовательно, $\theta_\mathbf{K}(c,d) \cap \theta_\mathbf{K}(a,b) = \Delta = \theta(a,b) \cap \theta(c,d)$.

(b) непосредственно следует из п. (a).

(c) Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Con}_{\mathbf{K}} A$ такие, что $\alpha \cap \gamma \subseteq \beta$. Положим $\theta = \alpha \cap \gamma$. Тогда $\alpha/\theta = \{(a/\theta, b/\theta) : (a,b) \in \alpha\}$ и $\gamma/\theta = \{(c/\theta, d/\theta) : (c,d) \in \gamma\}$ являются $\mathbf{K}$-конгруэнциями на A/θ, причем $\alpha/\theta \cap \gamma/\theta = \Delta_{A/\theta}$. Согласно (a) получаем, что $A/\theta \models \forall \mathbf{w}\, \varphi(a/\theta, b/\theta, c/\theta, d/\theta, \mathbf{w})$ для всех $(a,b) \in \alpha$ и $(c,d) \in \gamma$; и поскольку $\theta \subseteq \beta$, то $A/\beta \models \forall \mathbf{w}\, \varphi(a/\beta, b/\beta, c/\beta, d/\beta, \mathbf{w})$. Таким образом, $\gamma \subseteq \Phi_\beta(\alpha)$. Следовательно, ввиду леммы 7 $\Phi_\beta(\alpha)$ — псевдодополнение α относительно β. □

Лемма 8. *Пусть Σ — любое множество квазитождеств, $\mathbf{K} = \mathrm{Mod}(\Phi(\Sigma))$ и $A \in \mathbf{K}$. Если $\mathrm{Con}\, A$ имеет не более чем счетную ширину либо удовлетворяет условию минимальности или максимальности, то алгебра A представима в виде подпрямого произведения конечно подпрямо $\mathbf{K}$-неразложимых алгебр.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любых различных $a, b \in A$ существует неразложимая $\mathbf{K}$-конгруэнция θ, для которой $(a,b) \notin \theta$. Предположим противное. Тогда существует такая пара $(a,b) \in A \times A$, что любая $\mathbf{K}$-конгруэнция, не содержащая (a,b), разложима в $\mathrm{Con}_{\mathbf{K}} A$.

Пусть I обозначает множество всех конечных слов в алфавите $\{0,1\}$, пустое слово обозначаем через $\varnothing$. Для $\varepsilon, \varepsilon' \in I$ пишем $\varepsilon \leqslant \varepsilon'$, если $\varepsilon' = \varepsilon\delta$ для некоторого $\delta \in I$. Таким образом, на множестве I получаем структуру 2-дерева. Будем строить по индукции два семейства $\{\theta_\varepsilon : \varepsilon \in I\}$ и $\{\eta_\varepsilon : \varepsilon \in I\}$ в $\mathrm{Con}_{\mathbf{K}} A$ следующим образом.

1. Полагаем $\theta_\varnothing = \theta_{\mathbf{K}}(a_\varnothing, b_\varnothing)$, где $a_\varnothing = a$ и $b_\varnothing = b$.

2. Пусть для $\varepsilon \in I$ построена $\theta_\varepsilon = \theta_{\mathbf{K}}(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$, причем $\Delta \neq \theta_\varepsilon \subseteq \theta_\varnothing$. Полагаем $\eta_\varepsilon = \Phi(\theta_\varepsilon)$, тогда $\eta_\varepsilon \not\ni (a_\varepsilon, b_\varepsilon)$. Следовательно, $\eta_\varepsilon \not\ni (a,b)$, и найдутся такие $\bar\eta_{\varepsilon 0}, \bar\eta_{\varepsilon 1} \in \mathrm{Con}_{\mathbf{K}} A$, что $\bar\eta_{\varepsilon 0} \cap \bar\eta_{\varepsilon 1} = \eta_\varepsilon$ и $\bar\eta_{\varepsilon i} \neq \eta_\varepsilon$, $i = 0,1$. Поскольку η_ε — наибольшая $\mathbf{K}$-конгруэнция со свойством $\eta_\varepsilon \cap \theta_\varepsilon = \Delta$, найдутся $(a_{\varepsilon i}, b_{\varepsilon i}) \in \big(\theta_\varepsilon \cap \bar\eta_{\varepsilon i}\big) \setminus \Delta$, $i = 0,1$. Полагаем $\theta_{\varepsilon i} = \theta_{\mathbf{K}}(a_{\varepsilon i}, b_{\varepsilon i})$, $i = 0,1$. Заметим, что $\theta_{\varepsilon 0}, \theta_{\varepsilon 1} \subseteq \theta_\varepsilon \subseteq \theta_\varnothing$ и $\theta_{\varepsilon 0} \cap \theta_{\varepsilon 1} \subseteq \theta_\varepsilon \cap \bar\eta_{\varepsilon 0} \cap \bar\eta_{\varepsilon 1} = \theta_\varepsilon \cap \eta_\varepsilon = \Delta$.

Из построения следует, что для любых $\varepsilon < \varepsilon' \in I$ выполняется $\theta_\varepsilon \supset \theta_{\varepsilon'}$ и $\eta_\varepsilon \subset \eta_{\varepsilon'}$. Кроме того, если $\varepsilon, \delta \in I$ несравнимы, то $\theta_\varepsilon \cap \theta_\delta = \Delta$. Так как η_ε — псевдодополнение θ_ε, получаем, что для всех $\varepsilon, \delta \in I$

$$\eta_\varepsilon \ni (a_\delta, b_\delta) \iff \varepsilon \text{ и } \delta \text{ несравнимы}. \tag{3}$$

Пусть B — ветвь (максимальная цепь) в I, положим $\eta_B = \bigcup\limits_{\varepsilon \in B} \eta_\varepsilon$. В силу (3) получаем, что для различных ветвей B и C в I конгруэнции η_B и η_C несравнимы. Таким образом, $\{\eta_B : B \text{ — цепь в } I\}$ — континуальная антицепь в $\mathrm{Con}\, A$. Очевидно также, что $\mathrm{Con}\, A$ не удовлетворяет ни условию минимальности, ни условию максимальности. □

§ 3. Доказательства теорем 1 и 2

Через $\mathbf{V}(\mathbf{R})$ обозначим наименьшее многообразие, содержащее $\mathbf{R}$.

Лемма 9 [4, 5]. *Пусть $\mathbf{R}$ — конгруэнц-дистрибутивное квазимногообразие алгебр, конечно аксиоматизируемое относительно $\mathbf{V}(\mathbf{R})$, и класс конечно подпрямо неразложимых алгебр из $\mathbf{R}$ конечно аксиоматизируем. Тогда $\mathbf{R}$ имеет конечный базис квазитождеств.*

Пусть $\mathbf{n}(\psi)$ — число переменных, входящих в запись формулы ψ. Для множества формул Ψ положим $\mathbf{n}(\Psi) = \max\{\mathbf{n}(\psi) : \psi \in \Psi\}$, если такое число существует, и $\mathbf{n}(\Psi) = \infty$ в противном случае. Пусть также $\mathbf{n}(\Lambda)$ обозначает наибольшую из арностей функциональных символов сигнатуры Λ.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathbf{R} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Id} \cup \Sigma)$, где Id — множество тождеств, а Σ — множество квазитождеств, не являющихся тождествами. Так как класс $\mathbf{R}_{FSI}$ аксиоматизируем, то согласно леммам 2 и 3 существует формула $\forall \mathbf{w}\, \varphi(x, y, u, v, \mathbf{w})$, определяющая пересечения главных $\mathbf{R}$-конгруэнций, и

$$\mathbf{R}_{FSI} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Id} \cup \Sigma \cup \{\forall xyuv(\forall \mathbf{w}\, \varphi(x, y, u, v, \mathbf{w}) \leftrightarrow x \approx y \vee u \approx v\big)\}).$$

Отсюда в силу конечной аксиоматизируемости $\mathbf{R}_{FSI}$ найдется такое конечное множество Σ_0, лежащее в Σ, что

$$\mathbf{R}_{FSI} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Id} \cup \Sigma_0 \cup \{\forall xyuv(\forall \mathbf{w}\, \varphi(x, y, u, v, \mathbf{w}) \leftrightarrow x \approx y \vee u \approx v)\}).$$

Положим $\mathbf{K} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Id} \cup \Phi(\Sigma_0))$. Согласно лемме 4 получаем $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{K}$.

Пусть $\varphi(x, y, u, v, \mathbf{w})$ имеет вид

$$\mathop{\&}_{i<k} \sigma_i(x, y, u, v, \mathbf{w}) \approx \tau_i(x, y, u, v, \mathbf{w}).$$

Тогда

$$M(x, y, u, v, \mathbf{w}) = \{(\sigma_i(x, y, u, v, \mathbf{w}), \tau_i(x, y, u, v, \mathbf{w})) : i < k\}.$$

Рассмотрим произвольное квазитождество $\psi \in \Sigma_0$. Тогда $\Phi(\psi)$ имеет вид

$$\forall uv\mathbf{x}\Big[\forall \mathbf{w} \mathop{\&}_{i<m} \varphi(p_i(\mathbf{x}), q_i(\mathbf{x}), u, v, \mathbf{w}) \to \forall \mathbf{w}\, \varphi\big(p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}), u, v, \mathbf{w})\Big].$$

Пусть F — свободная алгебра ранга $\mathbf{n}(\Phi(\psi))$ со свободными порождающими $u, v, \mathbf{x}, \mathbf{w}$. Так как $\Phi(\psi)$ истинно в $\mathbf{R}$, то

$$\theta_{\mathbf{R}}(\cup\{M(p_i(\mathbf{x}), q_i(\mathbf{x}), u, v, \mathbf{t}) : i < m, \mathbf{t} \in F^l\}) \supseteq \theta_{\mathbf{R}}(M(p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}), u, v, \mathbf{w})).$$

Следовательно, по лемме 1 найдется такое конечное множество $T \subseteq F^l$, что в $\mathbf{R}$ истинно квазитождество

$$\psi' = \forall uv\mathbf{x}\mathbf{w}\Big[\mathop{\&}_{\mathbf{t}\in T} \mathop{\&}_{i<m} \varphi(p_i(\mathbf{x}), q_i(\mathbf{x}), u, v, \mathbf{t}) \to \varphi(p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}), u, v, \mathbf{w})\Big].$$

Очевидно, что $\mathbf{n}(\psi') = \mathbf{n}(\Phi(\psi))$ и $\psi' \models \psi$. Таким же образом соответствующие квазитождества находятся и для остальных предложений из $\Phi(\Sigma_0)$ — $\varphi_0, \ldots, \varphi_3$, $\Phi(\varphi_1)$ и φ_f, $f \in \Lambda$. Пусть Σ_1 — множество квазитождеств, построенных таким способом из всех предложений множества $\Phi(\Sigma_0)$. Тогда Σ_1 — конечное множество и $\mathrm{Mod}(\mathrm{Id} \cup \Sigma_1) \subseteq \mathbf{K}$.

Определим $\mathbf{n}$ равным $\mathbf{n}\big(\Phi(\Sigma_1)\big)$ и допустим, что решетка конгруэнций $\mathbf{R}$-свободной алгебры ранга $\mathbf{n}$ удовлетворяет одному из необходимых условий. Покажем, что $\mathrm{Mod}(\mathrm{Id} \cup \Sigma_1) = \mathrm{Mod}(\mathrm{Id} \cup \Phi(\Sigma_1))$. Согласно лемме 5 $\mathrm{Mod}(\mathrm{Id} \cup \Sigma_1) \supseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Id} \cup \Phi(\Sigma_1))$. Пусть $A \in \mathrm{Mod}(\mathrm{Id} \cup \Sigma_1) \setminus \mathrm{Mod}(\mathrm{Id} \cup \Phi(\Sigma_1))$. Тогда найдется такое предложение ψ из $\Phi(\Sigma_1)$ вида

$$\forall uv\mathbf{x}\Big[\forall \mathbf{w} \mathop{\&}_{i<m} \varphi(p_i(\mathbf{x}), q_i(\mathbf{x}), u, v, \mathbf{w}) \to \forall \mathbf{w}\, \varphi(p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}), u, v, \mathbf{w})\Big],$$

что $A \models \neg\psi$, т. е. для некоторых $\mathbf{a}$, b, c, $\mathbf{d}$ из A имеет место

$$A \models \forall \mathbf{w} \mathop{\&}_{i<m} \varphi(p_i(\mathbf{a}), q_i(\mathbf{a}), b, c, \mathbf{w}) \& \neg\varphi(p(\mathbf{a}), q(\mathbf{a}), b, c, \mathbf{d}).$$

Так как $\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}\cup\Sigma_1)$ — квазимногообразие, можно считать, что A порождается элементами $\mathbf{a}$, b, c, $\mathbf{d}$. Тогда число порождающих алгебры A не превосходит $\mathbf{n}$. По предположению решетка $\mathrm{Con}\,A$ удовлетворяет условиям леммы 8. Поскольку $A\in\mathbf{K}$, то A представима в виде подпрямого произведения алгебр из $\mathbf{K}_{FSI}$. Согласно лемме 5 и следствию 2

$$\mathbf{K}_{FSI}\models \mathrm{Id}\cup\Sigma_0\cup\{\forall xyuv(\forall \mathbf{w}\,\varphi(x,y,u,v,\mathbf{w})\leftrightarrow x\approx y\vee u\approx v)\}.$$

Следовательно, $\mathbf{K}_{FSI}\subseteq\mathbf{R}_{FSI}$ и $A\in\mathbf{R}$. Но по лемме 4 $\mathbf{R}\subseteq\mathrm{Mod}(\Phi(\Sigma_1))$, т. е. $A\in\mathrm{Mod}(\Phi(\Sigma_1))$; противоречие. Значит, $\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}\cup\Sigma_1)=\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}\cup\Phi(\Sigma_1))$. По доказанному $\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}\cup\Phi(\Sigma_1))_{FSI}\subseteq\mathbf{K}_{FSI}\subseteq\mathbf{R}_{FSI}$. Следовательно, $\mathbf{R}=\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}\cup\Phi(\Sigma_1))=\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}\cup\Sigma_1)$. Так как Σ_1 конечно, то $\mathbf{R}$ конечно аксиоматизируемо относительно $\mathbf{V}(\mathbf{R})$. Применяя лемму 9, получаем, что $\mathbf{R}$ имеет конечный базис квазитождеств. □

Пусть $\mathbf{K}$ — класс алгебр и $\mathbf{R}$ — квазимногообразие, содержащееся в $\mathbf{K}$. Под *рангом* $\mathbf{R}$ *относительно* $\mathbf{K}$ будем понимать число, равное $\min\{\mathbf{n}(\Sigma):\Sigma$ — базис квазитождеств $\mathbf{R}$ относительно $\mathbf{K}\}$, если такое число существует, и ∞ в противном случае. Из доказательства теоремы 1 следует

Теорема 1′. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— квазимногообразие алгебр, формула* $\forall\mathbf{w}\,\varphi(x,y,u,v,\mathbf{w})$ *определяет пересечения главных* $\mathbf{R}$*-конгруэнций и*

$$\mathbf{R}_{FSI}=\mathbf{V}(\mathbf{R})\cap\mathrm{Mod}(\Sigma\cup\{\forall xyuv(\forall\mathbf{w}\,\varphi(x,y,u,v,\mathbf{w})\leftrightarrow x\approx y\vee u\approx v)\}),$$

где Σ *— конечное множество квазитождеств. Если решетка конгруэнций* $\mathbf{R}$*-свободной алгебры ранга* $\mathbf{n}=\max\{\mathbf{n}(\Sigma),\mathbf{n}(\Lambda)+1\}+\mathbf{n}(\varphi(x,y,u,v,\mathbf{w}))-2$ *имеет не более чем счетную ширину либо удовлетворяет условию минимальности или максимальности, то ранг* $\mathbf{R}$ *относительно* $\mathbf{V}(\mathbf{R})$ *не превосходит* $\mathbf{n}$.

Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы используем метод, предложенный в [7]. Предположим, что $\mathbf{R}$ не конечно аксиоматизируем относительно $\mathbf{K}$. Тогда найдутся такие алгебры $A_i\in\mathbf{K}\setminus\mathbf{R}$, $i\in I$, и ультрафильтр D над I, что $\prod\limits_{i\in I}A_i/D\in\mathbf{R}$. Так как $A_i\in\mathbf{K}$, то

$$A_i\leqslant\prod\{B_{ij}\in\mathbf{K}_{FSI}:j\in J_i\},\quad i\in I,$$

причем в силу конгруэнц-дистрибутивности квазимногообразия $\mathbf{K}$ все алгебры B_{ij} абсолютно конечно подпрямо неразложимы. Поскольку все A_i не принадлежат $\mathbf{R}$, то для каждого $i\in I$ найдется такое $k_i\in J_i$, что $B_{ik_i}\notin\mathbf{R}$. Из того, что $\mathbf{R}$ замкнуто в $\mathbf{K}$ относительно гомоморфных образов, следует, что $\prod\limits_{i\in I}B_{ik_i}/D\in\mathbf{R}$. Как и в доказательстве теоремы 1, воспользовавшись конечной аксиоматизируемостью $\mathbf{R}_{FSI}$ и леммами 2 и 3, получим

$$\mathbf{R}_{FSI}=\mathrm{Mod}(\Sigma'\cup\{\forall xyuv(\forall\mathbf{w}\,\varphi(x,y,u,v,\mathbf{w})\leftrightarrow x\approx y\vee u\approx v)\}),$$

где Σ' — некоторое конечное множество квазитождеств. Положим

$$\mathbf{K}'=\mathrm{Mod}(\Phi(\Sigma')).$$

Согласно лемме 4 $\mathbf{R}\subseteq\mathbf{K}'$. Следовательно, $\prod\limits_{i\in I}B_{ik_i}/D\in\mathbf{K}'$. Поскольку класс $\mathbf{K}'$ конечно аксиоматизируем, найдется $i\in I$, для которого $B_{ik_i}\in\mathbf{K}'$. Так как алгебра B_{ik_i} конечно подпрямо неразложима, имеем $B_{ik_i}\in\mathbf{K}'_{FSI}$. Но согласно следствию 2 $\mathbf{K}'_{FSI}\subseteq\mathbf{R}_{FSI}$, откуда $B_{ik_i}\in\mathbf{R}$; противоречие. □

§ 4. Следствия

Пусть $\mathbf{R}$ — квазимногообразие, порожденное конечным числом конечных алгебр $A_1, \ldots, A_n$. Тогда $\mathbf{R}_{FSI} \subseteq \mathbf{S}(A_1, \ldots, A_n)$, где $\mathbf{S}$ — оператор взятия подалгебр. Так как все A_i конечны, то $\mathbf{R}_{FSI}$ состоит из конечного числа конечных алгебр, следовательно, конечно аксиоматизируем. Ясно, что $\mathbf{R}$ локально конечно, поэтому всякая конечно порожденная алгебра из $\mathbf{R}$ имеет конечную решетку конгруэнций. Таким образом, из теоремы 1 получаем

Следствие 3 [5]. *Любое конгруэнц-дистрибутивное квазимногообразие, порожденное конечным числом конечных алгебр, имеет конечный базис квазитождеств.*

Следствие 4. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— конгруэнц-дистрибутивное квазимногообразие, порожденное конечными алгебрами* $A_1, \ldots, A_n$, *и* $m = \max\{|A_1|, \ldots, |A_n|\} > 3$. *Тогда ранг* $\mathbf{R}$ *относительно* $\mathbf{V}(\mathbf{R})$ *не превосходит* $\max\{m, \mathbf{n}(\Lambda)+1\} + m - 2$.

Доказательство. Так как $\mathbf{R}_{FSI} \subseteq \mathbf{S}(A_1, \ldots, A_n)$, мощность алгебр из $\mathbf{R}_{FSI}$ не превосходит m. Пусть $F_{\mathbf{R}}(m)$ — $\mathbf{R}$-свободная алгебра ранга m, а $x, y, u, v, \mathbf{w}$ — свободные порождающие алгебры $F_{\mathbf{R}}(m)$. Положим

$$M(x, y, u, v, \mathbf{w}) = \theta_{\mathbf{R}}(x, y) \cap \theta_{\mathbf{R}}(u, v),$$

$$\varphi(x, y, u, v, \mathbf{w}) = \mathop{\&} \{\tau(x, y, u, v, \mathbf{w}) \approx \sigma(x, y, u, v, \mathbf{w}) : (\tau, \sigma) \in M(x, y, u, v, \mathbf{w})\}.$$

Нетрудно проверить, что для любой алгебры $A \in \mathbf{R}$, порожденной не более чем m элементами, и любых $a, b, c, d \in A$ выполняется

$$\theta_{\mathbf{R}}(a, b) \cap \theta_{\mathbf{R}}(c, d) = \bigvee^{\mathbf{R}} \{\theta_{\mathbf{R}}(M(a, b, c, d, \mathbf{e})) : \mathbf{e} \in A^{m-4}\}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{R}_{FSI} \models \forall xyuv(\mathbf{w}\, \varphi(x, y, u, v, \mathbf{w}) \leftrightarrow x \approx y \vee u \approx v),$$

и по лемме 2 получаем, что формула $\forall \mathbf{w}\, \varphi(x, y, u, v, \mathbf{w})$ определяет пересечения главных $\mathbf{R}$-конгруэнций. Так как квазимногообразие $\mathbf{R}$ конгруэнц-дистрибутивно, существуют такие конечные множества T_0 и T_1 пар термов от трех переменных, что в $\mathbf{R}$ истинны следующие квазитождества (см. [2, 4]):

$$\forall xz\, p(x, x, z) \approx q(x, x, z), \quad (p, q) \in T_0;$$

$$\forall xz\, p(x, z, z) \approx q(x, z, z), \quad (p, q) \in T_1;$$

$$\forall xy\, p(x, y, x) \approx q(x, y, x), \quad (p, q) \in T_0 \cup T_1;$$

$$\mathop{\&} \{p(x, y, z) \approx q(x, y, z) : (p, q) \in T_0 \cup T_1\} \to x \approx z.$$

Пусть $\mathbf{Q}$ — квазимногообразие, определенное в $\mathbf{V}(\mathbf{R})$ множеством этих квазитождеств. Тогда согласно [2] (предложение 1) для любых алгебры $A \in \mathbf{Q}$ и конгруэнций $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathbf{Q}} A$ и $\theta_i \in \mathrm{Con}\, A$, $i < s$, если имеет место разложение $\Delta_A = \bigcap\limits_{i<s} \theta_i$, то $\theta = \bigcap\limits_{i<s} (\theta \vee \theta_i)$, где знак $\vee$ обозначает сумму в решетке $\mathrm{Con}\, A$. Отсюда следует, что всякая (абсолютно) подпрямо неразложимая алгебра из $\mathbf{Q}$ является гомоморфным образом некоторой алгебры из $\mathbf{R}_{FSI}$. Пусть B — подпрямо неразложимая алгебра из $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}$. Тогда можно построить такое квазитождество ψ, содержащее не более чем m переменных, что $\mathbf{R}_{FSI} \models \psi$, а $B \models \neg\psi$ (см. [8]). Пусть Σ — множество таких квазитождеств. Тогда

$$\mathbf{R}_{FSI} = \mathbf{Q} \cap \mathrm{Mod}(\Sigma \cup \{\forall xyuv(\forall \mathbf{w}\, \varphi(x, y, u, v, \mathbf{w}) \leftrightarrow x \approx y \vee u \approx v)\}).$$

Так как ранг $\mathbf{Q}$ относительно $\mathbf{V}(\mathbf{R})$ меньше четырех, по теореме $1'$ получаем, что ранг $\mathbf{R}$ относительно $\mathbf{V}(\mathbf{R})$ не превосходит

$$\max\{\mathbf{n}(\Sigma), \mathbf{n}(\Lambda)+1\} + \mathbf{n}(\varphi(x,y,u,v,\mathbf{w})) - 2 \leqslant \max\{m, \mathbf{n}(\Lambda)+1\} + m - 2. \quad \square$$

Отметим, что ограничение ранга таких квазимногообразий впервые было найдено в [9].

Будем говорить, что квазимногообразие алгебр $\mathbf{R}$ имеет *эквационально определимые пересечения главных* $\mathbf{R}$*-конгруэнций*, если существует такая формула

$$\varphi(x,y,u,v) = \mathop{\&}_{i<k} \tau_i(x,y,u,v) \approx \sigma_i(x,y,u,v),$$

что для любых $A \in \mathbf{R}$ и $a,b,c,d \in A$ имеет место

$$\theta_{\mathbf{R}}(a,b) \cap \theta_{\mathbf{R}}(c,d) = \Delta_A \iff A \models \varphi(a,b,c,d).$$

Следствие 5 [4]. *Пусть квазимногообразие алгебр* $\mathbf{R}$ *имеет эквационально определимые пересечения главных* $\mathbf{R}$*-конгруэнций и класс конечно подпрямо неразложимых алгебр из* $\mathbf{R}$ *конечно аксиоматизируем. Тогда* $\mathbf{R}$ *имеет конечный базис квазитождеств.*

Доказательство. Действительно, в этом случае для любого квазитождества ψ предложение $\Phi(\psi)$ является также квазитождеством. Пусть

$$\mathbf{R}_{FSI} = \mathrm{Mod}(\Sigma \cup \{\forall xyuv(\varphi(x,y,u,v) \leftrightarrow x \approx y \vee u \approx v)\}),$$

где Σ — конечное множество квазитождеств. Тогда $\mathbf{Q} = \mathrm{Mod}(\Phi(\Sigma))$ — конечно базируемое квазимногообразие и по лемме 4 $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{Q}$. С другой стороны, согласно лемме 5 и следствию 2 $\mathbf{Q} \models \Sigma$ и

$$\mathbf{Q}_{FSI} \models \forall xyuv\bigl(\varphi(x,y,u,v) \leftrightarrow x \approx y \vee u \approx v\bigr).$$

Следовательно, $\mathbf{R}_{FSI} = \mathbf{Q}_{FSI}$, т. е. $\mathbf{R} = \mathbf{Q}$. $\square$

Следствие 6 [7]. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— дистрибутивное многообразие алгебр и класс конечно подпрямо неразложимых алгебр из* $\mathbf{R}$ *конечно аксиоматизируем. Тогда* $\mathbf{R}$ *имеет конечный базис тождеств.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2, так как в силу леммы Йонссона [7] любое дистрибутивное многообразие содержится в конечно базируемом дистрибутивном многообразии.

Замечание. Отметим, что теорема 1 анонсирована на конференции «Универсальная алгебра и теория решеток» (Дармштадт, Германия, июнь 1995 г.), а теорема $1'$ доложена на семинаре по универсальной алгебре в Дармштадском техническом университете в сентябре 1995 г.

Автор выражает искреннюю признательность В. А. Горбунову, К. Херрманну, и М. С. Шеремету за обсуждение полученных результатов и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Czelakowski J., Dziobiak W.* Quasivarieties with equationally definable principle intersections // Algebra Univ. 1990. V. 20, N 2. P. 234–260.
2. *Нуракунов А. М.* Характеризация относительно дистрибутивных квазимногообразий алгебр // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 6. С. 696–708.

3. *Baker K.* Finite equational bases for finite algebras in a congruence-distributive equational class // Adv. Math. 1977. V. 24. P. 207–243.
4. *Kearnes K., McKenzie R.* Commutator theory for relatively modular quasivarieties // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 331, N 2. P. 465–502.
5. *Pigozzi D.* Finite basis theorem for relatively congruence-distributive quasivarieties // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 310, N 2. P. 499–533.
6. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
7. *Jónsson B.* Congruence varieties // Algebra Univ. 1980. V. 10, N 3. P. 355–394.
8. *Горбунов В. А.* Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 5. С. 507–548.
9. *Dziobiak W.* Finite bases for finitely generated, relatively congruence distributive quasivarieties // Algebra Univ. 1991. V. 28, N 3. P. 303–323.

Статья поступила 6 января 1999 г.

г. Бишкек
Институт математики НАН, Республика Кыргызстан
`anvar@aknet.kg`