Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 512.554.38

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Ш. А. Аюпов, Б. А. Омиров

Аннотация: Описана неприводимая компонента множества нильпотентных алгебр Лейбница, содержащая алгебру максимального ниль-индекса, и дана классификация комплексных естественно градуированных филиформных алгебр Лейбница. Библиогр. 8.

Работа посвящена изучению алгебр Лейбница, введенных в работе Лоде [1, 2] как «некоммутативный» аналог алгебр Ли.

Вводится понятие нуль-филиформности, и изучаются ее свойства. Для алгебр Ли существует понятие p-филиформности для $p \geq 1$ [3], при $p = 0$ оно теряет смысл, так как алгебра Ли имеет не менее двух порождающих. В случае же алгебр Лейбница при $p = 0$ это понятие оказалось содержательным, и, таким образом, введение нуль-филиформной алгебры вполне оправдано.

Исследуются комплексные не лиевые филиформные алгебры Лейбница. В частности, приведены некоторые эквивалентные условия филиформности алгебр Лейбница, описаны комплексные естественным образом градуированные алгебры Лейбница.

§ 1. Описание неприводимой компоненты множества нильпотентных алгебр Лейбница, содержащей алгебру максимального нильиндекса

Определение 1. Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

где $[\ ,\ ]$ — умножение в L.

Заметим, что если в L выполняется тождество $[x, x] = 0$, то тождество Лейбница совпадает с тождеством Якоби. Таким образом, алгебры Лейбница являются «некоммутативным» аналогом алгебр Ли.

Для произвольной алгебры L определим нижний центральный ряд:

$$L^{\langle 1\rangle} = L, \quad L^{\langle n+1\rangle} = [L^{\langle n\rangle}, L].$$

Определение 2. Алгебра L называется *нильпотентной*, если существует $n \in N$ такое, что $L^{\langle n\rangle} = 0$.

Нетрудно видеть, что индекс нильпотентности произвольной n-мерной нильпотентной алгебры не превосходит числа $n + 1$.

Определение 3. Алгебру Лейбница L размерности n назовем *нуль-филиформной*, если $\dim L^i = (n+1) - i$, $1 \le i \le n+1$.

Очевидно, что определение нуль-филиформности алгебры L эквивалентно тому, что алгебра L имеет максимальный индекс нильпотентности.

Лемма 1. *В любой нуль-филиформной алгебре Лейбница размерности n можно найти базис со следующим умножением:*

$$[x_i, x_1] = x_{i+1} \text{ при } 1 \le i \le n-1, \quad [x_i, x_j] = 0 \text{ при } j \ge 2. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть L — нуль-филиформная алгебра Лейбница размерности n, и пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — базис алгебры L такой, что $e_1 \in L^1 \setminus L^2$, $e_2 \in L^2 \setminus L^3, \dots, e_n \in L^n$ (такой базис можно выбрать). Так как $e_2 \in L^2$, для некоторых элементов a_{2p}, b_{2p} алгебры L имеем

$$e_2 = \sum [a_{2p}, b_{2p}] = \sum \alpha_{ij}^2 [e_i, e_j] = \alpha_{11}^2 [e_1, e_1] + (^*),$$

где $(^*) \in L^3$, т. е. $e_2 = \alpha_{11}^2 [e_1, e_1] + (^*)$. Заметим, что $\alpha_{11}^2 [e_1, e_1] \ne 0$ (иначе $e_2 \in L^3$). Аналогично получаем, что

$$e_3 = \sum [[a_{3p}, b_{3p}], c_{3s}] = \sum \alpha_{ijk}^3 [[e_i, e_j], e_k] = \alpha_{111}^3 [[e_1, e_1], e_1] + (^{**}),$$

где $(^{**}) \in L^4$, т. е. $e_3 = \alpha_{111}^3 [[e_1, e_1], e_1] + (^{**})$. Заметим, что $\alpha_{111}^3 [[e_1, e_1], e_1] \ne 0$ (иначе $e_3 \in L^4$). Продолжая эту процедуру, получим, что элементы

$$x_1 := e_1,\ x_2 := [e_1, e_1],\ x_3 := [[e_1, e_1], e_1], \dots, x_n := [[[e_1, e_1], e_1], \dots, e_1]$$

отличны от нуля. Линейную независимость этих элементов нетрудно проверить, и, следовательно, они составляют базис алгебры L. Таким образом, $[x_i, x_1] = x_{i+1}$ при $1 \le i \le n-1$, кроме того, $[x_i, x_j] = 0$ при $j \ge 2$. Действительно, если $j = 2$, то

$$[x_i, x_2] = [x_i, [x_1, x_1]] = [[x_i, x_1], x_1] - [[x_i, x_1], x_1] = 0.$$

Пусть это доказано для всех $j > 2$. Справедливость для $j+1$ дает индуктивное предположение и равенство

$$[x_i, x_{j+1}] = [x_i, [x_j, x_1]] = [[x_i, x_j], x_1] - [[x_i, x_1], x_j] = 0.$$

Лемма доказана.

Далее алгебру с умножением (1) будем обозначать через L_0.

Пусть $x \in L \setminus [L, L]$. Для нильпотентного оператора правого умножения R_x определим убывающую последовательность $C(x) = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, состоящую из размеров жордановых клеток оператора R_x. На множестве таких последовательностей определим лексикографический порядок, т. е. $C(x) = (n_1, n_2, \dots, n_k) \le C(y) = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ означает, что существует $i \in N$ такое, что $n_j = m_j$ для всех $j < i$ и $n_i < m_i$.

Определение 4. Последовательность $C(L) = \max\limits_{x \in L \setminus [L,L]} C(x)$ назовем *характеристической последовательностью алгебры L*.

Определение 5. Множество $Z(L) = \{x \in L : [y, x] = 0\ \forall y \in L\}$ назовем *правым аннулятором*.

Пример 1. Пусть L — произвольная алгебра и $C(L) = (1, 1, \dots, 1)$. Тогда L абелева.

Пример 2. Пусть L — n-мерная алгебра Лейбница. Тогда по лемме 1 L — нуль-филиформная алгебра тогда и только тогда, когда $C(L)=(n,0)$.

Рассмотрим произвольную алгебру L из множества n-мерных алгебр Лейбница над полем F. Пусть $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ — базис алгебры L. Тогда алгебра L определяется с точностью до изоморфизма умножением базисных элементов, а именно

$$[e_i,e_j]=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}e_k,$$

где γ_{ij}^{k} — структурные константы. Поэтому каждую алгебру размерности n над полем F при фиксированном базисе можно рассматривать как точку в n^3-мерном пространстве структурных констант с топологией Зарисского. Изменению базиса соответствует естественное действие группы $GL_n(F)$ на F, орбитой точки при этом действии является множество всех изоморфных ей алгебр.

Пуст $\mathfrak{I}_n(F)$ — множество структурных констант всех n-мерных алгебр Лейбница над полем F и N_n — подмножество $\mathfrak{I}_n(F)$, состоящее из структурных констант всех n-мерных нильпотентных алгебр Лейбница над полем F.

Из тождества Лейбница имеем полиномиальные тождества

$$\sum_{l=1}^{n}\bigl(\gamma_{jk}^{l}\gamma_{il}^{m}-\gamma_{ij}^{l}\gamma_{lk}^{m}+\gamma_{ik}^{l}\gamma_{lj}^{m}\bigr)=0$$

для структурных констант, и, значит, множество $\mathfrak{I}_n(F)$ в F^{n^3} будет аффинным многообразием.

Определение 6. Определим действие группы $GL_n(F)$ на множестве $\mathfrak{I}_n(F)$ следующим образом: $[x,y]_g:=g[g^{-1}x,g^{-1}y]$, где $g\in GL_n(F)$ и $x,y\in L$. Через $\mathrm{Orb}_n(L)$ обозначим орбиту GL_n^*L алгебры L.

Очевидно, что $\mathrm{Orb}_n(L)$ состоит из всех алгебр изоморфных алгебре L (стабилизатором алгебры L является группа $\mathrm{Aut}(L)\Rightarrow \mathrm{Orb}_n(L)=GL_n(F)/\mathrm{Aut}(L)$). Замыкание $\overline{\mathrm{Orb}_n(L)}$ орбиты $\mathrm{Orb}_n(L)$ понимается в случае произвольного поля F в смысле топологии Зарисского, а при $F=C$ оно совпадает с замыканием относительно евклидовой топологии.

Нетрудно видеть, что скалярные матрицы из $GL_n(F)$ действуют на $\mathfrak{I}_n(F)$ скалярно, поэтому орбиты $\mathrm{Orb}_n(L)$ являются конусами с выброшенной вершиной $\{0\}$, соответствующей абелевой алгебре a_n. Поэтому a_n принадлежит $\overline{\mathrm{Orb}_n(L)}$ для всех $L\in\mathfrak{I}_n(F)$. В частности, среди орбит $\mathrm{Orb}_n(L)$ замкнутой будет только одна — орбита a_n (a_n абелева).

Так как из [4] имеем замкнутость в топологии Зарисского множества $\{L\in\mathfrak{I}_n(F):\dim Z(L)\geq n-1\}$, то

$$\overline{\mathrm{Orb}_n(L_0)}\subseteq N_n\cap\{L\in\mathfrak{I}_n(F):\dim Z(L)\geq n-1\}.$$

Введем для удобства обозначение

$$N_nZ:=N_n\cap\{L\in\mathfrak{I}_n(F):\dim Z(L)=n-1\},$$

случай, когда $\dim Z(L)=n$, не интересен, так как тогда L абелева.

Лемма 2. *Пусть L — алгебра из множества N_nZ с характеристической последовательностью $C(L)=(m,n-m)$. Тогда при $m=n/2$ она изоморфна алгебре*

$$[e_1,e_n]=0,\ [e_2,e_n]=e_1,\dots,[e_m,e_n]=e_{m-1},\ [e_{m+1},e_n]=0,[e_{m+2},e_n]=e_{m+1},$$
$$[e_{m+3},e_n]=e_{m+2},\dots,[e_n,e_n]=e_{n-1},$$

а при $m > \frac{n}{2}$ *— одной из двух следующих неизоморфных алгебр:*

$$[e_1, e_m] = 0,\ [e_2, e_m] = e_1, \ldots, [e_m, e_m] = e_{m-1},$$
$$[e_{m+1}, e_m] = 0,\ [e_{m+2}, e_m] = e_{m+1},\ [e_{m+3}, e_m] = e_{m+2}, \ldots, [e_n, e_m] = e_{n-1},$$

$$[e_1, e_n] = 0,\ [e_2, e_n] = e_1, \ldots, [e_m, e_n] = e_{m-1},\ [e_{m+1}, e_n] = 0,$$
$$[e_{m+2}, e_n] = e_{m+1},\ [e_{m+3}, e_n] = e_{m+2}, \ldots, [e_n, e_n] = e_{n-1}.$$

Доказательство. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис алгебры L, и пусть $L \in N_n Z$ и $C(L) = (m, n-m)$. Тогда существует $x \in L \setminus [L, L]$ такой, что

$$R_x = \begin{pmatrix} J_m & 0 \\ 0 & J_{n-m} \end{pmatrix},$$

т. е.

$$[e_1, x] = 0,\ [e_2, x] = e_1, \ldots, [e_m, x] = e_{m-1},\ [e_{m+1}, x] = 0,$$
$$[e_{m+2}, x] = e_{m+1},\ [e_{m+3}, x] = e_{m+2}, \ldots, [e_n, x] = e_{n-1}.$$

Для удобства будем полагать x базисным элементом (это возможно ввиду того, что $\dim Z(L) = n-1$). Так как $\dim Z(L) = n-1$, то $[L, L] \subseteq Z(L)$ и, значит, x не принадлежит линейной оболочке векторов $\{e_1, \ldots, e_{m-1}, e_{m+1}, \ldots, e_{n-1}\} \subseteq Z(L)$, следовательно, $x = e_m$ или $x = e_n$. При $m = n/2$, взяв замену базиса

$$\bar{e}_1 = e_{m+1},\ \bar{e}_2 = e_{m+2}, \ldots, \bar{e}_m = e_n,\ \bar{e}_{m+1} = e_1,\ \bar{e}_{m+2} = e_2, \ldots, \bar{e}_n = e_m,$$

можно считать алгебры

$$[e_1, e_m] = 0,\ [e_2, e_m] = e_1, \ldots, [e_m, e_m] = e_{m-1},\ [e_{m+1}, e_m] = 0,$$
$$[e_{m+2}, e_m] = e_{m+1},\ [e_{m+3}, e_m] = e_{m+2}, \ldots, [e_n, e_m] = e_{n-1},$$

$$[e_1, e_n] = 0,\ [e_2, e_n] = e_1, \ldots, [e_m, e_n] = e_{m-1},\ [e_{m+1}, e_n] = 0,$$
$$[e_{m+2}, e_n] = e_{m+1},\ [e_{m+3}, e_n] = e_{m+2}, \ldots, [e_n, e_n] = e_{n-1}$$

изоморфными.

При $m > n/2$ предположим, что указанные алгебры изоморфны, т. е. существует изоморфизм φ первой алгебры во вторую. Тогда $\varphi(e_m) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$, где $\alpha_n \neq 0$. Известно, что при изоморфизме порождающие элементы переходят в порождающие. Отсюда

$$[\varphi(e_n), \varphi(e_m)] = \varphi(e_{m-1}), \ldots, [\varphi(e_2), \varphi(e_m)] = 0$$

(ввиду того, что $m > n - m$); получили противоречие. Лемма доказана.

Далее, если $\dim Z(L) = n - 1$, то алгебру L для удобства будем задавать оператором правого умножения на элемент x, где $x \in Z(L)$.

Следствие 1. *Пусть* $L \in N_n Z$ *и* $C(L) = (n_1, \ldots, n_s)$. *Тогда* L *изоморфна одной из алгебр вида*

$$R_{e_{n_1}} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_{n_s} \end{pmatrix}, \ldots, R_{e_{n_1+\cdots+n_s}} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_{n_s} \end{pmatrix},$$

где $J_{n_1}, \dots, J_{n_s}$ — жордановы клетки размеров $n_1, \dots, n_s$ соответственно. В частности, $R_{e_{n_1+\dots+n_{i-1}}} \cong R_{e_{n_1+\dots+n_{i-1}+n_i}}$ тогда и только тогда, когда $n_{i-1} = n_i$.

Доказательство. Пусть L удовлетворяет условиям леммы. Тогда из рассуждений, аналогичным приведенным в лемме 2, имеем, что L может быть одной из алгебр, указанных в утверждении следствия. Пусть $n_{i-1} = n_i$, где $2 \le i \le s$. Тогда, взяв следующую замену базиса:

$$
\begin{gathered}
\bar{e}_{n_1+\dots+n_{i-2}+1} := e_{n_1+\dots+n_{i-2}+n_{i-1}+1},\\
\bar{e}_{n_1+\dots+n_{i-2}+2} := e_{n_1+\dots+n_{i-2}+n_{i-1}+2}, \dots, \bar{e}_{n_1+\dots+n_{i-1}} := e_{n_1+\dots+n_i},\\
\bar{e}_{n_1+\dots+n_{i-2}+n_{i-1}+1} := e_{n_1+\dots+n_{i-2}+1},\\
\bar{e}_{n_1+\dots+n_{i-2}+n_{i-1}+2} := e_{n_1+\dots+n_{i-2}+2}, \dots, \bar{e}_{n_1+\dots+n_i} := e_{n_1+\dots+n_{i-1}},\\
\bar{e}_i = e_i \text{ для остальных индексов},
\end{gathered}
$$

получим изоморфизм алгебр $R_{e_{n_1+\dots+n_{i-1}}}, R_{e_{n_1+\dots+n_i}}$. Аналогично лемме 2 можно показать, что алгебра $R_{e_{n_1+\dots+n_{i-1}}}$ не изоморфна алгебре $R_{e_{n_1+\dots+n_i}}$ при $n_{i-1} \neq n_i$ для некоторого i. Следствие доказано.

При предположениях следствия 1 верно

Следствие 2. *Число неизоморфных алгебр множества N_nZ равно мощности множества $\{n_1, \dots, n_s\}$.*

Лемма 3. *Пусть L — алгебра с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$, принадлежащая множеству N_nZ. Тогда $L \in \overline{\mathrm{Orb}_n(L_0)}$ в том и только в том случае, если $C(L) = C(e_n)$.*

Доказательство. Полагая $\bar{e}_i := e_{n+1-i}$ при $1 \le i \le n$, получим $C(L_0) = C(e_n)$, т. е. $L_0 \cong R_{\bar{e}_n} = J_n$. Пусть L удовлетворяет условиям леммы, т. е.

$$
L \cong R_{e_n} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & J_{n_2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_{n_s} \end{pmatrix}.
$$

Рассмотрим семейство матриц $(g_{\lambda_1})_{\lambda_1 \in R\setminus\{0\}}$, определенных следующим образом:

$$
g_{\lambda_1}(e_i) = \lambda_1^{-1} e_i \text{ при } 1 \le i \le n_1, \quad g_{\lambda_1}(e_i) = e_i \text{ при } n_1 + 1 \le i \le n.
$$

Взяв предел по данному семейству при $\lambda_1 \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\lambda_1 \to 0} g_{\lambda_1}^{-1}[g_{\lambda_1}(e_i), g_{\lambda_1}(e_j)]$, находим, что

$$
L_0 \underset{\lambda_1 \to 0}{\longrightarrow} R_{e_n} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0\\ 0 & J_{n-n_1} \end{pmatrix}.
$$

Возьмем затем семейство матриц $(g_{\lambda_2})_{\lambda_2 \in R\setminus\{0\}}$, определенных так:

$$
\begin{gathered}
g_{\lambda_2}(e_i) = \lambda_2^{-1} e_i \text{ при } n_1 + 1 \le i \le n_1 + n_2,\\
g_{\lambda_2}(e_i) = e_i \text{ при } 1 \le i \le n_1 \text{ и } n_1 + n_2 + 1 \le i \le n.
\end{gathered}
$$

Взяв предел по данному семейству при $\lambda_2 \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\lambda_2 \to 0} g_{\lambda_2}^{-1}[g_{\lambda_2}(e_i), g_{\lambda_2}(e_j)]$, получим, что

$$
L_0 \underset{\lambda_2 \to 0}{\longrightarrow} R_{e_n} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & 0\\ 0 & J_{n_2} & 0\\ 0 & 0 & J_{n-n_1-n_2} \end{pmatrix}.
$$

Продолжая этот процесс s раз, придем к тому, что алгебра, заданная оператором

$$R_{e_n} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_{n_s} \end{pmatrix},$$

принадлежит $\overline{\mathrm{Orb}_n(L_0)}$. Пусть $L \in \overline{\mathrm{Orb}_n(L_0)}$. Тогда умножение в ней задается с помощью умножения в L_0 следующим образом: $[e_i, e_j] = \lim\limits_{\lambda \to 0} g_\lambda^{-1}[g_\lambda e_i, g_\lambda e_j]$. Так как для каждого $\lambda \neq 0$

$$g_\lambda(\mathrm{lin}(e_1, \dots, e_{n-1})) \subseteq \mathrm{lin}(e_1, \dots, e_{n-1}),$$

имеем равенства $[e_i, e_j] = 0$ при $1 \leq j \leq n-1$. Таким образом, L определяется оператором R_{e_n}. Пусть $Q^{-1}R_{e_n}Q = J$ (J — жорданова форма оператора R_{e_n}). Взяв семейство $(g_\lambda Q)_{\lambda \in R \setminus \{0\}}$, можно полагать, что оператор R_{e_n} имеет жордановый вид, т. е. $C(L) = C(e_n)$. Лемма доказана.

Ввиду того, что орбита нуль-филиформной алгебры — открытое множество в аффинном многообразии N_n, из [5] заключаем, что ее замыкание совпадает с неприводимой компонентой N_n и верна следующая

Теорема 1. *Неприводимая компонента многообразия N_n, содержащая нуль-филиформную алгебру, с точностью до изоморфизма состоит из следующих алгебр:*

$$R_{e_n} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_{n_s} \end{pmatrix},$$

где $n_1 + \cdots + n_s = n$.

Доказательство вытекает из леммы 3 и следствия 1.

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что число неизоморфных алгебр, лежащих в неприводимой компоненте многообразия N_n, содержащей алгебру L_0, равно числу $p(n)$, где $p(n)$ — число решений в целых числах уравнения $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$, $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$. Асимптотическое значение $p(n)$, которое дается в [6] выражением $p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{A\sqrt{n}}$, где $A = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ ($p(n) \approx g(n)$, означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{p(n)}{g(n)} = 1$), показывает, как невелико множество неизоморфных алгебр Лейбница, лежащих в неприводимой компоненте многообразия N_n, содержащей алгебру L_0, т. е. число орбит в этой компоненте при любом значении n конечно.

§ 2. Классификация комплексных естественно градуированных филиформных алгебр Лейбница

Определение 6. Алгебра Лейбница называется *филиформной*, если $\dim L^i = n - i$, где $2 \leq i \leq n$.

Лемма 4. *Пусть L — n-мерная алгебра Лейбница. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(а) $C(L) = (n-1, 1)$;

(б) *L — филиформная алгебра Лейбница;*

(c) $L^{n-1} \neq 0$ и $L^n = 0$.

Доказательство. Импликации (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (c) очевидны.

(б) $\Rightarrow$ (а). Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис филиформной алгебры L такой, что $\{e_3, \dots, e_n\} \subseteq L^2$, $\{e_4, \dots, e_n\} \subseteq L^3, \dots, \{e_n\} \subseteq L^{n-1}$.

Рассмотрим произведения

$$[x, e_1 + \alpha e_2] = \gamma_1 e_3 + \alpha\beta_1 e_3, \quad [e_3, e_1 + \alpha e_2] = \gamma_2 e_4 + \alpha\beta_2 e_4,$$
$$[e_4, e_1 + \alpha e_2] = \gamma_3 e_5 + \alpha\beta_3 e_5, \dots, [e_n, e_1 + \alpha e_2] = 0,$$

где x — произвольный элемент L и $|\gamma_i| + |\beta_i| \neq 0$ для любого i. Выберем α таким, что $\gamma_i + \alpha\beta_i \neq 0$ для любого i. Тогда $z = e_1 + \alpha e_2 \in L \setminus [L, L]$ и $C(z) = (n-1, 1)$.

(c) $\Rightarrow$ (б). Пусть $L^n = 0$. Тогда получим убывающую цепочку подалгебр $L \supset L^2 \supset L^3 \supset \dots \supset L^{n-1} \supset L^n = 0$ длины n. Очевидно, что либо $\dim L^2 = n - 1$, либо $\dim L^2 = n - 2$ (иначе $L^{n-1} = 0$). Предположим, что $\dim L^2 = n - 1$. Тогда выберем базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ алгебры L, соответствующий фильтрации $L \supset L^2 \supset L^3 \supset \dots \supset L^{n-1} \supset L^n = 0$. Предположим, что $\dim L^s / L^{s+1} = 2$ $(s \neq 1)$, т. е. $\{e_s, e_{s+1}\} \in L^s \setminus L^{s+1}$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 1, и делая соответствующую замену переменных, можно считать, что $e_s = [[[e_1, e_1], e_1], \dots, e_1] + (^*)$ (произведение берется s раз и $(^*) \in L^{s+1}$) и $e_{s+1} = [[[e_1, e_1], e_1], \dots, e_1] + (^{**})$ (произведение берется s раз и $(^{**}) \in L^{s+1}$). Отсюда $e_s - e_{s+1} \in L^{s+1}$. Получили противоречие с предположением, что $\dim L^s / L^{s+1} = 2$. Следовательно, $\dim L^i / L^{i+1} = 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$. Тогда базис n-мерной алгебры L будет состоять из $n - 1$ элементов; противоречие с предположением $\dim L^2 = n - 1$. Таким образом, $\dim L^i = n - i$, где $n = \dim L$ и $2 \leq i \leq n$, т. е. L — филиформная алгебра. Лемма доказана.

Далее алгебру L будем представлять как пару (V, μ), где V — векторное пространство и μ — умножение на V, определяющее алгебру L.

Пусть (V, μ) — $(n+1)$-мерная комплексная филиформная алгебра Лейбница. Определим естественное градуирование алгебры (V, μ), положив $V_1(\mu) = V$, $V_{i+1}(\mu) := \mu(V_i(\mu), V)$ и $W_i := V_i(\mu)/V_{i+1}(\mu)$. Тогда $V = W_1 + W_2 + \dots + W_n$, где $\dim W_1 = 2$, $\dim W_i = 1$, $2 \leq i \leq n$. Ввиду [7, лемма 1] имеем вложение $\mu(W_i, W_j) \subseteq W_{i+j}$. Таким образом, мы получили градуирование, которое называется *естественным*.

Рассуждениями, аналогичными приведенным в [8], над полем, имеющим бесконечное число элементов, можно найти базис $e_0, e_1 \in W_1$, $e_i \in W_i$ $(i \geq 2)$ в пространстве V с билинейным отображением μ такой, что $\mu(e_i, e_0) = e_{i+1}$ и $\mu(e_n, e_0) = 0$, $1 \leq i \leq n$.

Далее для удобства $\mu(x, y)$ будем обозначать через $[x, y]$.

Случай 1. Пусть $[e_0, e_0] = \alpha e_2$ $(\alpha \neq 0)$. Тогда $e_2 \in Z(\mu)$ (где $Z(\mu)$ — правый аннулятор алгебры L). Отсюда $e_3, \dots, e_n \in Z(\mu)$. Сделав замену

$$\bar{e}_1 = \alpha e_1,\ \bar{e}_2 = \alpha e_2,\ \bar{e}_3 = \alpha e_3, \dots, \bar{e}_n = \alpha e_n,$$

можно полагать α равным единице. Таким образом, $[e_0, e_0] = e_2$, $[e_i, e_0] = e_{i+1}$ и $[e_n, e_0] = 0$. Предположим, что $[e_0, e_1] = \beta e_2$ и $[e_1, e_1] = \gamma e_2$. Тогда

$$[e_0, [e_1, e_0]] = [[e_0, e_1], e_0] - [[e_0, e_0], e_1] \Rightarrow \beta e_3 = [e_2, e_1]$$

и

$$[e_1, [e_0, e_1]] = [[e_1, e_0], e_1] - [[e_1, e_1], e_0] \Rightarrow \gamma e_3 = [e_2, e_1].$$

Отсюда $\beta = \gamma$. Индукцией по числу базисных элементов, используя равенство $[e_i, [e_0, e_1]] = [[e_i, e_0], e_1] - [[e_i, e_1], e_0]$, нетрудно доказать, что $[e_i, e_1] = \beta e_{i+1}$, т. е. в случае 1 получили алгебру

$$[e_0, e_0] = e_2, \quad [e_i, e_0] = e_{i+1}, \quad [e_1, e_1] = \beta e_2, \quad [e_i, e_1] = \beta e_{i+1}, \quad [e_0, e_1] = \beta e_2.$$

Случай 2. $[e_0, e_0] = 0 \& [e_1, e_1] = \alpha e_2$ ($\alpha \neq 0$). В этом случае $e_2 \in Z(\mu)$. Значит, $e_3, \dots, e_n \in Z(\mu)$. Полагая

$$\bar{e}_0 = \alpha e_0, \ \bar{e}_2 = \alpha e_2, \ \bar{e}_3 = \alpha^2 e_3, \dots, \bar{e}_n = \alpha^{n-1} e_n,$$

можно считать $\alpha = 1$, т. е. $[e_1, e_1] = e_2$, $[e_i, e_0] = e_{i+1}$. Обозначим $[e_0, e_1] = \beta e_2$. Тогда

$$[e_0, [e_1, e_0]] = [[e_0, e_1], e_0] - [[e_0, e_0], e_1] \Rightarrow [[e_0, e_1], e_0] = 0,$$

т. е. $\beta[e_2, e_0] = \beta e_3 = 0 \Rightarrow \beta = 0$. Индукцией по числу базисных элементов, используя равенство $[e_i, [e_0, e_1]] = [[e_{i+1}, e_0], e_1] - [[e_i, e_1], e_0]$, нетрудно показать, что $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, т. е. в случае 2 получили алгебру $[e_i, e_0] = e_{i+1}$, $[e_i, e_1] = e_{i+1}$ ($i \geq 1$). Сделав следующую замену переменных: $\bar{e}_0 := e_0 - e_1$, $\bar{e}_1 := e_1$, получим алгебру $[\bar{e}_i, \bar{e}_1] = \bar{e}_{i+1}$. Нетрудно заметить, что эта алгебра изоморфна алгебре из случая 1 при $\beta = 1$ ($e'_0 := e_0 - e_1, \ e'_1 := e_1$).

Случай 3. $[e_0, e_0] = 0 \& [e_1, e_1] = 0$. Обозначим $[e_0, e_1] = \alpha e_2$.

Подслучай 1. Пусть $[e_0, e_1] = \alpha e_2$ ($\alpha \neq -1$). Тогда $e_2 \in Z(\mu)$. Следовательно, $e_3, \dots, e_n \in Z(\mu)$. Так как $\alpha \neq -1$, полагая $\bar{e}_1 = e_1 + e_0$, получаем $\bar{e}_1^2 = (\alpha + 1) e_2$ и $[\bar{e}_1, e_0] = e_2$, т. е. попадаем в случай 2.

Подслучай 2. $[e_0, e_1] = -e_2$. Этому подслучаю предпошлем следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть (V, μ) — $(n+1)$-мерная естественно градуированная филиформная алгебра Лейбница с базисом $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$, удовлетворяющим следующим равенствам: $[e_1, e_1] = [e_0, e_0] = 0$, $[e_0, e_1] = -e_2$, $[e_i, e_0] = e_{i+1}$. Тогда (V, μ) — алгебра Ли.*

Доказательство. Индукцией по числу базисных переменных, используя равенство $[e_0, [e_i, e_0]] = [[e_0, e_i], e_0] - [[e_0, e_0], e_i]$, нетрудно показать, что $[e_0, e_i] = -[e_i, e_0]$ ($1 \leq i \leq n$). Из равенства $[e_1, [e_1, e_0]] = [[e_1, e_1], e_0] - [[e_1, e_0], e_1]$ имеем $[e_1, e_2] = -[e_2, e_1]$. Из цепочки равенств

$$\begin{aligned}
[e_1, e_{i+1}] = [e_1, [e_i, e_0]] &= [[e_1, e_i], e_0] - [[e_1, e_0], e_i] = -[[e_i, e_1], e_0] - [e_2, e_i] \\
&= [e_0, [e_i, e_1]] - [e_2, e_i] = [[e_0, e_i], e_1] - [[e_0, e_1], e_i] - [e_2, e_i] \\
&= [[e_0, e_i], e_1] + [e_2, e_i] - [e_2, e_i] = -[[e_i, e_0], e_1] = -[e_{i+1}, e_1]
\end{aligned}$$

и основания индукции получим, что $[e_1, e_i] = -[e_i, e_1]$ ($1 \leq i \leq n$). Итак, $[e_1, e_i] = -[e_i, e_1]$ и $[e_0, e_i] = -[e_i, e_0]$ ($0 \leq i \leq n$). Докажем равенство $[e_i, e_j] = -[e_j, e_i]$ для любых i, j. Доказательство проведем индукцией по i при любом значении j. Заметим, что j можно считать больше 1. Используя цепочку равенств

$$\begin{aligned}
&[e_{i+1}, e_j] = [[e_i, e_0], [e_{j-1}, e_0]] = [[[e_i, e_0], e_{j-1}], e_0] - [[[e_i, e_0], e_0], e_{j-1}] \\
&= -[e_0, [[e_i, e_0], e_{j-1}]] + [[e_0, [e_i, e_0]], e_{j-1}] = [e_0, [[e_0, e_i], e_{j-1}] - [[e_0, [e_0, e_i]], e_{j-1}] \\
&= [[e_0, [e_0, e_i]], e_{j-1}] - [[e_0, e_{j-1}, [e_0, e_i]] - [[[e_0, e_0], e_i], e_{j-1}] + [[e_0, e_i], e_0], e_{j-1}] \\
&= [[[e_0, e_0], e_i], e_{j-1}] - [[[e_0, e_i], e_0], e_{j-1}] - [[[e_0, e_0], e_i], e_{j-1}] - [[e_{j-1}, e_0], [e_i, e_0]] \\
&\qquad + [[[e_0, e_i], e_0], e_{j-1}] = -[e_j, e_{i+1}],
\end{aligned}$$

имеем антикоммутативность для базисных элементов алгебры (V,μ). Лемма доказана.

Таким образом, не лиевы естественно градуированные филиформные алгебры Лейбница только следующие:

$$[e_0,e_0]=e_2,\quad [e_i,e_0]=e_{i+1},\quad [e_i,e_1]=\beta e_{i+1},\quad [e_0,e_1]=\beta e_2.$$

Пусть $\beta\neq 1$. Тогда, сделав замену

$$\bar e_0=(1-\beta)e_0,\ \bar e_1=-\beta e_0+e_1,\ \bar e_2=(1-\beta)^2e_2,\dots,\bar e_n=(1-\beta)^n e_n,$$

можно считать $\beta=0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\beta=1$, т. е. $[e_0,e_0]=e_2$, $[e_i,e_1]=e_{i+1}$, $[e_0,e_1]=e_2$ $(1\le i\le n)$. Сделав замену $\bar e_1=e_1-e_0$, имеем $[e_0,e_0]=e_2$, $[e_i,e_0]=e_{i+1}$ $(1\le i\le n)$.

Покажем, что алгебры $[e_0,e_0]=e_2$, $[e_i,e_0]=e_{i+1}$ $(1\le i\le n-1)$ и $[e_0,e_0]=e_2$, $[e_i,e_0]=e_{i+1}$ $(2\le i\le n-1)$ неизоморфны.

Предположим противное, и пусть φ — изоморфизм первой алгебры во вторую, т. е. $\varphi: L_1\to L_2$ и $\varphi(e_i)=\sum\limits_{j=0}^{n}\alpha_{ij}e_j$.

Имеем

$$[\varphi(e_0),\varphi(e_0)]=\left[\sum_{j=0}^{n}\alpha_{0j}e_j,\alpha_{00}e_0\right]=\alpha_{00}(\alpha_{00}e_2+\alpha_{02}e_3+\dots+\alpha_{0,n-1}e_n).$$

С другой стороны,

$$\varphi([e_0,e_0])=\varphi(e_2)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_{2j}e_j.$$

Сравнивая оба равенства, получим следующие ограничения:

$$\alpha_{20}=\alpha_{21}=0,\quad \alpha_{22}=\alpha_{00}^2,\quad \alpha_{2,k}=\alpha_{00}\alpha_{0,k-1}\ \text{при}\ 3\le k\le n. \tag{2}$$

Рассмотрим произведение

$$[\varphi(e_i),\varphi(e_0)]=\left[\sum_{j=0}^{n}\alpha_{ij}e_j,\alpha_{00}e_0\right]=\alpha_{00}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{ij}[e_j,e_0]$$
$$=\alpha_{00}(\alpha_{i,0}e_2+\alpha_{i,2}e_3+\dots+\alpha_{i,n-1}e_n).$$

Кроме того,

$$\varphi([e_i,e_0])=\varphi(e_{i+1})=\sum_{j=0}^{n}\alpha_{i+1,j}x_j$$

при $1\le i\le n-1$. Сравнивая оба равенства, придем к следующим ограничениям:

$$\begin{gathered}\alpha_{i+1,0}=\alpha_{i+1,1}=0,\quad \alpha_{i+1,2}=\alpha_{00}\alpha_{i,0},\\ \alpha_{i+1,k}=\alpha_{00}\alpha_{i,k-1}\ \text{при}\ 3\le k\le n,\ 1\le i\le n-1.\end{gathered} \tag{3}$$

Из (3) следует, что $\alpha_{22}=\alpha_{00}\alpha_{10}$, и так как $\alpha_{00}\neq 0$ (иначе φ вырождено), то из (2) вытекает, что $\alpha_{00}=\alpha_{10}$.

Имеем $\varphi([e_0,e_1])=\varphi(0)=0$. С другой стороны,

$$[\varphi(e_0),\varphi(e_1)]=\left[\sum_{j=0}^{n}\alpha_{0j}e_j,\alpha_{10}e_0\right]=\alpha_{10}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{0j}[e_j,e_0]$$
$$=\alpha_{10}(\alpha_{00}e_0+\alpha_{02}e_3+\dots+\alpha_{0,n-1}e_n)=0.$$

Отсюда $\alpha_{10}\alpha_{00}=0$ и, значит, $\alpha_{10}=0$, т. е. первый столбец матрицы изоморфизма $[\varphi]$ нулевой, следовательно, φ вырождено.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Существуют только две не изоморфные естественно градуированные комплексные не лиевые филиформные алгебры Лейбница μ_0^n и μ_1^n размерности $n+1$, где*

$$\mu_0^n : \mu_0^n(e_0, e_0) = e_2, \quad \mu_0^n(e_i, e_0) = e_{i+1} \text{ при } 1 \le i \le n-1,$$

$$\mu_1^n : \mu_1^n(e_0, e_0) = e_2, \quad \mu_1^n(e_i, e_0) = e_{i+1} \text{ при } 2 \le i \le n-1,$$

отсутствующие произведения равны нулю.

Замечание 1. Комплексные лиевые естественно градуированные филиформные алгебры описаны в [8]. Таким образом, имеется классификация комплексных естественно градуированных алгебр Лейбница.

Следствие 3. *Любая $(n+1)$-мерная комплексная не лиевая филиформная алгебра Лейбница изоморфна одной из алгебр*

$$\mu(e_0, e_0) = e_2,\ \mu(e_i, e_0) = e_{i+1},\ \mu(e_0, e_1) = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \theta_n e_n,$$
$$\mu(e_i, e_1) = \alpha_3 e_{i+2} + \alpha_4 e_{i+3} + \dots + \alpha_{n+1-i} e_n \text{ при } 1 \le i \le n,$$

$$\mu(e_i, e_1) = \beta_3 e_{i+2} + \beta_4 e_{i+3} + \dots + \beta_{n+1-i} e_n \text{ при } 2 \le i \le n-1.$$
$$\mu(e_0, e_0) = e_2,\ \mu(e_i, e_0) = e_{i+1},\ \mu(e_0, e_1) = \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \dots + \beta_n e_n,\ \mu(e_1, e_1) = \gamma e_n,$$

отсутствующие произведения равны нулю.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что данные алгебры являются алгебрами Лейбница. Из теоремы 2 имеем, что любая $(n+1)$-мерная комплексная не лиевая филиформная алгебра Лейбница μ изоморфна алгебре $\mu_0^n + \beta$, где $\beta(e_0, e_0) = 0$, $\beta(e_i, e_0) = 0$ при $1 \le i \le n-1$, $\beta(e_i, e_j) \in \mathrm{lin}(e_{i+j+1}, \dots, e_n)$ при $i \ne 0$ и $\beta(e_0, e_j) \in \mathrm{lin}(e_{j+2}, \dots, e_n)$ при $1 \le j \le n-2$, или алгебре $\mu_1^n + \beta$, где $\beta(e_0, e_0) = 0$, $\beta(e_i, e_0) = 0$, при $2 \le i \le n-1$ и $\beta(e_i, e_j) \in \mathrm{lin}(e_{i+j+1}, \dots, e_n)$ при $i, j \ne 0$ и $\beta(e_0, e_j) \in \mathrm{lin}(e_{j+2}, \dots, e_n)$ при $1 \le j \le n-2$.

Случай 1. Пусть $\mu \cong \mu_0^n + \beta$. Тогда $\mu(e_0, e_0) = \mu_0^n(e_0, e_0) = e_2$ и $\mu(e_i, e_0) = \mu_0^n(e_i, e_0) = e_{i+1}$ при $1 \le i \le n-1$, откуда $e_2, e_3, \dots, e_n \in Z(\mu)$, так что $\mu(e_i, e_j) = 0$ при $2 \le j \le n$, $0 \le i \le n$.

Положим $\mu(e_1, e_1) = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \dots + \alpha_n e_n$. Рассмотрим

$$\mu(e_i, \mu(e_0, e_1)) = \mu(\mu(e_i, e_0), e_1) - \mu(\mu(e_i, e_1), e_0).$$

Так как $\mu(e_0, e_1) \in Z(\mu)$, то $\mu(e_i, \mu(e_0, e_1)) = 0$ и, значит, $\mu(\mu(e_i, e_0), e_1) = \mu(\mu(e_i, e_1), e_0)$ для всех $i \ge 1$. Таким образом, $\mu(e_i, e_1) = \alpha_3 e_{i+2} + \alpha_4 e_{i+3} + \dots + \alpha_{n+1-i} e_n$ при $1 \le i \le n$.

Пусть $\mu(e_0, e_1) = \theta_3 e_3 + \theta_4 e_4 + \dots + \theta_n e_n$. Рассмотрим

$$\mu(e_0, \mu(e_1, e_0)) = \mu(\mu(e_0, e_1), e_0) - \mu(\mu(e_0, e_0), e_1).$$

Имеем

$$\mu(\mu(e_0, e_1), e_0) = \mu(\mu(e_0, e_0), e_1).$$

Но так как $\mu(e_0, e_0) = e_2$ и $\mu(e_i, e_0) = e_{i+1}$, то

$$\theta_3 e_4 + \theta_4 e_5 + \dots + \theta_{n-1} e_n = \alpha_3 e_4 + \alpha_4 e_5 + \dots + \alpha_{n-1} e_n,$$

откуда

$$\mu(e_0, e_1) = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \theta_n e_n.$$

Итак, в случае 1 получили следующий класс:

$$\mu(e_0,e_0)=e_2, \mu(e_i,e_0)=e_{i+1}, \mu(e_0,e_1)=\alpha_3e_3+\alpha_4e_4+\dots+\alpha_{n-1}e_{n-1}+\theta_ne_n,$$

$$\mu(e_i,e_1)=\alpha_3e_{i+2}+\alpha_4e_{i+3}+\dots+\alpha_{n+1-i}e_n \text{ при } 1\le i\le n.$$

Случай 2. $\mu\cong\mu_1^n+\beta$. В этом случае $\mu(e_0,e_0)=\mu_1^n(e_0,e_0)=e_2$ и $\mu(e_i,e_0)=\mu_1^n(e_i,e_0)=e_{i+1}$ при $2\le i\le n-1$, откуда $e_2,e_3,\dots,e_n\in Z(\mu)$ и тем самым $\mu(e_i,e_j)=0$ при $2\le j\le n$, $0\le i\le n$.

Пусть $\beta(e_1,e_0)=\alpha_3e_3+\alpha_4e_4+\dots+\alpha_ne_n$. Тогда, сделав замену $\bar{e}_1:=e_1-\alpha_3e_2-\alpha_4e_3-\dots-\alpha_ne_{n-1}$, получим

$$\mu(\bar{e}_1,e_0)=\mu_1^n(\bar{e}_1,e_0)+\beta(\bar{e}_1,e_0)=\mu_1^n(-\alpha_3e_2-\alpha_4e_3-\dots-\alpha_ne_{n-1},e_0)+\beta(e_1,e_0)=0.$$

Таким образом, можно полагать $\mu(e_1,e_0)=0$.

Пусть $\mu(e_0,e_1)=\beta_3e_3+\beta_4e_4+\dots+\beta_ne_n$. Рассмотрим произведение

$$\mu(e_0,\mu(e_1,e_0))=\mu(\mu(e_0,e_1),e_0)-\mu(\mu(e_0,e_0),e_1).$$

Поскольку $\mu(e_1,e_0)\in Z(\mu)$, имеем $\mu(\mu(e_0,e_1),e_0)=\mu(\mu(e_0,e_0),e_1)$, следовательно, $\mu(\mu(e_0,e_1),e_0)=\mu(e_2,e_1)$, т. е. $\mu(e_2,e_1)=\beta_3e_4+\beta_4e_5+\dots+\beta_{n-1}e_n$.

Рассмотрим произведение

$$\mu(e_1,\mu(e_0,e_1))=\mu(\mu(e_1,e_0),e_1)-\mu(\mu(e_1,e_1),e_0).$$

Ввиду того, что $\mu(e_0,e_1)\in Z(\mu)$ и $\mu(e_1,e_0)=0$, имеем $\mu(\mu(e_1,e_1),e_0)=0$, но так как e_0 слева аннулирует только e_n, то $\mu(e_1,e_1)=\gamma e_n$.

Изучим произведение

$$\mu(e_i,\mu(e_0,e_1))=\mu(\mu(e_i,e_0),e_1)-\mu(\mu(e_i,e_1),e_0)$$

при $2\le i\le n-1$. Так как $\mu(e_0,e_1)\in Z(\mu)$, имеем $\mu(\mu(e_i,e_0),e_1=\mu(\mu(e_i,e_1),e_0)$, тем самым $\mu(e_{i+1},e_1)=\mu(\mu(e_i,e_1),e_0)$, т. е. $\mu(e_i,e_1)=\beta_3e_{i+2}+\beta_4e_{i+3}+\dots+\beta_{n+1-i}e_n$ при $2\le i\le n-1$.

Итак, в случае 2 получили следующий класс:

$$\mu(e_0,e_0)=e_2, \mu(e_i,e_0)=e_{i+1}, \mu(e_0,e_1)=\beta_3e_3+\beta_4e_4+\dots+\beta_ne_n=\gamma e_n.$$

$$\mu(e_i,e_1)=\beta_3e_{i+2}+\beta_4e_{i+3}+\dots+\beta_{n+1-i}e_n \text{ при } 2\le i\le n.$$

Следствие доказано.

Замечание 2. Классы алгебр из следствия 3 не пересекаются, но вопрос об изоморфизме внутри классов открыт.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Loday J.-L., Pirashvili T.* Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology // Math. Ann. 1993. V. 296, N 1. P. 139–158.
2. *Loday J.-L.* Une version non commutative des algebres de Lie: Les algebres de Leibniz // Enseigh. Math. 1993. V. 39, N 3–4. P. 269–293.
3. *Cabezas J. M., Gomez J. R., Jimenez-Merchan A.* Family of p-filiform Lie algebras // Algebra and operators theory / Proc. of the colloquium in Tashkent, 1997. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ. 1998, P. 93–102.
4. *Омиров Б. А.* Вырождение йордановых алгебр малых размерностей: Дипломная работа. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1993.
5. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1988. Т. 1.
6. *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

7. *Ayupov Sh. A., Omirov B. A.* On Leibniz algebras // Algebra and operator theory / Proc. of the colloquium in Tashkent, 1997. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1998, P. 1–13.

8. *Vergne M.* Cohomologie des algebres de Lie nilpotentes al'etude de la variete des algebras de Lie nilpotentes // Bull. Soc. Math. France. 1970. V. 98. P. 81–116.

Статья поступила 30 сентября 1999 г.,
окончательный вариант — 6 марта 2000 г.

г. Ташкент
Институт математики АН РУз
`shavupov@hal.ufn.net; root@im.tashkent.su`