Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 517.54

СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА К ВЕСОВЫМ ПРОСТРАНСТВАМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н. Ф. Абузярова, Р. С. Юлмухаметов

Аннотация: Рассматриваются линейные топологические пространства: H, состоящее из функций, аналитических в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}^p$ и ограниченных с системой весов $\{u_n(z)\}$, $u_n(z)$ — выпуклые функции $2p$ вещественных переменных, и P, состоящее из целых функций p переменных, ограниченных с системой весов $\{v_n(\lambda)\}$, где $v_n(\bar{\lambda})$, рассматриваемая как функция $2p$ вещественных переменных, является преобразованием Лежандра функции $u_n(z)$. При одном условии «правильности» роста функций $v_n(\lambda)$ доказывается теорема О. В. Епифанова: *сильно сопряженное к H пространство $*$-топологически изоморфно пространству P, изоморфизм устанавливается с помощью преобразования Лапласа.* Библиогр. 9.

Введение

Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^p$, $0 \in D$, $\{u_n(z)\}$ — убывающая последовательность выпуклых функций, принимающих конечные значения в D, каждая из которых удовлетворяет условию $u_n(z) \to \infty$, $z \to \partial D$, $z \in D$. Через H обозначим пространство функций, аналитических в D и удовлетворяющих условию

$$|f(z)|e^{-u_n(z)} \to 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots,$$

когда $\operatorname{dist}(z, \partial D) \to 0$.

Пространство H наделяется естественной топологией проективного предела B-пространств:

$$H_n = \{f \in A(D) : \|f\|_n = \sup_{z \in D} |f(z)|e^{-u_n(z)} < \infty\},$$

где $A(D)$ — пространство всех аналитических в D функций. Система $\{\exp\langle\lambda, z\rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}^p\}$, где $\langle\lambda, z\rangle = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k z_k$, лежит в пространстве H и полна в нем [1].

Каждому линейному непрерывному функционалу S на H поставим в соответствие его преобразование Лапласа:

$$L : S \to \widehat{S}(\lambda) = S(\exp\langle\lambda, z\rangle), \quad \lambda \in \mathbb{C}^p.$$

Преобразование Лапласа инъективно отображает сопряженное пространство H^* в пространство целых функций $A(\mathbb{C}^p)$. Задача описания образа H^* при отображении L рассматривалась в работах [1–3]. Приведем наиболее общий результат, анонсированный в работе [3].

Теорема (О. В. Епифанов). *Пусть*

$$v_n(\lambda) = \sup_{z \in D}(\operatorname{Re}\langle\lambda, z\rangle - u_n(z)), \quad \lambda \in \mathbb{C}^p, n = 1, 2, \dots,$$

и P — пространство целых функций $F(\lambda)$ таких, что для некоторого $n = n(F)$

$$\|F\|_n = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}^p} |F(\lambda)| e^{-v_n(\lambda)} < \infty,$$

с топологией индуктивного предела.

Если выполнено условие

$$v_{n+1}(\lambda) \geq v_n(\lambda) + \ln(1 + |\lambda|) + c_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p, \tag{1}$$

то преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм сильно сопряженного к H пространства H^* на пространство P и, наоборот, изоморфизм P^* на H.

В связи с безвременной смертью О. В. Епифанова доказательство этой теоремы осталось неизвестным. Здесь доказательство проводится в предположении, что весовые функции удовлетворяют некоторому условию «правильности» роста (условие (B)), и представляет собой более простое использование схемы Л. Эренпрайса с применением теоремы Л. Хёрмандера.

Сначала, в § 1, мы изложим доказательство при дополнительном условии на поведение вблизи границы области D элементов пространства H; это условие вытекает из предположения «правильности» роста преобразований Лежандра (см. [4]) весовых функций u_n.

Дадим точную формулировку упомянутого условия. Положим

$$K_n(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^p} e^{\operatorname{Re}\langle \lambda, z\rangle - v_n(\lambda)}\, d\nu(\lambda),$$

где $d\nu$ — элемент объема в $\mathbb{C}^p$.

(A) *Для любого $n = 3p+3, 3p+4, \dots$, существуют номер $m = m(n)$ и постоянная $M = M_n$ такие, что если f голоморфна в D и $\|f\|_k = \sup\limits_{z \in D} |f(z)| e^{-u_k(z)} < \infty$, $k = 1, 2, \dots$, то функция $\frac{f(z)}{K_n(z)}$, продолженная нулем на $\mathbb{C}^p \setminus D$ и рассматриваемая как функция $2p$ вещественных переменных, принадлежит пространству $C^{(3p)}(\mathbb{R}^{2p})$ функций, имеющих непрерывные частные производные до порядка $3p$ включительно, и ее норма в этом пространстве не превосходит $M_n \|f\|_m$.*

В § 2 будет показано, что условие (A) выводится из следующего предположения о весовых функциях:

(B) $v_n \in C^2(\mathbb{C}^p)$, $\sum\limits_{k,m=1}^{2p} \frac{\partial^2 v_n(\lambda)}{\partial x_k \partial x_m} y_k y_m \geq \frac{12p+b_0}{1+|\lambda|^2} |y|^2$, $\quad b_0 > 0$, $\lambda = (x_1 + i x_2, \dots, x_{2p-1} + i x_{2p}) \in \mathbb{C}^p$, $y = (y_1, \dots, y_{2p}) \in \mathbb{R}^{2p}$.

§ 1. Доказательство теоремы О. В. Епифанова при условии (A)

Если $S \in H^*$, то для некоторого n имеем

$$|\widehat{S}(\lambda)| = |S(\exp\langle \lambda, z\rangle)| \leq \|S\|_{H_n^*} \|\exp\langle \lambda, z\rangle\|_{H_n} = \|S\|_{H_n^*} \sup_{z \in D} (\exp(\operatorname{Re}\langle \lambda, z\rangle) - u_n(z)),$$

т. е. $\|\widehat{S}\|_n \leq \|S\|_{H_n^*}$. Таким образом, преобразование L непрерывно и инъективно действует из H^* в P. Основная трудность заключается в доказательстве сюръективности L.

Пусть $F \in P$, т. е. для некоторого $n = n(F)$

$$\|F\|_n = \sup_{\lambda} |F(\lambda)| e^{-v_n(\lambda)} < \infty.$$

Из условия (1) следует, что для всех $m \geq n + p + 1$

$$\int\limits_{\mathbb{C}^p} |F(\lambda)|^2 e^{-2v_m(\lambda)}\, d\nu(\lambda) < C_0 \|F\|_n^2. \tag{2}$$

В пространстве $\mathbb{C}^{2p}$ рассмотрим p-мерное подпространство

$$\Sigma = \{w = (w_1, \dots, w_{2p}) : w_{2k-1} = i\lambda_k,\ w_{2k} = -\lambda_k,\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^p\}$$

и на нем зададим функцию

$$g(w) = F(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}^p,\ w \in \Sigma.$$

Введем в рассмотрение функции в $\mathbb{C}^{2p}$

$$\varphi_n(w) = \sup_{z \in D} \left(\sum_{k=1}^{p} (\operatorname{Re} z_k \cdot \operatorname{Im} w_{2k-1} + \operatorname{Im} z_k \cdot \operatorname{Im} w_{2k}) - u_n(z) \right), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Выпуклые функции φ_n обладают следующими очевидными свойствами:

$$\varphi_n(w) = \varphi_n(i \operatorname{Im} w), \quad w \in \mathbb{C}^{2p}, \tag{3}$$

$$\varphi_n(w) = v_n(\lambda), \quad w \in \Sigma,\ \lambda \in \mathbb{C}^p, \tag{4}$$

$$\varphi_n(iy) = v_n(y_1 - iy_2, \dots, y_{2p-1} - iy_{2p}), \quad y = (y_1, \dots, y_{2p}) \in \mathbb{R}^{2p}. \tag{5}$$

Кроме того, выполняется условие Липшица

$$|\varphi_n(w_1) - \varphi_n(w_2)| \leq (\max_{z \in D} |z|)|w_1 - w_2|. \tag{6}$$

Соотношение (2) означает выполнение условия

$$\int\limits_{\Sigma} |g(w)|^2 e^{-\varphi_m(w)} \leq C_0 \|F\|_n^2.$$

Из свойств (3), (4) и условия (1) вытекает выполнение соотношения

$$\varphi_{n+1} \geq \varphi_n + \ln(1 + |\operatorname{Im} w|) + c_n, \quad n = 1, 2, \dots,\ w \in \mathbb{C}^{2p}. \tag{7}$$

Применим теорему Л. Хёрмандера [5, с. 317], условия которой выполнены ввиду соотношения (6). В силу этой теоремы существует целая функция $f(w)$ на $\mathbb{C}^{2p}$, которая совпадает с функцией g на Σ и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\mathbb{C}^{2p}} |f(w)|^2 e^{-2\varphi_m(w)} (1 + |w|)^{-3p}\, d\nu(w) \leq C_0 \int\limits_{\Sigma} |g(w)|^2 e^{-2\varphi_m(w)}\, d\nu(w).$$

Пользуясь свойством (7) и очевидным неравенством

$$1 + |w|^2 \leq (1 + |x|^2)(1 + |y|^2), \quad w = x + iy \in \mathbb{C}^{2p},$$

получим оценку

$$\int\limits_{\mathbb{C}^{2p}} |f(x + iy)|^2 e^{-2\varphi_k(iy)} (1 + |x|^2)^{-3p}\, dxdy \leq C \|F\|_n^2 \tag{8}$$

для любого $k \geq m + 3p$, где $m \geq n + p + 1$.

Функция $|f(w)|^2$ субгармонична в $\mathbb{C}^{2p}$, поэтому для любого $x \in \mathbb{R}^{2p}$ имеем ($\mathbb{R}^{2p}$ рассматривается как подпространство $\mathbb{C}^{2p}$)

$$|f(x)|^2 \leq \frac{1}{V_{2p}} \int\limits_B |f(x+\xi)|^2 \, d\nu(\xi),$$

где B — единичный шар в $\mathbb{C}^{2p}$, а V_{2p} — его объем. Отсюда и из (6) вытекает оценка

$$|f(x)|^2 e^{-2\varphi_k(x)}(1+|x|^2)^{-3p} \leq \frac{C}{V_{2p}} \int\limits_B \frac{|f(x+\xi)|^2 e^{-2\varphi_k(x+\xi)}}{(1+|x+\xi|^2)^{3p}} \, d\nu(\xi),$$

где

$$C = \sup\left\{ \left(\frac{1+|x+\xi|^2}{1+|x|^2} \right)^{3p} e^{2(\varphi_k(x+\xi)-\varphi_k(x))} : x \in \mathbb{R}^{2p}, \ \xi \in B \right\}.$$

Теперь, проинтегрировав по $x \in \mathbb{R}^{2p}$ и учитывая свойство (3) и оценку (8), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{2p}} |f(x)|^2 (1+|x|^2)^{-3p} \, dx \\ \leq C \int\limits_{\mathbb{C}^{2p}} |f(x+iy)|^2 e^{-2\varphi_k(iy)} (1+|x|^2)^{-3p} \, dxdy \leq C_1 \|F\|_n,$$

где $C_1 = e^{2\varphi_k(0)} C C_0$.

По терминологии из [6, с. 288] функция $f(x)$ является элементом пространства $L^2_{(-3p)}(\mathbb{R}^{2p})$. Другими словами, $f(x)$ является преобразованием Фурье некоторого линейного непрерывного функционала S_0 на пространстве Соболева $W^2_{3p}(\mathbb{R}^{2p})$:

$$f(x) = S_0(e^{-i\langle t,x\rangle}), \quad t,x \in \mathbb{R}^{2p},$$

где $\langle t,x\rangle = \sum\limits_{k=1}^{2p} t_i x_i$. Так как мы знаем, что f — целая функция, то

$$f(w) = S_0(e^{-i\langle t,w\rangle}), \quad w \in \mathbb{C}^{2p}. \tag{9}$$

Из оценки (8) с использованием субгармоничности функции $|f(w)|^2$ и липшицевости функций φ_k можно получить равномерную оценку

$$|f(w)| \leq (1+|w|)^{3p} \exp \varphi_k(i \operatorname{Im} w),$$

и, далее, по свойству (5) имеем

$$|f(w)| \leq (1+|w|)^{3p} \exp v_k(\operatorname{Im} w_1 - i \operatorname{Im} w_2, \dots, \operatorname{Im} w_{2p-1} - i \operatorname{Im} w_{2p}) \\ \leq (1+|w|)^{3p} H(\operatorname{Im} w),$$

где $H(y) = \sup\left\{ \sum\limits_{k=1}^{2p} t_k y_k, \ t = (t_1, \dots, t_{2p}) \in D \right\}$ — опорная функция компакта D, рассматриваемого как подмножество $\mathbb{R}^{2p}$. Последнее соотношение по теореме Пэли — Винера — Шварца [7, с. 280] означает, что носитель функционала S_0 лежит в $\overline{D}$.

Возьмем произвольное $y \in \mathbb{R}^{2p}$ и рассмотрим функционал S_y :

$$S_y : g \mapsto S_0(g(t)e^{\langle t,y\rangle}), \quad g \in W^2_{3p}.$$

Очевидно, S_y — линейный непрерывный функционал, и согласно соотношению (9) имеем

$$S_y(e^{-i(t,x)}) = S_0(e^{-i\langle t,x+iy\rangle}) = f(x+iy), \quad (x+iy) \in \mathbb{C}^{2p}.$$

Отсюда по формуле Парсеваля получим

$$\|S_y\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^{2p}} |f(x+iy)|^2(1+|x|^2)^{-3p}\,dx.$$

Разделим это равенство на $e^{2\varphi_k(iy)}$, $k > n+4p$, и проинтегрируем по $y \in \mathbb{R}^{2p}$. Учитывая соотношение (8), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{2p}} \|S_y\|^2 e^{-2\varphi_k(iy)}\,dy \le C\|F\|^2_n. \tag{10}$$

Далее, воспользуемся условием (A). В силу этого условия для любой функции $f \in H$, для любых $j \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{R}^{2p}$ определены значения $S_y\big(\frac{f(z)}{K_j(z)}\big)$ функционала S_y на функции $\frac{f(z)}{K_j(z)}$. Здесь $z = (t_1+i\tau_1,\dots,t_p+i\tau_p)$ интерпретируется как элемент $(t_1,\tau_1,\dots,t_p,\tau_p) \in \mathbb{R}^{2p}$. Докажем, что для любых функции $f \in H$ и значения индекса $j = n+5p+2$ интеграл

$$S(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2p}} S_y\left(\frac{f(z)}{K_j(z)}\right)e^{-\varphi_j(iy)}\,dy \tag{11}$$

сходится.

Действительно, по свойству (7), используя неравенство Коши — Буняковского, при $k = 4p+n+1$ находим

$$\begin{aligned}
|S(f)| &\le C\int\limits_{\mathbb{R}^{2p}} \left|S_y\left(\frac{f(z)}{K_j(z)}\right)\right| e^{-\varphi_k(iy)}(1+|y|)^{-(p+1)}dy \\
&\le C\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{2p}} \left|S_y\left(\frac{f(z)}{K_j(z)}\right)\right|^2 e^{-2\varphi_k(iy)}\,dy\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{2p}}(1+|y|^{-2(p+1)})\,dy\Bigg)^{1/2} \\
&\le C_1\left|\frac{f(z)}{K_j(z)}\right|_{C^{(3p)}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{2p}} \|S_y\|^2 e^{-2\varphi_k(iy)}\,dy\Bigg)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Теперь воспользуемся оценкой (10):

$$|S(f)| \le C_2\|f\|_m\|F\|_n,$$

где $m = m(j) = m(n+5p+2)$ — номер из условия (A). Это неравенство означает, что (11) определяет линейный непрерывный функционал S на H, причем для m, зависящего от n, имеем

$$||S||_{H^*_m} \le C_3\|F\|_n. \tag{12}$$

Найдем образ $L(S)$ функционала S.

Пусть $\min\{v_n(\lambda), \lambda \in \mathbb{C}^p\} = v_n(\lambda_0)$. Для $\alpha \in (0;1)$ рассмотрим функции $F_\alpha(\lambda) = F(\lambda_0 + \alpha(\lambda - \lambda_0))$. На лучах, исходящих из точки λ_0, выпуклая функция v_n возрастает, поэтому для всех $\lambda \in \mathbb{C}^p$ будет

$$|F_\alpha(\lambda)| = |F(\lambda_0 + \alpha(\lambda - \lambda_0)| \le \|F\|_n e^{v_n(\lambda_0 + \alpha(\lambda - \lambda_0))} \le \|F\|_n e^{v_n(\lambda)}$$

или $\|F_\alpha\|_n \le \|F\|_n$.

Из этой оценки получим, что

$$\|F - F_\alpha\|_{n+1} \to 0$$

при $\alpha \to 1$.

По функциям F_α, $\alpha \in (0,1)$, можем построить функционалы $S_0^{(\alpha)}$ и $S^{(\alpha)}$ так же, как по функции F были построены функционалы S_0 и S. Очевидно, что носитель функционала $S_0^{(\alpha)}$ будет лежать в $\alpha\overline{D}$ и, следовательно, так как $0 \in D$, в D.

Применив неравенство (12) к разности $F - F_\alpha$, получим

$$\|S - S^{(\alpha)}\| \le \text{const}\, \|F - F_\alpha\|_{n+1},$$

т. е. $S^{(\alpha)} \to S$, $\alpha \to 1$, в топологии H^*.

Пусть $f_\alpha(w)$ — целая функция, полученная продолжением $g_\alpha(w) = F_\alpha(\lambda)$ с плоскости Σ на $\mathbb{C}^{2p}$. Докажем сначала, что $S^{(\alpha)}(e^{-i\langle t,x\rangle}) = f_\alpha(x)$, $\alpha \in (0,1)$, затем из этого соотношения выведем, что $\widehat{S}(\lambda) = F(\lambda)$, где $\widehat{S} = L(S)$ — преобразование Лапласа функционала S, определяемого по функции F соотношением (11).

Воспользовавшись определением (11), приходим к равенствам

$$S^{(\alpha)}(e^{-i(t,x)}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2p}} S_y^\alpha \left(\frac{e^{-i(t,x)}}{K_j(z)} \right) e^{-\varphi_j(iy)}\, dy$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int\limits_{|y|\le M} S_0^\alpha \left(\frac{e^{-i(t,x)+(t,y)}}{K_j(z)} \right) e^{-\varphi_j(iy)}\, dy.$$

Здесь точки $z = (t_1 + it_2, \dots, t_{2p-1} + it_{2p})$ и $t = (t_1, \dots, t_{2p})$ отождествляются.

Так как выпуклая функция $u_k(z)$ ограничена сверху на компактах из D, то

$$\varphi_k(iy) = v_k(\lambda) \ge H_\alpha(y) - \text{const},$$

$\alpha \in (0;1)$, $y \in \mathbb{R}^{2p}$, $\lambda = (y_1 - iy_2, \dots, y_{2p-1} - iy_{2p})$, H_α — опорная функция множества $\alpha\overline{D}$, рассматриваемого как подмножество $\mathbb{R}^{2p}$. Поэтому интегралы вида

$$\int\limits_{\mathbb{C}^p} \frac{e^{\langle z,\lambda\rangle - v_j(\lambda)}}{K_j(z)} |w|^q\, d\nu(\lambda)$$

сходятся равномерно по $z \in \alpha\overline{D}$ и, значит, интегралы

$$\int\limits_{|w|\le M} \frac{e^{\langle t,x\rangle\langle t,w\rangle - v_j(w)}}{K_j(z)} |w|^q\, d\nu(w)$$

сходятся в топологии W_{3p}^2 при $M \to \infty$ к $e^{-i\langle t,x\rangle}$ как функции переменной t.

В силу вышесказанного имеем

$$S^{(\alpha)}(e^{-i\langle t,x\rangle}) = S_0^{(\alpha)}(e^{-i\langle t,x\rangle}) = f_\alpha(x), \quad \alpha \in (0,1).$$

Поэтому $S^{(\alpha)}(e^{-i\langle t,w\rangle}) = f_(\alpha)(w)$. При $w \in \Sigma$ имеем $S^{(\alpha)}(e^{\langle z,\lambda\rangle}) = F_\alpha(\lambda)$. Переходя к пределу при $\alpha \to 1$, получим $\widehat{S}(\lambda) = F(\lambda)$. Теорема доказана.

§ 2. Достаточность условия (B)

Пусть $\{u_n\}$ — убывающая последовательность выпуклых функций, принимающих конечные значения в ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}^p$, и

$$v_n(\lambda) = \sup_{z \in D}(\operatorname{Re}\langle\lambda, z\rangle - u_n(z)), \quad \lambda \in \mathbb{C}^p,$$

$$K_n(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^p} e^{\operatorname{Re}\langle\lambda, z\rangle - v_n(\lambda)}\, d\nu(\lambda),$$

где $d\nu$ — элемент объема в $\mathbb{C}^p$. В этом параграфе будет показано, что из условия (B) вытекает условие (A) (см. введение).

Предварительно докажем ряд вспомогательных лемм.

1. В первых двух леммах производится локализация интегралов вида

$$\int\limits_{\mathbb{R}^q} e^{(x,t) - w(x)}\, dx,$$

где $w(x)$, $x \in \mathbb{R}^q$, — выпуклая неотрицательная функция, удовлетворяющая условию типа (B).

Через $B(x_0, r)$ будем обозначать евклидов шар $\{x \in \mathbb{R}^q : |x - x_0| < r\}$.

Лемма 1. *Пусть $v \in C^2(\mathbb{R}^q)$ и*

$$\sum_{k,m=1}^{q} \frac{\partial^2 v_n(x)}{\partial x_k \partial x_m} y_k y_m \geq \frac{b}{1 + |x|^2} |y|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^q,\ b > 0;$$

положим

$$K(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^q} e^{(x,t) - v(x)}\, dx,$$

где (x, t) — евклидово скалярное произведение. Через x_t обозначим точку, в которой достигается $\sup\limits_x((x, t) - v(x))$ (рассматриваются те значения t, для которых этот супремум конечен).

Тогда существует постоянная $M = M(b)$ такая, что

$$K(t) \leq M \int\limits_{B(x_t, \frac{1}{2}(1 + |x_t|)} e^{(x,t) - v(x)}\, dx.$$

Доказательство. Воспользуемся приемом из работы [8]. Положим

$$\varphi_t(x) = (x_t, t) - v(x_t) - ((x, t) - v(x)),$$
$$D_t(s) = \{x \in \mathbb{R}^q : \varphi_t(x) \leq s\}, \quad \alpha_t(s) = V(D_t(s)),\ s \geq 0,$$

где $V(A)$ — объем множества A. Очевидно, что при фиксированном t функция $\varphi_t(x)$ выпукла, неотрицательна и $\varphi_t(x_t) = 0$, множество $D_t(s)$ выпукло при каждом s. Функция $(\alpha_t(s))^{\frac{1}{q}}$ вогнута на $[0, +\infty)$ [9]. Кроме того, в условиях леммы $\alpha_t(0) = 0$. Возьмем произвольное число $a \in (0, 1]$. Из вогнутости функции $(\alpha_t(s))^{\frac{1}{q}}$ следует неравенство

$$\alpha_t(s) \leq \alpha_t(a) \frac{s^q}{a^q}, \quad s \geq a.$$

Отсюда и из представления

$$\int\limits_{\mathbb{R}^q} e^{-\varphi_t(x)}\,dx = \int\limits_0^\infty e^{-s}\,d\alpha_t(s) = \int\limits_0^\infty \alpha_t(s)e^{-s}\,ds$$

вытекает, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^q} e^{-\varphi_t(x)}\,dx \le \int\limits_0^a \alpha_t(s)e^{-s}\,ds + \alpha_t(a)\int\limits_a^\infty \frac{s^q}{a^q}e^{-s}\,ds$$

$$\le \alpha_t(a)\left[\int\limits_0^a e^{-s}ds + \int\limits_a^\infty \frac{s^q}{a^q}e^{-s}\,ds\right] \le \frac{(q+1)!}{a^q}\alpha_t(a).$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{D_t(a)} e^{-\varphi_t(x)}\,dx \ge e^{-a}\alpha_t(a).$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^q} e^{-\varphi_t(x)} \le \frac{(q+1)!}{a^q}e^a \int\limits_{D_t(a)} e^{-\varphi_t(x)}\,dx.$$

Подставив в это неравенство определение функции $\varphi_t(x)$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^q} e^{(x,t)-v(x)}\,dx \le \frac{(q+1)!}{a^q}e^a \int\limits_{D_t(a)} e^{(x,t)-v(x)}\,dx. \tag{13}$$

Заметим, что до сих пор не использовалось условие на функцию v. Его мы используем для того, чтобы показать существование числа a, для которого $D_t(a)\subset B\bigl(x_t, \frac{1}{2}(1+|x_t|)\bigr)$.

По формуле Тейлора, примененной к функции v, имеем

$$v(x) = v(x_t) + (\nabla v(x_t), x-x_t) + \frac{1}{2}(D^2 v(x^*)(x-x_t), x-x_t),$$

где x^* — точка на отрезке, соединяющем x и x_t, а через $D^2v(x^*)$ обозначена матрица вторых производных функции v в этой точке. В условиях леммы $\nabla v(x_t)=t$, поэтому для функции $\varphi_t(x)$ имеем представление

$$\varphi_t(x) = v(x) - v(x_t) - (\nabla v(x_t), x-x_t) = \frac{1}{2}(D^2v(x^*)(x-x_t), x-x_t).$$

Отсюда в силу условия леммы получим

$$\varphi_t(x) \ge \frac{b|x-x_t|^2}{2(1+|x^*|^2)}.$$

Если точка x такова, что $|x-x_t| = \frac{1}{2}(1+|x_t|^2)$, то $|x^*| \le |x_t| + |x-x_t| \le |x_t| + |x-x_t| \le \frac{3}{2}(1+|x_t|^2)$. Следовательно,

$$\varphi_t(x) > \frac{b|x-x_t|^2}{8(1+|x_t|)^2}$$

на сфере $\{x : |x-x_t| = \frac{1}{2}(1+|x_t|)\}$. Из этого неравенства вытекает, что на указанной сфере выполняется оценка

$$\varphi_t(x) > \frac{b}{32}.$$

Учитывая то, что $x_t\in D_t(b/32)$, и последнюю оценку, заключаем, что выпуклое множество $D_t(b/32)$ содержится в шаре $B(x_t, \frac{1}{2}(1+|x_t|))$. Остается воспользоваться соотношением (13) с $a=\min\{1, b/32\}$. В качестве искомой постоянной $M=M(b)$ можно взять $(q+1)!e^{b/32}(32/b)^q$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть функция v удовлетворяет условию леммы 1 с постоянной $b = 12p + b_0$, $b_0 > 0$; x_t, как и выше, обозначает точку достижения $\sup\limits_x((x,t) - v(x))$ и*

$$K_s(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^q} e^{(x,t)-v(x)}(1+|x|^2)^s\,dx.$$

Тогда существует постоянная M' такая, что для всех s, $-\frac{3}{2}p \le s \le \frac{3}{2}p$, верна оценка

$$K_s(t) \le M' \int\limits_{B(x_t,\frac{1}{2}(1+|x_t|))} e^{(x,t)-v(x)}(1+|x^2|)^s\,dx.$$

Доказательство. Элементарными вычислениями убедимся в выполнении оценки

$$\left|\sum_{k,m=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} \ln(1+|x|^2) y_k y_m\right| \le \frac{6|y|^2}{1+|x|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^q.$$

Поэтому при фиксированном s, $-\frac{3}{2}p \le s \le \frac{3}{2}p$, для функции

$$w(x) = v(x) - s\ln(1+|x|^2)$$

выполняется условие

$$\sum_{k,m=1}^{q} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_k \partial x_m} y_k y_m \ge \frac{(3p+b_0)|y|^2}{1+|x|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^q.$$

Следовательно, к этой функции применима лемма 1:

$$K_s(t) \le M \int\limits_{B(x'_t,\frac{1}{2}(1+|x'_t|)} e^{(x,t)-v(x)}(1+|x|^2)^s\,dx,$$

где x'_t — точка достижения $\sup\limits_x((x,t) - w(x))$. Отсюда, вынося из-под интеграла величину

$$\max\left\{(1+|x|^2)^s : x \in B\left(x'_t, \frac{1}{2}(1+|x'_t|)\right)\right\}$$

и затем применяя лемму 1 к функции v, получим

$$K_s(t) \le CM(1+|x'_t|^2)^s \int\limits_{\mathbb{R}^q} e^{(x,t)-v(x)}\,dx$$

$$\le CM^2(1+|x'_t|^2)^s \int\limits_{B(x_t,\frac{1}{2}(1+|x_t|))} e^{(x,t)-v(x)}\,dx,$$

где

$$C = \max\left\{\left(\frac{1+|x|^2}{1+|x'_t|^2}\right)^{(3/2)p}, \ |x - x'_t| \le \frac{1}{2}(1+|x'_t|^2)\right\} \quad \text{при } s \ge 0,$$

$$C = \max\left\{\left(\frac{1+|x'_t|^2}{1+|x|^2}\right)^{(3/2)p}, \ |x - x'_t| \le \frac{1}{2}(1+|x'_t|^2)\right\} \quad \text{при } s \le 0.$$

Утверждение леммы, очевидно, будет следовать из оценок

$$1+|x_t'|^2 \le C_1(1+|x_t|^2) \quad \text{для } s \ge 0, \tag{14}$$

$$1+|x_t|^2 \le C_2(1+|x_t'|^2) \quad \text{для } s \le 0, \tag{15}$$

где C_1, C_2 — некоторые постоянные.

Докажем первую из них. Допустим, что $|x_t'| \ge |x_t|$. По определению точек x_t, x_t' имеем $\nabla v(x_t) = t$, $\nabla w(x_t') = t$, поэтому

$$(\nabla v(x_t) - \nabla v(x_t'), x_t - x_t') = \frac{2s}{1+|x_t'|^2}(x_t', x_t - x_t').$$

Рассмотрим функцию

$$f(\tau) = (\nabla v(x_t' + \tau(x_t - x_t')), x_t - x_t'), \quad \tau \in [0,1].$$

По теореме о среднем имеем

$$f(1) - f(0) = f'(\tau^*), \quad \tau^* \in [0,1].$$

Полагая $x_t' + \tau^*(x_t - x_t') = x^*$, получим

$$(D^2 v(x^*)(x_t - x_t'), x_t - x_t') = \frac{2s}{1+|x_t'|^2}(x_t', x_t - x_t').$$

По условию леммы отсюда вытекает неравенство

$$\frac{(12p+b_0)\,|x_t - x_t'|^2}{1+|x^*|^2} \le \frac{2s|x_t'|}{1+|x_t'|^2}\,|x_t - x_t'|. \tag{16}$$

Поскольку мы предполагаем, что $1+|x^*|^2 \le 1+|x_t'|^2$, то

$$(12p+b_0)|x_t - x_t'| \le 3p|x_t'|$$

и

$$|x_t'| \le |x_t| + |x_t - x_t'| \le |x_t| + \frac{3p}{12p+b_0}|x_t'|.$$

Таким образом,

$$|x_t'| \le \frac{12p+b_0}{9p+b_0}|x_t|.$$

Значит, в неравенстве (14) можно положить $C_1 = \frac{12p+b_0}{9p+b_0}$.

Для доказательства неравенства (15) применяются те же рассуждения, что и выше, но v и w, x_t и x_t' меняются ролями. В результате приходим к неравенству, аналогичному (16):

$$\frac{(3p+b_0)\,|x_t - x_t'|^2}{1+|x^*|^2} \le \frac{2s|x_t|}{1+|x_t|^2}\,|x_t - x_t'|,$$

из которого выводится (15) с $C_2 = \frac{3p+b_0}{b_0}$. Лемма 2 доказана.

Следующая лемма описывает одно свойство преобразования Лежандра заданной выпуклой функции.

Лемма 3. *Пусть функция v удовлетворяет условию леммы 1 и x_t — точка достижения $\sup\limits_x((x,t)-v(x))$. Положим $u(t)=\sup\limits_x((x,t)-v(x))$. Тогда если*

$$|t-\tau|\le\frac{cb}{2(1+|x_t|)},$$

где $c=\int\limits_0^{1/2}\frac{dt}{1+t^2}$, то

$$|u(t)-u(\tau)|\le\frac{3bc}{4}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что при $|t-\tau|\le\frac{bc}{2(1+|x_t|)}$ будет

$$|x_t-x_\tau|\le\frac12(1+|x_t|).$$

Рассмотрим функцию $R(s)=v((x_\tau-x_t)s+x_t)$, $s\in[0,1]$, и воспользуемся формулой $R'(1)-R'(0)=\int\limits_0^1 R''(s)\,ds$. Из определения функции R получим

$$(\tau-t,x_\tau-x_t)=\int\limits_0^1(D^2v((x_\tau-x_t)s+x_t)(x_\tau-x_t),x_\tau-x_t)\,ds.$$

Применим к левой части этого соотношения неравенство Коши — Буняковского, а правую оценим, используя условие на функцию v:

$$|\tau-t|\cdot|x_\tau-x_t|\ge b|x_\tau-x_t|^2\int\limits_0^1\frac{ds}{(1+|(x_\tau-x_t)s+x_t|^2)}.$$

Для сокращения записи введем обозначения

$$|x_\tau-x_t|=\zeta,\quad 1+|x_t|=\eta.$$

Тогда если $|t-\tau|\le\frac{bc}{2(1+|x_t|)}$, то

$$\frac{bc\zeta}{2\eta}\ge\frac{b\zeta^2}{2}\int\limits_0^1\frac{ds}{\zeta^2s^2+\eta^2}=\frac{b\zeta}{2\eta}\int\limits_0^{\zeta/\eta}\frac{dt}{1+t^2}.$$

Отсюда, учитывая определение числа c, получим

$$\int\limits_0^{1/2}\frac{dt}{1+t^2}\ge\int\limits_0^{\zeta/\eta}\frac{dt}{1+t^2},$$

следовательно, $\zeta/\eta\le 1/2$ и

$$|x_t-x_\tau|\le\frac12(1+|x_t|).$$

По теореме о среднем имеем $u(t)-u(\tau)=(\nabla u(\tau^*),t-\tau)$, где τ^* — точка на отрезке, соединяющем t и τ. По доказанному выше

$$|x_t-x_{\tau^*}|\le\frac12(1+|x_t|),$$

значит,

$$|\nabla u(\tau^*)| = |x_{\tau^*}| \le \frac{3}{2}(1 + |x_t|).$$

Таким образом,

$$|u(t) - u(\tau)| \le \frac{3cb}{4} \le \frac{3b}{4}.$$

Лемма 3 доказана.

2. Пусть теперь $\{u_n\}$ — убывающая последовательность выпуклых функций на ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}^p$ и

$$v_n(\lambda) = \sup_z (\mathrm{Re}\langle \lambda, z\rangle - u_n(z)), \quad K_n(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^p} e^{\mathrm{Re}\langle \lambda, z\rangle - v_n(\lambda)}\, d\nu(\lambda),$$

где $d\nu(\lambda)$ — элемент объема в $\mathbb{C}^p$.

Будем предполагать далее выполненными условия (B) и

(C) *существуют числа c_n такие, что*

$$v_{n+1}(\lambda) \ge v_n(\lambda) + \ln(1 + |\lambda|) + c_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p.$$

Следующая лемма позволяет ввести в пространстве H топологию, эквивалентную исходной и определяемую гладкими весами $K_n(z)$.

Лемма 4. *Существуют постоянные $m_n, M_n > 0$ такие, что*

$$m_n K_{n+2p+1}(z) \le e^{u_n(z)} \le M_n K_n(z), \quad n = 1, 2, \dots, \ z \in D. \tag{17}$$

Доказательство. Функция $v_n(\lambda)$ является преобразованием Лежандра функции $u_n(\bar z)$. Из свойств преобразования Лежандра [4] следует, что

$$u_n(z) = \sup_\lambda (\mathrm{Re}\langle \lambda, z\rangle - v_n(\lambda)).$$

Нетрудно проверить, что функции $v_n(\lambda)$ удовлетворяют условию Липшица

$$|v_n(\lambda_1) - v_n(\lambda_2)| \le \max_{z \in D} |z| \cdot |\lambda_1 - \lambda_2|, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^p.$$

Поэтому если через λ_z обозначим точку достижения $\sup\limits_\lambda (\mathrm{Re}\langle \lambda, z\rangle - v_n(\lambda))$, то

$$\begin{aligned} e^{u_n(\lambda)} &= e^{\mathrm{Re}\langle \lambda_z, z\rangle - v_(\lambda_z)} \frac{1}{V_{2p}} \int\limits_{|\lambda - \lambda_z| \le 1} d\nu(\lambda) \\ &= \frac{1}{V_{2p}} \int\limits_{|\lambda - \lambda_z| \le 1} e^{\mathrm{Re}\langle \lambda, z\rangle - v_n(\lambda)} e^{\mathrm{Re}\langle \lambda_z - \lambda, z\rangle - (v_n(\lambda_z) - v_n(\lambda))}\, d\nu(\lambda) \\ &\le \frac{K_n(\lambda)}{V_{2p}} e^{2 \max\limits_{z \in D} |z|}, \end{aligned}$$

где V_{2p} — объем шара единичного радиуса в $\mathbb{C}^p(\mathbb{R}^{2p})$, и в качестве M_n можно взять число $\frac{1}{V_{2p}} \exp(2 \max\limits_{z \in D} |z|)$. Левое неравенство в (17) выводится из условия (C):

$$\begin{aligned} K_{n+2p+1}(z) &\le \exp\left(\sum_{k=n}^{n+2p} c_k\right) \int\limits_{\mathbb{C}^p} e^{\mathrm{Re}\langle \lambda, z\rangle - v_n(\lambda)} (1 + |\lambda|)^{-2p-1}\, d\nu(\lambda) \\ &\le C_p \exp\left(\sum_{k=n}^{n+2p} c_k\right) e^{u_n(z)}, \end{aligned}$$

где $C_p = \int\limits_{\mathbb{C}^p} (1+|\lambda|)^{-2p-1}\, d\nu(\lambda)$. Лемма 4 доказана.

Докажем теперь, используя установленные факты, что при выполнении условия (B) операции частного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial z_k}$, $k = 1,\dots,p$, непрерывно действуют из H в H.

Лемма 5. *Существуют постоянные $N_n > 0$ такие, что если функция f голоморфна в D и*

$$\|f\|_n = \sup_z |f(z)| e^{-u_n(z)} < \infty, \quad n = 1,2,\dots,$$

то для всех $k = 1,\dots,p$

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial z_k}\right\|_n \le N_n \|f\|_{n+2(p+1)}, \quad n = 1,2,\dots.$$

Доказательство. Для точки $z \in D$ обозначим через λ_z точку достижения $\sup\limits_{\lambda}(\operatorname{Re}\langle\lambda, z\rangle - v_n(\lambda))$. Положим $r = \frac{(12p+b_0)c}{2(1+|\lambda_z|)}$, где постоянная c та же, что и в лемме 3. Из формулы Коши для производных следует неравенство

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial z_k}\right| \le \frac{2}{r} \max_{|\zeta - z|\le r} |f(\zeta)| \le \frac{2e^{u_n(z)}}{r} \max_{|\zeta - z|\le r} |f(\zeta)| e^{-u_n(\zeta)} \max_{|\zeta - z|\le r} e^{u_n(\zeta) - u_n(z)}.$$

По лемме 3 имеем

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial z_k}\right| \le \frac{4(1+|\lambda_z|)}{(12p+(b_0))c} \|f\|_n e^{(3(12p+b_0)c)/4} e^{u_n(z)}.$$

Воспользуемся теперь леммой 4:

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial z_k}\right| \le \frac{e^{(3(12p+b_0)c)/4}}{(6p+(b_0/2))c} \|f\|_n (1+|\lambda_z|) M_n K_n(z).$$

Применив лемму 1 для локализации интеграла $K_n(z)$, получим

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial z_k}\right| \le C M_n \|f\|_n (1+|\lambda_z|) \int\limits_{B(\lambda_z, \frac{1}{2}(1+|\lambda_z|))} e^{\operatorname{Re}\langle\lambda, z\rangle - v_n(\lambda\, d\nu(\lambda))}$$
$$\le C_1 M_n \|f\|_n \int\limits_{\mathbb{C}^p} e^{\operatorname{Re}\langle\lambda, z\rangle - v_n(\lambda)} (1+|\lambda|)\, d\nu(\lambda),$$

где

$$C = \frac{e^{(3(12p+b_0)c)/4}}{(6p+(b_0/2))c} M, \quad C_1 = C \max\left\{\frac{1+|\lambda_z|}{1+|\lambda|} : |\lambda - \lambda_z| \le \frac{1}{2}(1+|\lambda_z|)\right\}.$$

Отсюда и из условия (C) на функции v_n вытекает, что

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial z_k}\right| \le C_1 M_n \|f\|_n e^{c_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{C}^p} e^{\operatorname{Re}\langle\lambda, z\rangle - v_{n-1}(\lambda)}\, d\nu(\lambda) = M_n' \|f\|_n K_{n-1}(z),$$

где $M_n' = C_1 M_n e^{c_{n-1}}$.

Снова воспользуемся леммой 4:

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial z_k}\right| \le \frac{M_n'}{m_{n-2(p+1)}} e^{u_{n-2(p+1)}(z)} \|f\|_n.$$

Последнее неравенство равносильно тому, что

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial z_k}\right\|_n \leq N_n \|f\|_{n+2(p+1)}$$

с $N_n = \frac{M'_{n+2(p+1)}}{m_n}$. Лемма 5 доказана.

Доказательство импликации (B) $\Longrightarrow$ (A). Из условия (C) на функции v_n и определения преобразования Лежандра нетрудно вывести, что $e^{u_m(z)-u_n(z)} \to 0$, когда $\operatorname{dist}(z,\partial D) \to 0$, $z \in D$. Учитывая этот факт, а также определение пространства H и лемму 4, заключаем, что

$$\frac{f(z)}{K_n(z)} \to 0,$$

когда $\operatorname{dist}(z,\partial D) \to 0$, $z \in D$, $f \in H$, при каждом фиксированном $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому продолженная нулем на $\mathbb{C}^p \setminus D$ функция $\frac{f(z)}{K_n(z)}$ непрерывна.

Рассмотрим производную

$$\frac{\partial^{|k|}(f(t)/K_n(t))}{\partial t^k},$$

где $k = (k_1, \ldots, k_{2p})$ — мультииндекс, $t \in D$, $t = (t_1, \ldots, t_{2p})$, $z = (t_1 - it_2, \ldots, t_{2p-1} - it_{2p})$, $\partial t^k = \partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_{2p}^{k_{2p}}$, $|k| = k_1 + \cdots + k_{2p} \leq 3p$.

Достаточно показать, что

$$\frac{\partial^{|k|}(f(t)/K_n(t))}{\partial t^k} \to 0, \quad \operatorname{dist}(t,\partial D) \to 0,\ t \in D.$$

Имеем

$$\frac{\partial^{|k|}(f(t)/K_n(t))}{\partial t^k} = \frac{\partial^{|k|} f(t)}{\partial t^k}\frac{1}{K_n(t)} - f(t)\frac{\partial^{|k|}K_n(t)}{\partial t^k}\frac{1}{K_n^2(t)};$$

первое слагаемое стремится к нулю при $\operatorname{dist}(t,\partial D) \to 0$, $t \in D$, в силу замечаний, сделанных в начале доказательства.

Оценим второе слагаемое:

$$\left|f(t)\frac{\partial^{|k|}K_n(t)}{\partial t^k}\frac{1}{K_n^2(t)}\right| \leq \|f\|_m K_m(t) \int\limits_{\mathbb{R}^{2p}} (1+|x|^2)^{(3p)/2} e^{(x,t)-v_n(x)}\,dx \frac{1}{K_n^2(t)}.$$

Из условия (C) на функции $v_m(x)$ следует, что

$$\left|f(t)\frac{\partial^{|k|}K_n(t)}{\partial t^k}\frac{1}{K_n^2(t)}\right| \leq \|f\|_m (\sqrt{2})^{n-m} \exp\left(\sum_{j=m}^{n-1} c_j\right)$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{2p}} (1+|x|^2)^{-(n-m)/2} e^{(x,t)-v_n(x)}\,dx \int\limits_{\mathbb{R}^{2p}} (1+|x|^2)^{(3p)/2} e^{(x,t)-v_n(x)}\,dx \frac{1}{K_n^2(t)};$$

положим $m = n - 3p - 2$, тогда в силу леммы 2 будет

$$\left|f(t)\frac{\partial^{|k|}K_n(t)}{\partial t^k}\frac{1}{K_n^2(t)}\right| \leq \|f\|_m (\sqrt{2})^{3p+2} \exp\left(\sum_{j=m}^{n-1} c_j\right) M^2 C^2 \frac{1}{1+|x_t|^2},$$

где x_t — точка достижения $\sup\limits_x((x,t)-v_n(x))$,

$$C=\max\biggl\{\max\biggl\{\left(\frac{1+|x_t|^2}{1+|x|^2}\right)^{\frac{3p}{2}+1},\left(\frac{1+|x|^2}{1+|x_t|^2}\right)^{\frac{3p}{2}+1}\biggr\}:x\in B\biggl(x_t,\frac{1}{2}(1+|x_t|)\biggr)\biggr\}.$$

Из свойств выпуклых функций следует, что

$$\frac{1}{1+|x_t|^2}\to 0,\quad \operatorname{dist}(t,\partial D)\to 0,$$

значит, тем более

$$f(t)\frac{\partial^{|k|}K_n(t)}{\partial t^k}\frac{1}{K_n^2(t)}\to 0,$$

когда $\operatorname{dist}(t,\partial D)\to 0$, $t\in D$.

Таким образом,

$$\frac{\partial^{|k|}(f(t)/K_n(t))}{\partial t^k}\to 0,\quad \operatorname{dist}(t,\partial D)\to 0,\ t\in D,$$

при всех k, $|k|\le 3p$, и нужная импликация доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юлмухаметов Р. С.* Пространство аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 1. С. 41–52.
2. *Напалков В. В.* Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1987. Т. 51, № 2. С. 287–305.
3. *Епифанов О. В.* Двойственность одной пары пространств аналитических функций ограниченного роста // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 6. С. 1297–1300.
4. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
5. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Ч. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1986.
6. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Ч. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
7. *Владимиров В. С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
8. *Юлмухаметов Р. С.* Асимптотика многомерного интеграла Лапласа // Исследования по теории приближений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1988. С. 132–137.
9. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 17 сентября 1998 г.

г. Уфа
Башкирский гос. университет, математический факультет