Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 515

О ФУНКТОРАХ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ И κ–МЕТРИЗУЕМЫХ БИКОМПАКТАХ

А. В. Иванов

Аннотация: Введено понятие строго эпиморфного ковариантного функтора, действующего в категории Comp. Основным результатом является теорема 1, утверждающая, что если F и G — полунормальные [4] строго эпиморфные функторы и X, Y принадлежат классу HC однородных по характеру κ-метризуемых бикомпактов несчетного веса, то из гомеоморфности пространств $F_m(X)$ и $G_n(Y)$ следует гомеоморфность $F_{m-1}(X)$ и $G_{n-1}(Y)$ $(m, n \geq 3)$. Условиям теоремы удовлетворяют такие функторы, как exp, λ, P и функторы полных k-сцепленных систем N^k $(k \geq 2)$. Для всех перечисленных функторов получены следствия, утверждающие, что пространства вида $F_m(X)$ и $F_n(Y)$ $X, Y \in HC$ почти всегда не гомеоморфны. Библиогр. 9.

Мы будем рассматривать только ковариантные функторы, действующие из категории бикомпактов и непрерывных отображений в ту же категорию. Целью работы является изучение вопроса о существовании гомеоморфизма между пространствами вида $F_m(X)$ и $G_n(Y)$, где F и G — функторы, m, n — натуральные числа, а X, Y — пространства из класса однородных по характеру κ-метризуемых бикомпактов несчетного веса (этот класс в дальнейшем будем обозначать через HC — определение см. в [1]). Исследования в этом направлении проводились многими авторами (см., например, [2–4], а также [5, 6]) и касались, в основном, конкретных функторов: λ, exp, P, N, и конкретных пространств из класса HC таких, как D^τ, I^τ или K^τ, где K — неодноточечный компакт.

В работе введено понятие строго эпиморфного функтора (при этом все упомянутые выше функторы оказываются строго эпиморфными) и доказана следующая основная теорема: *если F и G — полунормальные* (*в смысле* [4]) *строго эпиморфные функторы и $X, Y \in HC$, то всякий гомеоморфизм $g : F_m(X) \to G_n(Y)$ обязательно отображает подпространство $F_{m-1}(X) \subset F_m(X)$ на подпространство $G_{n-1}(Y)$ $(m, n \geq 3)$.* Сформулированное утверждение позволяет свести вопрос о гомеоморфности пространств $F_m(X)$ и $G_n(Y)$ $(m \geq n \geq 3)$ к вопросу о гомеоморфности $F_{m-n+2}(X)$ и $G_2(Y)$, который в большинстве конкретных случаев решается отрицательно. Таким образом, мы получаем обобщения известных результатов для функторов exp, λ, P и др. Доказано, например, что пространства $P_n(X)$ и $P_m(X)$ $(X, Y \in HC)$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда $m = n$ и X гомеоморфно Y (следствие 1). Получены также аналогичные утверждения для функторов λ, exp и функтора полных k-сцепленных систем N^k [6].

В работе существенно используется техника исследования функторов, развитая в [4, 7, 8]. Напомним некоторые определения.

Функтор F называется *мономорфным*, если для любого вложения $i : Y \to X$ отображение $F(i) : F(Y) \to F(X)$ также является вложением. Для мономорфного функтора F и замкнутого подмножества $Y \subset X$ пространство $F(Y)$ естественно отождествляется с подпространством $F(i)\ (F(Y))$ пространства $F(X)$.

Функтор F *сохраняет пересечения*, если для любых бикомпакта X и системы $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств X имеет место равенство

$$F(\cap\{Y_\alpha : \alpha \in A\}) = \cap\{F(Y_\alpha) : \alpha \in A\}.$$

Если F — мономорфный функтор, то для любой точки $a \in F(x)$ определен *носитель* $\operatorname{supp}(a)$ следующим образом:

$$\operatorname{supp}(a) = \cap\{Y \subset X : a \in F(Y)\}.$$

Для любого натурального n положим

$$F_n(X) = \{a \in F(X) : |\operatorname{supp}(a)| \leq n\}.$$

Если F — мономорфный сохраняющий пересечения функтор, то подпространство $F_n(X)$ замкнуто в $F(X)$ для любых X и n. Более того, соответствие $X \to F_n(X)$ однозначно определяет подфунктор F_n функтора F (см. [7, предложение 1.5]).

Функтор F называется *непрерывным*, если он перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра. Непрерывный мономорфный сохраняющий пересечения функтор называется *полунормальным*, если он сохраняет точку и пустое множество [4]. Если F — полунормальный функтор, то для любого натурального n функтор F_n также является полунормальным.

Следующая ниже конструкция отображения π_n предложена в [8]. В последующих формулах через n обозначается не только натуральное число, но и дискретное пространство, состоящее из n точек: $n = \{0, \ldots, n-1\}$ (натуральные числа отождествляются с соответствующими ординалами). Отображение

$$\pi_n = \pi_{FX^n} : X^n \times F(n) \to F(X)$$

определяется равенством $\pi_n(\xi, a) = F(\xi)(a)$, в котором каждая точка $\xi \in X^n$ отождествляется с отображением $\xi : n \to X$. Для любого непрерывного функтора F и любого бикомпакта X отображение π_n непрерывно [8]. Очевидно, что $\operatorname{Im}\pi_n \subset F_n(X)$. Как показано в [7], для полунормального функтора F $\operatorname{Im}\pi_n = F_n(X)$.

Следуя [7], для каждого $n \geq 2$ введем обозначения:

$$F_{nn}(X) = F_n(X) \setminus F_{n-1}(X), \quad \Pi_n(X) = \pi_n^{-1}(F_{nn}(X)),$$

$$\pi_{nn} = \pi_n|_{\Pi_n(X)} : \Pi_n(X) \to F_{nn}(X).$$

Если F — полунормальный функтор, то отображение π_{nn} всегда открыто [7, предложение 1.4].

Говорят, что функтор F *сохраняет вес*, если $w(X) = w(F(X))$ для любого бесконечного X. Если F — полунормальный функтор, то любой бикомпакт X естественно вкладывается в $F(X)$ (см. [4]), и мы можем считать в этом случае, что $X = F_1(X) \subset F(X)$.

Пусть n, m — натуральные числа, $n > m \geq 2$. Определим отображение $\varphi_{nm} : n \to m$ следующим образом: $\varphi_{nm}(i) = i$ при $i < m$, $\varphi_{nm}(i) = m - 1$ при

$i \geq m$. Пусть F — ковариантный функтор. Будем говорить, что F *строго эпиморфен*, если для любых n, m таких, что $n > m \geq 2$ и $F_{nn}(n) \neq \varnothing$, выполняется включение

$$F(\varphi_{nm})(F_{nn}(n)) \supset F_{mm}(m). \tag{1}$$

Ниже покажем, что условию строгой эпиморфности удовлетворяют функторы: экспоненты exp, суперрасширения λ, вероятностных мер P и полных k-сцепленных систем N^k ($k \geq 2$). Определения первых трех функторов общеизвестны (см., например, [4]); все они полунормальны и сохраняют вес.

Напомним определение и свойства N^k (см. [6]). Пусть k — натуральное число, $k \geq 2$. Система ξ замкнутых подмножеств X называется *k-сцепленной*, если любые k элементов ξ имеют непустое пересечение; 2-сцепленные системы называются *сцепленными*. Система ξ называется *полной*, если для любого замкнутого подмножества $A \subset X$ выполнение условия:

$$\text{любая окрестность } A \text{ содержит некоторый элемент } \xi \tag{$*$}$$

влечет $A \in \xi$.

Для любой системы $\xi \subset \exp X$ определено ее пополнение ξ_f, которое получается путем присоединения к ξ всех замкнутых подмножеств $A \subset X$, удовлетворяющих условию ($*$). Пополнение ξ_f — наименьшая полная система, содержащая ξ. Пополнение k-сцепленной системы является k-сцепленной системой.

Множество $N^k X$ всех полных k-сцепленных систем бикомпакта X наделяется топологией, открытую базу которой образуют множества вида $O(U_1, \ldots, U_n)(V_1, \ldots, V_m) = \{\xi \in N^k X\colon$ для любого $i = 1, \ldots, n$ существует $A_i \in \xi$ такое, что $A_i \subset U_i$ и для любого $j = 1, \ldots, m$ множество V_j пересекает все элементы $\xi\}$. Пространство N^k является бикомпактом для любого бикомпакта X. Для всякого непрерывного отображения $g : X \to Y$ определено отображение $N^k g : N^k X \to N^k Y$ по формуле $N^k g(\xi) = \{g(A) : A \in \xi\}_f$. Все функторы N^k, $k \geq 2$, полунормальны и сохраняют вес.

Суперрасширение λX вкладывается в $N^2 X$ (всякая максимальная сцепленная система полна), и λ является подфунктором N^2. Кроме того, $N^k X \subset N^l X$ при $k > l$, так что N^k — подфунктор N^l ($k > l$).

Заметим, что пространство $\lambda^k X$ максимальных k-сцепленных систем, как правило, не замкнуто в $N^k X$ (более того, для любого X без изолированных точек $\lambda^k X$ всюду плотно в $N^k X$ [9]). Так что ввести функторы λ^k по аналогии с суперрасширением λ нельзя.

Для всякого X определено вложение $i_X : \exp X \to N^k X$, задаваемое формулой $i_X(A) = \{A\}_f$. Если $g : X \to Y$ — непрерывное отображение, то $i_Y \circ \exp g = N^k \circ i_X$. Следовательно, функтор exp можно считать подфунктором N^k для любого $k \geq 2$.

Пусть X — бикомпакт и $\xi \in N^k X$. Легко проверить, что носитель $\operatorname{supp}(\xi)$ равен замыканию объединения минимальных по включению элементов ξ. Если $|\operatorname{supp}(\xi)| \leq 2$, то, как легко видеть, ξ имеет наименьший элемент, равный $\operatorname{supp}(\xi)$. Следовательно, для любого $\xi \in N^k_2(X)$ будет $\xi = \{\operatorname{supp}(\xi)\}_f$ и, значит, $N^k_2(X) = \exp_2 X$.

Предложение 1. *Функторы λ, exp, P и N^k ($k \geq 2$) строго эпиморфны.*

Доказательство. Пусть m, n таковы, что $n > m \geq 2$ и φ_{nm} — отображение, фигурирующее в определении строгой эпиморфности.

exp. Поскольку $\exp_{mm}(m) = m$ для любого $m \geq 2$ и $\exp \varphi_{mn}(n) = m$, включение (1) для exp выполнено.

P. Пусть $\mu \in P_{mm}(m)$. Тогда $\mu = k_0\delta_0 + \dots + k_{m-1}\delta_{m-1}$, где δ_i — мера Дирака, сосредоточенная в точке i, $k_0 + \dots + k_{m-1} = 1$ и $k_i \geq 0$. Пусть $\nu = l_0\delta_0 + \dots + l_{n-1}\delta_{n-1}$, где $l_i = k_i$ при $i < m-1$ и $l_i = k_{m-1}/(n-k)$ при $i \geq m-1$. Очевидно, что $\nu \in P_{nn}(n)$ и $P(\varphi_{nm})(\nu) = \mu$.

λ. Пусть ξ — максимальная сцепленная система на m с носителем из m точек. В ξ имеется минимальный элемент A_1, содержащий точку $(m-1) \in m$. Рассмотрим в n следующую сцепленную систему:

$$\eta_0 = \{\varphi_{nm}^{-1}A : A \in \xi,\ A \neq A_1\} \cup \{\varphi_{nm}^{-1}(A_1 \setminus \{(m-1)\}) \cup \{l\} : m-1 \leq l < n\}.$$

Дополним η_0 до максимальной сцепленной системы η в n. Очевидно, что $\mathrm{supp}(\eta) = n$ и $\lambda(\varphi_{nm})(\eta) = \xi$.

N^k. Пусть $\xi \in N^k_{mm}(m)$. Положим $\eta = \{\varphi_{nm}^{-1}(A) : A \in \xi\}_f$. Тогда $\mathrm{supp}(\eta) = n$ и $N^k(\varphi_{nm})(\eta) = \xi$. $\square$

Замечание 1. Примером функтора, не удовлетворяющего условию строгой эпиморфности, может служить функтор возведения пространства в n-ю степень при $n > 2$.

Будем говорить, что отображение $f : X \to Y$ *бесконечнократно*, если $|f^{-1}y| \geq \omega_0$ для любого $y \in Y$. Отображение $g : X \to Y$ будем называть *открытым в точке* $y \in g(X) \subset Y$, если для любого $x \in g^{-1}y$ и для любой окрестности Ox точки x множество $g(Ox)$ содержит некоторую окрестность точки y. Очевидно, что отображение $g : X \to Y$ открыто тогда и только тогда, когда g открыто во всех точках множества $g(X)$.

Предложение 2. *Пусть F — полунормальный строго эпиморфный функтор, и пусть $F_{nn}(n) \neq \varnothing$. Тогда для любого открытого бесконечнократного отображения $f : X \to Y$ бикомпакта X на бикомпакт Y без изолированных точек отображение*

$$F_n(f) : F_n(X) \to F_n(Y)$$

открыто в любой точке $a \in F_{nn}(Y)$ и не является открытым в каждой точке $a \in F_{n-1}(Y) \setminus Y$.

Доказательство. Пусть $a \in F_{nn}(Y)$ и $\mathrm{supp}(a) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Возьмем в X точки $x_1, \dots, x_n$ так, что $f(x_i) = y_i$, и рассмотрим вложение $h : \mathrm{supp}(a) \to X$, определяемое формулой $h(y_i) = x_i$, $i = 1, \dots, n$. Положим $F_n(h)(a) = b$. Легко видеть, что $F_n(f)(b) = a$ и $\mathrm{supp}(b) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X^n \times F(n) & \xrightarrow{\pi_n^X} & F_n(X) \\ {\scriptstyle f^n\times \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_n(f)} \\ Y^n \times F(n) & \xrightarrow{\pi_n^Y} & F_n(Y). \end{array}$$

Она коммутативна, так как для любой точки $(\xi, t) \in X^n \times F(n)$

$$F_n(f)\big(\pi_n^X(\xi, t)\big) = F_n(f)F(\xi)(t) = F(f \circ \xi)(t)$$

и

$$\pi_n^Y((f^n \times \mathrm{id})(\xi, t)) = \pi_n^Y(f \circ \xi)(t) = F(f \circ \xi)(t).$$

Пусть Ob — произвольная окрестность точки b в $F_n(X)$. Тогда

$$F_n(f)(Ob) = \pi_n^Y(f^n \times \mathrm{id})\big(\pi_n^X\big)^{-1}Ob.$$

Множество $(f^n \times \mathrm{id})\big(\pi_n^X\big)^{-1}Ob$ открыто в $Y^n \times F(n)$ в силу непрерывности π_n^X и открытости $f^n \times \mathrm{id}$. Поскольку отображение $\pi_{nn}^Y : \Pi_n(Y) \to F_{nn}(Y)$ открыто, π_n^Y открыто в точке a. Следовательно, $a \in \mathrm{Int}(F_n(f)(Ob))$ — открытость отображения $F_n(f)$ в точке a доказана.

Пусть теперь $a \in F_{n-1}(Y) \setminus Y$, и пусть носитель a состоит из k различных точек $y_1, \dots, y_k$, $1 < k < n$. Согласно нашей договоренности точку $\xi = (y_1, \dots, y_k) \in Y^k$ можно отождествить с отображением $\xi : k \to Y$. Возьмем набор различных точек $x_1, \dots, x_n \in X$ так, чтобы $f(x_i) = y_i$ при $i \le k$ и $f(x_i) = y_k$ при $i > k$. Пусть $\eta = (x_1, \dots, x_n) : n \to X$. Тогда $f \circ \eta = \xi \circ \varphi_{nk}$, где φ_{nk} — отображение, фигурирующее в определении строгой эпиморфности. Поскольку отображение ξ — гомеоморфизм k и $\mathrm{supp}(a)$, отображение $F(\xi)$ является гомеоморфизмом между $F(k)$ и $F(\mathrm{supp}(a))$. Следовательно, существует точка $b \in F(k)$ такая, что $F(\xi)(b) = a$. Очевидно, что $\mathrm{supp}(b) = k$. В силу строгой эпиморфности F существует точка $c \in F_{nn}(n)$ такая, что $F(\varphi_{nk})(c) = b$. Положим $d = F(\eta)(b)$. Построенный элемент d пространства $F(X)$ имеет носитель $\mathrm{supp}(d) = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $F_n(f)(d) = a$.

Пусть $U_1, \dots, U_k$ — дизъюнктные окрестности точек $y_1, \dots, y_k$ и $V_1, \dots, V_n$ такие непересекающиеся окрестности $x_1, \dots, x_n$ соответственно, что $fV_i \subset U_i$ при $i \le k$ и $f(V_i) \subset U_k$ при $i > k$. Положим

$$Od = \pi_n^X(V_1 \times \dots \times V_n \times F_{nn}(n)).$$

Множество $V_1 \times \dots \times V_n \times F_{nn}(n)$ открыто в $X^n \times F(n)$ и лежит в $\Pi_n(X)$. В силу открытости отображения π_{nn}^X множество Od является окрестностью d в $F_n(X)$.

Покажем, что $a \notin \mathrm{Int}(F_n(f)(Od))$. Предположим противное: пусть существует окрестность Oa, лежащая в $F_n(f)(Od)$. Тогда, используя изложенную выше схему построения точки d, построим для a точку $e \in F_{nn}(X)$ с носителем $\mathrm{supp}(e) = \{z_1, \dots, z_n\}$, $|\mathrm{supp}(e)| = n$, такую, что $F_n(f)(e) = a$ и $f(z_i) = y_i$ при $i \le k$, $f(z_i) = y_1$ при $i > k$. Поскольку отображение $F_n(f)$ непрерывно, существует окрестность Oe точки e такая, что $F_n(f)(Oe) \subset Oa$. Пусть t — точка $F_{nn}(n)$ такая, что $\pi_n^X(z_1, \dots, z_n, t) = e$. В силу непрерывности π_n^X найдутся такие окрестности $W_1, \dots, W_n$ точек $z_1, \dots, z_n$ в X, что $\pi_n^X(W_1 \times \dots \times W_n \times \{t\}) \subset Oe$. При этом мы можем потребовать дополнительно, чтобы $fW_i \subset U_i$ при $i \le k$ и $fW_i \subset U_1$ при $i > k$.

Выберем точки $p_i \in W_i$ так, чтобы $f(p_i) \ne f(p_j)$ при $i \ne j$ (это можно сделать, поскольку f открыто и Y не имеет изолированных точек). Положим

$$h = F_n(f)\big(\pi_n^X(p_1, \dots, p_n, t)\big).$$

Тогда $h \in Oa$ и $\mathrm{supp}(h) = \{f(p_1), \dots, f(p_n)\}$. В силу построения окрестности Od для любой точки $x \in Od$ носитель $\mathrm{supp}(x)$ содержит ровно одну точку из каждого множества V_i, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $f(\mathrm{supp}(x)) \not\supset \mathrm{supp}(h)$ для любого $x \in Od$ и, значит, $f(x) \ne h$, т. е. $h \notin F_n(f)(Od)$. Получено противоречие. □

Предложение 3. *Пусть F — полунормальный функтор, и пусть натуральное число $k \ge 2$ таково, что $F_k(k) \setminus k \ne \varnothing$. Тогда для любых бикомпакта X без изолированных точек, точки $x \in X$ и окрестности Ox точки x в $F_k(X)$ пересечение $(F_k(X) \setminus X) \cap Ox$ непусто.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $a \in F_k(k) \setminus k$. Тогда $\pi_k(x, \dots, x, a) = x \in F_k(X)$. Пусть Ox — произвольная окрестность x в $F_k(X)$. В силу непрерывности π_k существует окрестность V точки x в X такая, что $\pi_k(V \times \dots \times V \times \{a\}) \subset Ox$.

Возьмем k различных точек $x_1, \ldots, x_k$ в V и положим $b = \pi_k(x_1, \ldots, x_k, a)$. Тогда $b \in Ox \cap (F_k(X) \setminus X)$. $\square$

Следующие ниже предложения дополняют утверждение предложения 2 в случае конкретных функторов λ и P.

Предложение 4. *Пусть $f : X \to Y$ — открытое бесконечнократное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y без изолированных точек. Тогда отображение $\lambda_3 f : \lambda_3 X \to \lambda_3 Y$ открыто в любой точке $a \in \lambda_3 Y \setminus Y$ и не является открытым в каждой точке $a \in Y$.*

Доказательство. Открытость $\lambda_3 f$ в точке $a \in \lambda_3 \setminus Y = \lambda_{33} Y$ ($\lambda_2 X = X$ для любого X) следует из предложения 2. Покажем, что $\lambda_3 f$ не является открытым в точке $a \in Y$. При вложении $Y \subset \lambda_3 Y$ каждая точка $a \in Y$ отождествляется с максимальной сцепленной системой замкнутых подмножеств Y, содержащих a. Возьмем в X три различные точки b_1, b_2, b_3 так, чтобы $f(b_1) = f(b_2) = a$ и $f(b_3) \neq a$, и выберем непересекающиеся окрестности U_1, U_2, U_3 этих точек такие, что множество

$$W = Y \setminus \bigcup_{i=1}^{3} [f(U_i)]$$

непусто. Пусть ξ — максимальная сцепленная система замкнутых подмножеств X, содержащая систему $\{\{b_1, b_2\}, \{b_2, b_3\}, \{b_1, b_3\}\}$ (ξ — единственная точка $\lambda_3 X$ с носителем $\{b_1, b_2, b_3\}$). Ясно, что $\lambda_3 f(\xi) = a$. Положим $W_1 = U_1 \cup U_2$, $W_2 = U_2 \cup U_3$, $W_3 = U_1 \cup U_3$ и рассмотрим следующую окрестность ξ в $\lambda_3 X$:

$$O\xi = O(W_1, W_2, W_3) \cap \lambda_3 X = \{\eta \in \lambda_3 X : \text{ для любого } i = 1, 2, 3 \\ \text{существует } A_i \in \eta \text{ такое, что } A_i \subset W_i\}.$$

Здесь $O(V_1, \ldots, V_k) = \{\eta \in \lambda X :$ для любого i существует $A_i \in \eta$ такое, что $A_i \subset U_i\}$ — базисное открытое множество λX ($V_1, \ldots, V_k$ открыты в X). Покажем, что $a \notin \mathrm{Int}(\lambda_3(f)(O\xi))$. Пусть $Oa = O(V_1, \ldots, V_k) \cap \lambda_3 Y$ — произвольная базисная окрестность точки a в $\lambda_3 Y$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{k} V_i = V \ni a$$

и, следовательно, окрестность $O'a = O(V) \cap \lambda_3 Y$ содержится в Oa. Возьмем две различные точки $x_1, x_2 \in V$ и отличную от них точку $x_3 \in W$. Пусть η — максимальная сцепленная система в Y с носителем $\{x_1, x_2, x_3\}$. Тогда $\eta \in O'a$ и $\eta \notin \lambda_3(f)(O\xi)$. $\square$

Предложение 5. *Пусть $f : X \to Y$ — открытое бесконечнократное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y без изолированных точек. Тогда отображение $P_2(f) : P_2(X) \to P_2(Y)$ открыто в любой точке $a \in P_2(Y) \setminus Y$ и не является открытым в каждой точке $a \in Y$.*

Доказательство. Первая часть утверждения следует из предложения 2. Проверим отсутствие открытости $P_2(f)$ в точках $a \in Y$. Пусть $a = \delta_a \in Y \subset P_2(Y)$. Возьмем такие точки $b_1, b_2 \in X$, что $b_1 \neq b_2$, $f(b_1) = f(b_2) = a$, и выберем непересекающиеся окрестности U_1, U_2 этих точек в X так, что $W = Y \setminus [f(U_1) \cup f(U_2)] \neq \varnothing$. Положим $\mu = 1/2\delta_{b_1} + 1/2\delta_{b_2}$, и пусть

$$O\mu = O(\mu, U_1, U_2, 1/4) \cap P_2(X) \\ = \{m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} : x_i \in U_i,\ |m_i - 1/2| < 1/4,\ m_1 + m_2 = 1\}$$

— базисная окрестность μ в $P_2(X)$. Очевидно, что $P_2(f)(\mu)=a$. В то же время $a\notin \operatorname{Int}(P_2(f)(O\mu))$, поскольку любая окрестность точки a в $P_2(Y)$ содержит все меры вида $\nu_y=(1-\varepsilon)\delta_a+\varepsilon\delta_y$ при достаточно малом ε и любой точке $y\in Y$. Если взять $y\in W$, то $\nu_y\notin P_2(f)(O\mu)$. $\square$

Напомним, что через HC мы обозначаем класс однородных по характеру κ-метризуемых бикомпактов несчетного веса.

Теорема 1. *Пусть F и G — полунормальные строго эпиморфные сохраняющие вес функторы; пусть натуральные числа $n,m\geq 3$ таковы, что*

$$F_{nn}(n)\neq\varnothing,\ G_{mm}(m)\neq\varnothing,\ F_{n-1}(n-1)\setminus(n-1)\neq\varnothing,\ G_{m-1}(m-1)\setminus(m-1)\neq\varnothing,$$

и пусть $X,Y\in HC$. Тогда если пространства $F_n(X)$ и $G_m(Y)$ гомеоморфны и $g:F_n(X)\to G_m(Y)$ — гомеоморфизм, то $g(F_{n-1}(X))=G_{m-1}(Y)$.

Доказательство. Пусть $g:F_n(X)\to G_m(Y)$ — гомеоморфизм. Тогда $w(X)=w(Y)$ и, следовательно, существуют спектральные разложения

$$S=\bigl\{X_\alpha,p^\alpha_\beta:\alpha,\beta\in A\bigr\},\quad T=\bigl\{Y_\alpha,q^\alpha_\beta:\alpha,\beta\in A\bigr\}$$

пространств X, Y в σ-спектры из компактов без изолированных точек с открытыми проекциями «на» над одинаковым множеством индексов A (см. [1]). Заметим, что предельные проекции спектров S и T открыты и бесконечнократны (если $\bigl|p_\alpha^{-1}(x_\alpha)\bigr|<\omega_0$ для некоторой точки $x_\alpha\in X_\alpha$, то все точки $p_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ имеют счетный характер в X и тогда X метризуем как κ-метризуемый бикомпакт с первой аксиомой счетности).

Рассмотрим σ-спектры из компактов

$$F_n(S)=\bigl\{F_n(X_\alpha),F_n\bigl(p^\alpha_\beta\bigr):\alpha,\beta\in A\bigr\},\quad G_m(T)=\bigl\{G_m(Y_\alpha),G_m\bigl(q^\alpha_\beta\bigr):\alpha,\beta\in A\bigr\}.$$

Пределы этих спектров соответственно гомеоморфны $F_n(X)$ и $G_m(Y)$. В силу спектральной теоремы о гомеоморфизме (см. [2, 8]) для гомеоморфизма $g:F_n(X)\to G_m(Y)$ найдутся замкнутые конфинальные подспектры

$$\bigl\{F_n(X_\alpha),F_n(p^\alpha_\beta):\alpha,\beta\in B\bigr\},\quad \bigl\{G_m(Y_\alpha),G_m(q^\alpha_\beta):\alpha,\beta\in B\bigr\},$$

где $B\subset A$, и семейство гомеоморфизмов

$$g_\alpha:F_n(X_\alpha)\to G_m(Y_\alpha),\quad \alpha\in B,$$

задающее изоморфизм этих подспектров, такие, что $\lim g_\alpha=g$.

Пусть $a\in F_{nn}(X)$. Покажем, что $g(a)\in G_{mm}(Y)$. Возьмем $\alpha\in B$ так, чтобы предельная проекция $p_\alpha:X\to X_\alpha$ была взаимно однозначна на $\operatorname{supp}(a)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
F_n(X) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F_n(p_\alpha)"] & G_m(Y) \arrow[d, "G_m(q_\alpha)"] \\
F_n(X_\alpha) \arrow[r, "g_\alpha"] & G_m(Y_\alpha),
\end{tikzcd}$$

в которой g и g_α — гомеоморфизмы. Тогда $a_\alpha=F_n(p_\alpha)(a)$ лежит в $F_{nn}(X_\alpha)$, поэтому в силу предложения 2 отображение $F_n(p_\alpha)$ открыто в a_α. Более того, у точки a_α существует окрестность (например, $F_{nn}(X_\alpha)$), во всех точках которой $F_n(p_\alpha)$ открыто. Следовательно, у точки $b_\alpha=g_\alpha(a_\alpha)$ также должна быть окрестность, во всех точках которой открыто отображение $G_m(q_\alpha)$. Но это условие выполняется лишь тогда, когда $b_\alpha \in G_{mm}(Y_\alpha)$. В самом деле, если $b_\alpha \in G_{m-1}(Y_\alpha) \backslash Y_\alpha$, то отображение $G_m(q_\alpha)$ не является открытым в точке b_α по предложению 2. Если же $b_\alpha \in Y_\alpha$, то в силу предложения 3 любая окрестность b_α в $G_{m-1}(Y_\alpha)$ пересекает $G_{m-1}(Y_\alpha) \setminus Y_\alpha$.

Итак, $g_\alpha(a_\alpha) \in G_{mm}(Y_\alpha)$. Значит, $g(a) \in G_{mm}(Y)$, поскольку $\mathrm{supp}(g_\alpha(a_\alpha)) \subset \mathrm{supp}(G_m(q_\alpha)(g(a)))$. Таким образом, мы доказали, что $g(F_{nn}(X)) \subset G_{mm}(Y)$. Совершенно аналогично, используя обратный гомеоморфизм g^{-1}, можно доказать, что $g^{-1}(G_{mm}(Y)) \subset F_{nn}(X)$. Следовательно, $g(F_{nn}(X)) = G_{mm}(Y)$ и, значит, $g(F_{n-1}(X)) = G_{m-1}(Y)$. $\square$

Отметим, что функторы N^k, $k \geq 2$, $\exp$ и P удовлетворяют условиям теоремы 1 для всех $m, n \geq 3$, функтор λ — для $n \geq 4$, поскольку $\lambda_2(X) = X$.

Имеет место следующее усиление теоремы 1 для функторов λ и P.

Теорема 2. *Если в формулировке теоремы* 1 $F = P$ $(F = \lambda)$, *то утверждение теоремы справедливо для всех* $n \geq 2$ $(n \geq 3)$.

Оба случая $F = P$, $n = 2$ и $F = \lambda$, $n = 3$ доказываются по схеме, повторяющей доказательство теоремы 1. Разница состоит лишь в том, что вместо предложения 2 для функторов F и G в общем случае используется предложение 5 в случае P_2 и предложение 4 для λ_3.

Следствие 1. *Пусть m, n — натуральные числа и $X, Y \in HC$. Пространства $P_m(X)$ и $P_n(Y)$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда $m = n$ и X гомеоморфно Y.*

Доказательство. Допустим, что $P_m(X)$ гомеоморфно $P_n(Y)$ и $m > n$.

Если $n = 1$, то $P_1(Y) = Y$ и пространства $P_m(X)$, Y не могут быть гомеоморфны согласно спектральной теореме Е. В. Щепина: Y обладает разложением в σ-спектр с открытыми проекциями, а у пространства $P_m(X)$ имеется разложение в σ-спектр, все проекции которого имеют вид $P_m(p^\alpha_\beta)$ (см. доказательство теоремы 1) и не являются открытыми в силу предложений 2 и 5.

Если $n \geq 2$, то применим $n-1$ раз теорему 2 к паре $P_m(X)$ и $P_n(Y)$ и получим, что $P_{m-n+1}(X)$ гомеоморфно $P_1(Y)$. Но это, как мы только что показали, невозможно.

Итак, если $P_m(X)$ гомеоморфно $P_n(Y)$, то $m = n$. Снова применяем $n-1$ раз к паре $P_n(X)$ и $P_n(Y)$ теорему 2 и получаем, что X гомеоморфно Y. $\square$

Следствие 2. *Пусть $X, Y \in HC$ и m, n — натуральные числа, не равные* 2. *Пространства $\lambda_m(X)$ и $\lambda_n(Y)$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда $m = n$ и X гомеоморфно Y.*

Доказательство следствия 2 аналогично доказательству следствия 1.

Следствие 3. *Пусть F — один из функторов:* $\exp$ *или* N^k, $k \geq 2$. *Пусть $X, Y \in HC$ и $m, n \geq 2$ — натуральные числа. Если $F_m(X)$ гомеоморфно $F_n(Y)$, то $n = m$ и* $\exp_2 X$ *гомеоморфно* $\exp_2 Y$.

Доказательство. Предположим, что $F_m(X)$ гомеоморфно $F_n(Y)$. Пусть $m > n \geq 2$. Применим $n-2$ раз теорему 1 к паре $F_m(X)$, $F_n(Y)$ и получим, что $F_{m-n+2}(X)$ гомеоморфно $F_2(Y) = \exp_2 Y$ ($N^k_2 Y = \exp_2 Y$ для любого k). Но последнее противоречит спектральной теореме о гомеоморфизме: функтор $\exp_2$ сохраняет свойство открытости отображений, следовательно, $\exp_2 Y$ разлагается в σ-спектр с открытыми проекциями; в то же время пространство $F_{m-n+2}(X)$ обладает разложением, в котором все проекции не открыты в силу предложений 1 и 2.

Итак, если $F_m(X)$ гомеоморфно $F_n(Y)$, то $m = n$. Применив $n-2$ раз теорему 1 к паре $F_m(X)$, $F_n(Y)$, получим, что $\exp_2 X$ гомеоморфно $\exp_2 Y$. $\square$

Замечание 2. Ограничение $m, n \geq 2$ в следствии 3 существенно, поскольку $\exp_2 D^{\omega_1}$ гомеоморфно $D^{\omega_1} = \exp_1 D^{\omega_1}$ (см. [4]) и $D^{\omega_1} \in HC$.

Замечание 3. С помощью теорем 1 и 2 и теории характеров отображений Е. В. Щепина [2] можно показать также, что пространства вида $F_m(X)$ и $G_n(Y)$ $(X, Y \in HC)$ практически всегда не гомеоморфны, если F и G — различные функторы из числа рассмотренных в формулировках следствий 1–3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щепин Е. В.* О κ-метризуемых пространствах // Изв. АН СССР. 1979. Т. 43, № 2. С. 442–478.
2. *Щепин Е. В.* Топология предельных пространств несчетных обратных спектров // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31, № 5. С. 191–226.
3. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 3. С. 3–62.
4. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
5. *Иванов А. В.* О суперрасширениях λ_n // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 3. С. 213–214.
6. *Иванов А. В.* О пространстве полных сцепленных систем // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 6. С. 95–110.
7. *Fedorchuc V., Todorčević S.* Cellularity of covariant functors // Topology Appl. 1997. V. 76. P. 125–150.
8. *Басманов В. Н.* Ковариантные функторы, ретракты и размерность // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271, № 5. С. 1033–1036.
9. *Иванов А. В.* Теорема о почти неподвижной точке для пространства максимальных k-сцепленных систем // Вопросы геометрии и топологии. Петрозаводск: Изд-во ПГУ, 1986. С. 31–40.

Статья поступила 1 марта 2000 г.

г. Петрозаводск
Петрозаводский гос. университет, кафедра математического анализа
ivanov@mainpgu.karelia.ru