Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 517.95

РЕШЕНИЕ ПОЧТИ ВСЮДУ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

С. П. Лавренюк

Аннотация: Рассмотрена смешанная задача с однородными краевыми условиями Дирихле и нулевыми начальными условиями для одной линейной эволюционной системы со второй производной по времени, часть уравнений которой вырождается на множестве задания начальных данных. Система, в частности, содержит гиперболические уравнения второго порядка. Получены некоторые достаточные условия существования решения почти всюду указанной задачи. Библиогр. 24.

Систематическое изучение задач для линейных гиперболических уравнений, вырождающихся на характеристической гиперплоскости, было начато во второй половине нашего столетия. В ряде работ установлена зависимость поведения решения в окрестности вырождения от младших членов уравнения, а вместе с тем и вид начальных условий. Так, в работах [1, 2] доказана корректность задач с видоизмененными начальными данными для гиперболических уравнений и систем с двумя независимыми переменными. Позже эти результаты были обобщены в [3–5] на общие гиперболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными. Ряд результатов для вырождающихся гиперболических уравнений получен в [6–15].

В работах [16–20] изучались задачи для вырождающихся эволюционных уравнений и систем высокого порядка со второй производной по времени.

В предлагаемой статье получены условия существования решения почти всюду смешанной задачи для одной эволюционной системы высокого порядка со второй производной по времени, часть уравнений которой сильно вырождается на множестве задания начальных условий. Условия единственности решения этой задачи получены в [20]. Заметим, что, пользуясь методом работы [21], далее легко можно установить дифференциальные свойства решений этой задачи внутри области.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega \subset C^{m,1}$ [22], $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$. Рассмотрим в области Q_T систему уравнений

$$\Phi(x,t)w_{tt} + C(x,t)w_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta w) + \sum_{|\alpha|\le m} B_\alpha(x,t)D^\alpha w = F(x,t) \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\left.\frac{\partial^i w}{\partial \nu^i}\right|_{S_T} = 0, \quad i = 0,\dots,m-1. \quad (2)$$

Здесь $w=(u,v)=(u_1,\dots,u_l,v_{l+1},\dots,v_N)$, $F=(F_1,F_2)=(f_1,\dots,f_l,f_{l+1},\dots,f_N)$; Φ, C, $A_{\alpha\beta}(|\alpha|=|\beta|\le m)$, $B_{\varkappa}(|\varkappa|\le m)$ — квадратные матрицы порядка N, причем

$$\Phi(x,t)=\begin{pmatrix}\Phi_1(x,t) & 0\\ 0 & E\end{pmatrix},$$

где Φ_1 — матрица порядка l, а E — единичная матрица порядка $N-l$;

$$C(x,t)=\begin{pmatrix}C^1(x,t) & C^2(x,t)\\ C^3(x,t) & C^4(x,t)\end{pmatrix},\quad B_\alpha(x,t)=\begin{pmatrix}B^1_\alpha(x,t) & B^2_\alpha(x,t)\\ B^3_\alpha(x,t) & B^4_\alpha(x,t)\end{pmatrix},$$

где C^1,B^1_α — квадратные матрицы порядка l; C^4, B^4_α — квадратные матрицы порядка $N-l$; C^2, B^2_α — матрицы, содержащие $N-l$ столбцов и l строк; C^3, B^3_α — матрицы, содержащие l столбцов и $N-l$ строк;

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad |\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n;$$

ν — внешняя нормаль к S_T.

Будем предполагать, что для коэффициентов системы (1) выполняются следующие условия.

Условие (Φ_0). *Справедливы соотношения*

$$\Phi_1(x,t)=\Phi_1^*(x,t);\quad \varphi(t)|\xi|^2\le(\Phi_1(x,t)\xi,\xi)\le\varphi^0\varphi(t)|\xi|^2,$$
$$\varphi^0>0,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^l,\ (x,t)\in\overline{Q}_T,$$

причем $\varphi(t)\in C[0,T]\cap C^1(0,T]$; $\varphi(0)=0$; $\varphi'(t)>0$, $t\in(0,T]$; $\varphi'(t)$ — *монотонно возрастающая функция на* $(0,T]$.

Условие (Φ_1). *Выполнены неравенства*

$$\varphi_2(t)\varphi'(t)|\xi|^2\le(\Phi_{1t}\xi,\xi)\le\varphi_1(t)\varphi'(t)|\xi|^2$$
$$\forall\xi\in\mathbb{R}^l,(x,t)\in\overline{Q}_T;\varphi_1,\quad \varphi_2\in L^\infty(0,T);\quad \varphi_1(t)\ge0,\ t\in[0,T].$$

Условие (A_0). *Имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta w,D^\alpha w)\,dx\ge a_m\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w|^2\,dx,$$
$$a_m>0,\ t\in[0,T]\ \forall w\in(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N,\quad \Omega_t=Q_T\cap\{\tau=t\};$$
$$A_{\alpha\beta}(x,t)=A_{\beta\alpha}(x,t),\quad A_{\alpha\beta}(x,t)=A^*_{\alpha\beta}(x,t),\quad (x,t)\in Q_T,\ |\alpha|=|\beta|\le m.$$

Условие (C_0). *Справедливо неравенство*

$$(C^1(x,t)\xi,\xi)\ge c_1(t)|\xi|^2\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^l,\ (x,t)\in\overline{Q}_T.$$

Начальные условия для системы (1) зададим следующим образом:

$$w(x,0)=0,\quad \lim_{t\to0}\sqrt{\varphi(t)}u_t(x,t)=0,\quad v_t(x,0)=0. \tag{3}$$

В дальнейшем часто будет использоваться известное неравенство Фридрихса [22, с. 44]

$$\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|\le m}(D^\alpha v)^2\,dx\le\gamma_m\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=m}(D^\alpha v)^2\,dx,$$

справедливое для всех функций $v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$, где постоянная γ_m зависит от Ω, m, n.

Введем функции:

$$b_1(t) = \max\Big\{\sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{\big\|B^1_\alpha(x,\tau)\big\|^2}{\varphi'(\tau)}; \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{\big\|B^2_\alpha(x,\tau)\big\|^2}{\varphi'(\tau)};$$
$$\sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|\le m} \big\|B^3_\alpha(x,\tau)\big\|^2; \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|\le m} \big\|B^4_\alpha(x,\tau)\big\|^2\Big\}, t \in [0,T];$$

$$b_2(t) = \max\Big\{\sup_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{\big\|B^1_{\alpha t}(x,t)\big\|^2 t^\rho}{\varphi'(t)}; \sup_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{\big\|B^2_{\alpha t}(x,t)\big\|^2 t^\rho}{\varphi'(t)};$$
$$\sup_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|\le m} \big\|B^3_{\alpha t}(x,t)\big\|^2 t^\rho; \sup_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|\le m} \big\|B^4_{\alpha t}(x,t)\big\|^2 t^\rho\Big\}, \quad t \in (0,T];$$

$$c_2(t) = \max\Big\{\sup_{\Omega_t} \frac{t^\rho\big\|C^1_t(x,t)\big\|^2}{\varphi'(t)\varphi(t)}; \sup_{\Omega_t} \frac{t^\rho\big\|C^3_t(x,t)\big\|^2}{\varphi(t)}\Big\},$$
$$c_3(t) = \max\Big\{\sup_{\Omega_t} \frac{t^\rho\big\|C^2_t(x,t)\big\|^2}{\varphi'(t)}; \sup_{\Omega_t} t^\rho\big\|C^4_t(x,t)\big\|^2\Big\}, \quad t \in (0,T];$$
$$c_4(t) = \max\Big\{\sup_{Q_t} \frac{\|C^2(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)}; \sup_{Q_t} \frac{\|C^3(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)}; \sup_{Q_t} \|C^4(x,\tau)\|^2\Big\}, \quad t \in [0,T].$$

Пусть

$$\nu_1 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,t]} \Big[\varphi_1(\tau) - \frac{2c_1(\tau)}{\varphi'(\tau)}\Big]; \quad \nu_2 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,t]} \Big[-\varphi_2(\tau) - \frac{2c_1(\tau)}{\varphi'(\tau)}\Big].$$

Теорема. *Пусть для коэффициентов системы* (1) *выполняются условия* (Φ_0), (Φ_1), (A_0), (C_0) *и, кроме того,* Φ, $D^\alpha A_{\alpha\beta} \in C(\overline{Q}_T)$, $|\alpha| = |\beta| \le m$; C, Φ_t, $C_t \in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$ $\forall\varepsilon > 0$; b_1, $c_4 \in L^\infty(0,T)$; $\partial\Omega \in C^{2m}$;

$$\max\{c_2(t); c_3(t); b_2(t)\} \le b_3(t), t \in (0,T],$$

где $b_3 \in L^\infty(\varepsilon,T)$ $\forall\varepsilon > 0$ *монотонно убывает на* $(0,T]$, *а* $\rho \in [0,1)$; $|\nu_1|$, $|\nu_2| < \infty$;

$$\int_{Q_T} \frac{b_3(t)}{(\varphi(t))^{\sigma_0}} \Big[\frac{|F_1(x,t)|^2}{\varphi'(t)} + |F_2(x,t)|^2\Big]\,dxdt + \sigma_2 \int_{\Omega_0} |F_2(x,0)|^2\,dx$$
$$+ \int_{Q_T} \frac{1}{(\varphi(t))^{\sigma_1}} \Big[\frac{|F_{1t}(x,t)|^2}{\varphi'(t)} + |F_{2t}(x,t)|^2\Big]\,dxdt < \infty,$$

где

$$\sigma_0 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \nu_1 < 0, \\ \nu_3 + \delta, & \text{если} \quad \nu_1 \ge 0; \end{cases} \qquad \sigma_1 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \nu_2 < 0, \\ \nu_4 + \delta, & \text{если} \quad \nu_2 \ge 0; \end{cases}$$
$$\sigma_2 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \nu_2 \ge 0, \\ 1, & \text{если} \quad \nu_2 < 0; \end{cases}$$

$\delta > 0$ — достаточно малое число. Тогда существует решение почти всюду задачи (1)–(3).

Доказательство. Пусть $\{\varphi^k(x)\}$ — полная система в пространстве $(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega))^N$. Рассмотрим последовательность функций

$$w^{j,\varepsilon}(x,t) = \sum_{k=1}^{j} c_k^{j,\varepsilon}(t)\varphi^k(x), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

где $c_1^{j,\varepsilon}(t), \ldots, c_j^{j,\varepsilon}(t)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\int_{\Omega_t} \Big[\big(\Phi(x,t+\varepsilon)w_{tt}^{j,\varepsilon}, \varphi^k\big) + \big(C(x,t+\varepsilon)w_t^{j,\varepsilon}, \varphi^k\big) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta w^{j,\varepsilon}, D^\alpha \varphi^k) \\ + \sum_{|\alpha|\le m} (B_\alpha(x,t+\varepsilon)D^\alpha w^{j,\varepsilon}, \varphi^k)\Big]\, dx = \int_{\Omega_t} (F(x,t), \varphi^k)\, dx, \quad (4)$$

$$c_k^{j,\varepsilon}(0) = 0, \quad c_{kt}^{j,\varepsilon}(0) = 0, \quad k = 1, \ldots, j,\ 0 < \varepsilon < T. \quad (5)$$

Умножим каждое из равенств системы (4) соответственно на функцию $c_{kt}^{j,\varepsilon}(t)e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$, сложим их и проинтегрируем по промежутку $[0,\tau]$. После выполнения этих операций получим равенство

$$\int_{\Omega_\tau} \Big[(\Phi(x,t+\varepsilon)w_{tt}^{j,\varepsilon}, w_t^{j,\varepsilon}) + (C(x,t+\varepsilon)w_t^{j,\varepsilon}, w_t^{j,\varepsilon}) \\ + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta w^{j,\varepsilon}, D^\alpha w_t^{j,\varepsilon}) \\ + \sum_{|\alpha|\le m} (B_\alpha(x,t+\varepsilon)D^\alpha w^{j,\varepsilon}, w_t^{j,\varepsilon})\Big] e^{-\gamma t}\, dxdt = \int_{Q_\tau} (F(x,t), w_t^{j,\varepsilon})e^{-\gamma t}\, dxdt. \quad (6)$$

Преобразуем и оценим каждый член равенства (6) отдельно. Используя условия теоремы и начальные условия (5), будем иметь оценки

$$\mathfrak{I}_1 = \int_{Q_\tau} (\Phi(x,t+\varepsilon)w_{tt}^{j,\varepsilon}, w_t^{j,\varepsilon})e^{-\gamma t}\, dxdt \ge \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} \big[\varphi(\tau+\varepsilon)\big|u_t^{j,\varepsilon}\big|^2 + \big|v_t^{j,\varepsilon}\big|^2\big] e^{-\gamma\tau}\, dx \\ + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \big[(\gamma\varphi(t+\varepsilon) - \varphi_1(t+\varepsilon)\varphi'(t+\varepsilon))\big|u_t^{j,\varepsilon}\big|^2 + \gamma\big|v_t^{j,\varepsilon}\big|^2\big] e^{-\gamma t}\, dxdt;$$

$$\mathfrak{I}_2 = \int_{Q_\tau} \big(C(x,t+\varepsilon)w_t^{j,\varepsilon}, w_t^{j,\varepsilon}\big)e^{-\gamma t}\, dxdt \ge \int_{Q_\tau} \Big[(c_1(t+\varepsilon) - \delta_1)\varphi'(t+\varepsilon)|u_t^{j,\varepsilon}|^2 \\ - c_4(t+\varepsilon)\Big(1 + \frac{1}{\delta_1}\Big)\big|v_t^{j,\varepsilon}\big|^2\Big] e^{-\gamma t}\, dxdt, \quad \delta_1 > 0;$$

$$\mathfrak{I}_3 = \int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} \big(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta w^{j,\varepsilon}, D^\alpha w_t^{j,\varepsilon}\big)e^{-\gamma t}\, dxdt$$

$$\geq \frac{a_m}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2 e^{-\gamma\tau}\,dx+\frac{1}{2}(\gamma a_m-a_1)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2 e^{-\gamma t}\,dxdt,$$

где постоянная a_1 зависит от $\sup\limits_{Q_T}\|A_{\alpha\beta t}(x,t)\|$ ($|\alpha|=|\beta|\leq m$), чисел m, n, и области Ω;

$$\mathfrak{I}_4=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|\leq m}\big(B_\alpha(x,t+\varepsilon)D^\alpha w^{j,\varepsilon},w_t^{j,\varepsilon}\big)e^{-\gamma t}\,dxdt$$
$$\geq-\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{\gamma_m b_1(t+\varepsilon)}{\delta_1}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2+\delta_1\varphi'(t+\varepsilon)\big|u_t^{j,\varepsilon}\big|^2+\delta_1\big|v_t^{j,\varepsilon}\big|^2\right]e^{-\gamma t}\,dxdt;$$

$$\mathfrak{I}_5=\int\limits_{Q_\tau}(F(x,t),w_t^{j,\varepsilon})e^{-\gamma t}\,dxdt\leq\frac{\delta_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\varphi'(t+\varepsilon)\big|u_t^{j,\varepsilon}\big|^2+\big|v_t^{j,\varepsilon}\big|^2\right]e^{-\gamma t}\,dxdt$$
$$+\frac{1}{2\delta_1}\int\limits_{Q_\tau}\left(\frac{|F_1(x,t)|^2}{\varphi'(t+\varepsilon)}+|F_2(x,t)|^2\right)e^{-\gamma t}\,dxdt.$$

Учитывая полученные оценки интегралов $\mathfrak{I}_1,\dots,\mathfrak{I}_5$, от равенства (6) придем к неравенству

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\varphi(t+\varepsilon)\big|u_t^{j,\varepsilon}\big|^2+\big|v_t^{j,\varepsilon}\big|^2+a_m\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2\right]e^{-\gamma\tau}\,dx$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[\left(\gamma\frac{\varphi(t+\varepsilon)}{\varphi'(t+\varepsilon)}-\varphi_1(t+\varepsilon)+\frac{2c_1(t+\varepsilon)}{\varphi'(t+\varepsilon)}-5\delta_1\right)\big|u_t^{j,\varepsilon}\big|^2\varphi'(t+\varepsilon)\right.$$
$$+\left(\gamma-c_4(t+\varepsilon)\left(1+\frac{1}{\delta_1}\right)-3\delta_1\right)|v_t^{j,\varepsilon}|^2$$
$$\left.+\left(\gamma a_m-a_1-\frac{2b_1(t+\varepsilon)\gamma_m}{\delta_1}\right)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2\right]e^{-\gamma t}\,dxdt$$
$$\leq\frac{1}{\delta_1}\int\limits_{Q_\tau}\left(\frac{|F_1(x,t)|^2}{\varphi'(t+\varepsilon)}+|F_2(x,t)|^2\right)e^{-\gamma t}\,dxdt. \quad (7)$$

На основании условий теоремы можем теперь выбрать числа $\gamma>0$, $\delta_1>0$, $0<\tau_0<T$ так, что на промежутке $[0,\tau_0]$ будут выполнятся неравенства

$$-\gamma\frac{\varphi(t+\varepsilon)}{\varphi'(t+\varepsilon)}+\varphi_1(t+\varepsilon)-\frac{2c_1(t+\varepsilon)}{\varphi'(t+\varepsilon)}+5\delta_1\leq\nu_3+\delta_0;$$
$$\gamma-c_4(t+\varepsilon)\left(1+\frac{1}{\delta_1}\right)-3\delta_1\geq 0;\quad \gamma a_m-a_1-\frac{2b_1(t+\varepsilon)\gamma_m}{\delta_1}\geq 0$$

для произвольного $\varepsilon>0$, $0<\varepsilon<\min\{\tau_0;T-\tau_0\}$. Здесь $\delta_0>0$ можем выбрать достаточно малым. В частности, если $\nu_1<0$, то $\nu_1+\delta_0\leq 0$. Тогда из (7) на промежутке $[0,\tau_0]$ следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\varphi(t+\varepsilon)\big|u_t^{j,\varepsilon}\big|^2+\big|v_t^{j,\varepsilon}\big|^2+a_m\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2\right]e^{-\gamma\tau}\,dx$$

$$\leq (\nu_1+\delta_0)\int\limits_{Q_\tau}\varphi'(t+\varepsilon)\big|u_t^{j,\varepsilon}\big|^2 e^{-\gamma t}\,dxdt+\frac{1}{\delta_1}\int\limits_{Q_\tau}\bigg(\frac{|F_1(x,t)|^2}{\varphi'(t+\varepsilon)}+|F_2(x,t)|^2\bigg)e^{-\gamma t}\,dxdt. \tag{8}$$

Если решить неравенство (8), то легко получить оценку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\varphi(t+\varepsilon)\big|u_t^{j,\varepsilon}\big|^2+\big|v_t^{j,\varepsilon}\big|^2+\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2\Big]\,dx$$
$$\leq M_1(\varphi(\tau+\varepsilon))^{\varkappa_0}\int\limits_{Q_\tau}\frac{1}{(\varphi(t))^{\varkappa_0}}\bigg(\frac{|F_1(x,t)|^2}{\varphi'(t+\varepsilon)}+|F_2(x,t)|^2\bigg)\,dxdt, \tag{9}$$

$$\tau\in[0,\tau_0],\quad \varkappa_0=\begin{cases}0, & \text{если } \nu_1<0,\\ \nu_3+2\delta_0, & \text{если } \nu_1\geq 0,\end{cases}$$

где постоянная M_1 не зависит от ε и j.

Продифференцируем равенства (4) по t, потом умножим каждое из полученных равенств соответственно на функцию $c_{ktt}^{j,\varepsilon}e^{-\omega t}$, $\omega>0$, сложим их и проинтегрируем по промежутку $[0,\tau]$, $\tau\leq\tau_0$. Получим

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[\big(\Phi(x,t+\varepsilon)w_{ttt}^{j,\varepsilon},w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)+\big(C(x,t+\varepsilon)w_{tt}^{j,\varepsilon},w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)$$
$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m}\big(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta w_t^{j,\varepsilon},D^\alpha w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)+\big(\Phi_t(x,t+\varepsilon)w_{tt}^{j,\varepsilon},w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)$$
$$+\big(C_t(x,t+\varepsilon)w_t^{j,\varepsilon},w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)+\sum_{|\alpha|\leq m}\big(B_\alpha(x,t+\varepsilon)D^\alpha w_t^{j,\varepsilon},w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)$$
$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m}\big(A_{\alpha\beta t}(x,t)D^\beta w^{j,\varepsilon},D^\alpha w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)+\sum_{|\alpha|\leq m}\big(B_{\alpha t}(x,t+\varepsilon)D^\alpha w^{j,\varepsilon},w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)$$
$$-\big(F_t(x,t),w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)\Big]e^{-\omega t}\,dxdt=0. \tag{10}$$

Снова преобразуем и оценим слагаемые равенства (10). Учитывая условия теоремы, будем иметь

$$\mathfrak{I}_6=\int\limits_{Q_\tau}\big[\big(\Phi(x,t+\varepsilon)w_{ttt}^{j,\varepsilon},w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)+\big(\Phi_t(x,t+\varepsilon)w_{tt}^{j,\varepsilon},w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)\big]e^{-\omega t}\,dxdt$$
$$\geq\frac12\int\limits_{\Omega_\tau}\big[\varphi(\tau+\varepsilon)\big|u_{tt}^{j,\varepsilon}\big|^2+\big|v_{tt}^{j,\varepsilon}\big|^2\big]e^{-\omega\tau}\,dx-\frac12\int\limits_{\Omega_0}\big(\Phi(x,\varepsilon)w_{tt}^{j,\varepsilon},w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)\,dx$$
$$+\frac12\int\limits_{Q_\tau}\big[\big(\omega\varphi(t+\varepsilon)+\varphi_2(t+\varepsilon)\varphi'(t+\varepsilon)\big)\big|u_{tt}^{j,\varepsilon}\big|^2+\omega\big|v_{tt}^{j,\varepsilon}\big|^2\big]e^{-\omega t}\,dxdt;$$

$$\mathfrak{I}_7=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m}\big[\big(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta w_t^{j,\varepsilon},D^\alpha w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)$$
$$+\big(A_{\alpha\beta t}(x,t)D^\beta w^{j,\varepsilon},D^\alpha w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)\big]e^{-\omega t}\,dxdt$$
$$\geq\frac{a_m}{4}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=m}\big|D^\alpha w_t^{j,\varepsilon}\big|^2e^{-\omega\tau}\,dx-\frac{a_1}{2a_m}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=m}\big|D^\alpha w^{j,\varepsilon}\big|^2e^{-\omega\tau}\,dx$$

$$+\frac{1}{2}(\omega a_m - 3a_1 - \omega a_1\delta_2 - a_2)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=m}\left|D^\alpha w_t^{j,\varepsilon}\right|^2 e^{-\omega t}\,dxdt$$
$$-\frac{\gamma_m}{2}\left(\frac{\omega}{\delta_2}+1\right)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2 e^{-\omega t}\,dxdt,$$

где $\delta_2 > 0$, а постоянная a_2 зависит от $\sup\limits_{Q_T}\|A_{\alpha\beta tt}\|$, $|\alpha| = |\beta| \le m$, чисел m, n и области Ω;

$$\mathfrak{I}_8 = \int\limits_{Q_\tau}\big(C(x,t+\varepsilon)w_{tt}^{j,\varepsilon}, w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)e^{-\omega t}\,dxdt$$
$$\ge \int\limits_{Q_\tau}\Big[\big(c_1(t+\varepsilon)-\delta_2\varphi'(t+\varepsilon)\big)\left|u_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2 - c_4(t+\varepsilon)\Big(1+\frac{1}{\delta_2}\Big)\left|v_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2\Big]e^{-\omega t}\,dxdt;$$

$$\mathfrak{I}_9 = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|\le m}\big(B_\alpha(x,t+\varepsilon)D^\alpha w_t^{j,\varepsilon}, w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)e^{-\omega t}\,dxdt$$
$$\ge -\int\limits_{Q_\tau}\Big[\frac{\gamma_m b_1(t+\varepsilon)}{\delta_2}\sum_{|\alpha|=m}\left|D^\alpha w_t^{j,\varepsilon}\right|^2 + \delta_2\varphi'(t+\varepsilon)\left|u_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2 + \delta_2\left|v_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2\Big]e^{-\omega t}\,dxdt;$$

$$\mathfrak{I}_{10} = \int\limits_{Q_\tau}\big(C_t(x,t+\varepsilon)w_t^{j,\varepsilon}, w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)e^{-\omega t}\,dxdt \ge -\int\limits_{Q_\tau}\Big[\delta_2\varphi'(t+\varepsilon)\left|u_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2 + \delta_2\left|v_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2$$
$$+\frac{c_2(t+\varepsilon)}{\delta_2(t+\varepsilon)^\rho}\varphi(t+\varepsilon)\left|u_t^{j,\varepsilon}\right|^2 + \frac{c_3(t+\varepsilon)}{\delta_2(t+\varepsilon)^\rho}\left|v_t^{j,\varepsilon}\right|^2\Big]e^{-\omega t}\,dxdt;$$

$$\mathfrak{I}_{11} = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|\le m}\big(B_{\alpha t}(x,t+\varepsilon)D^\alpha w^{j,\varepsilon}, w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)e^{-\omega t}\,dxdt$$
$$\ge -\int\limits_{Q_\tau}\Big[\delta_2\varphi'(t+\varepsilon)\left|u_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2 + \delta_2\left|v_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2 + \frac{\gamma_m b_2(t+\varepsilon)}{\delta_2(t+\varepsilon)^\rho}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2\Big]e^{-\omega t}\,dxdt;$$

$$\mathfrak{I}_{12} = \int\limits_{Q_\tau}\big(F_t(x,t), w_{tt}^{j,\varepsilon}\big)e^{-\omega t}\,dxdt \le \frac{\delta_2}{2}\int\limits_{Q_\tau}\big[\varphi'(t+\varepsilon)\left|u_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2$$
$$+\left|v_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2\big]e^{-\omega t}\,dxdt + \frac{1}{2\delta_2}\int\limits_{Q_\tau}\Big[\frac{|F_{1t}(x,t)|^2}{\varphi'(t+\varepsilon)} + |F_{2t}(x,t)|^2\Big)e^{-\omega t}\,dxdt.$$

Учитывая оценки интегралов $\mathfrak{I}_6, \dots, \mathfrak{I}_{12}$, из равенства (10) получим неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\varphi(\tau+\varepsilon)\left|u_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2 + \left|v_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2 + \frac{a_m}{2}\sum_{|\alpha|=m}\left|D^\alpha w_t^{j,\varepsilon}\right|^2\Big]e^{-\omega\tau}\,dx$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\Big(\omega\frac{\varphi(t+\varepsilon)}{\varphi'(t+\varepsilon)} + \varphi_2(t+\varepsilon) + \frac{2c_1(t+\varepsilon)}{\varphi'(t+\varepsilon)} - 9\delta_2\Big)\varphi'(t+\varepsilon)\left|u_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2$$

$$+\left(\omega-2c_4(t+\varepsilon)\left(\frac{1}{\delta_2}+1\right)-7\delta_2\right)\left|v_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2$$

$$+\left(\omega a_m-3a_1-\omega a_1\delta_2-a_2-\frac{2\gamma_m b_2(t+\varepsilon)}{\delta_2}\right)\sum_{|\alpha|=m}\left|D^\alpha w_t^{j,\varepsilon}\right|^2\Bigg]e^{-\omega t}\,dxdt$$

$$\le\int\limits_{\Omega_0}\left(\Phi(x,\varepsilon)w_{tt}^{j,\varepsilon},w_{tt}^{j,\varepsilon}\right)dx+\frac{a_1}{a_m}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2e^{-\omega\tau}\,dx$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[\gamma_m\left(\frac{1}{\delta_2}+1+\frac{2b_2(t+\varepsilon)}{\delta_2(t+\varepsilon)^\rho}\right)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2+\frac{2c_2(t+\varepsilon)}{\delta_2(t+\varepsilon)^\rho}\varphi(t+\varepsilon)\left|u_t^{j,\varepsilon}\right|^2\right.$$

$$\left.+\frac{2c_3(t+\varepsilon)}{\delta_2(t+\varepsilon)^\rho}\left|v_t^{j,\varepsilon}\right|^2\right]e^{-\omega t}\,dxdt+\frac{1}{\delta_2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{|F_{1t}(x,t)|^2}{\varphi'(t+\varepsilon)}+|F_{2t}(x,t)|^2\right)e^{-\omega t}\,dxdt. \quad (11)$$

На основании равенств (4) и условий (5) легко показать, что

$$\int\limits_{\Omega_0}\left(\Phi(x,\varepsilon)w_{tt}^{j,\varepsilon},w_{tt}^{j,\varepsilon}\right)dx=\int\limits_{\Omega_0}\left(F(x,0),w_{tt}^{j,\varepsilon}\right)dx=\int\limits_{\Omega_0}\left(F_2(x,0),v_{tt}^{j,\varepsilon}\right)dx.$$

Заметим, что $F_2(x,0)=0$ в случае, когда $\nu_1\ge 0$. Далее, из последнего равенства получим

$$\int\limits_{\Omega_0}\left[\varphi(\varepsilon)\left|u_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2+\left|v_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2\right]dx\le\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left[|F_2(x,0)|^2+\left|v_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2\right]dx.$$

Отсюда

$$\int\limits_{\Omega_0}\left(\Phi(x,\varepsilon)w_{tt}^{j,\varepsilon},w_{tt}^{j,\varepsilon}\right)dx\le\frac{1}{\varphi^0}\int\limits_{\Omega_0}|F_2(x,0)|^2\,dx. \quad (12)$$

Используя условия теоремы, можем выбрать числа $\delta_2>0$, $\omega>0$, τ_1 $(0<\tau_1\le\tau_0)$ такими, что на промежутке $[0,\tau_1]$ будут выполнятся неравенства

$$-\omega\frac{\varphi(t+\varepsilon)}{\varphi'(t+\varepsilon)}-\varphi_2(t+\varepsilon)-\frac{2c_1(t+\varepsilon)}{\varphi'(t+\varepsilon)}+9\delta_2\le\nu_2+\delta_0;$$

$$\omega-2c_4(t+\varepsilon)\left(\frac{1}{\delta_2}+1\right)-7\delta_2\ge 0; \quad (13)$$

$$\omega a_m-3a_1-\omega a_1\delta_2-a_2-\frac{2\gamma_m b_2(t+\varepsilon)}{\delta_2}\ge 0$$

для произвольного ε, $0<\varepsilon<\min\{\tau_1;T-\tau_0\}$. Число δ_0 в случае, если $\nu_2<0$, можно выбрать так, что $\nu_2+\delta_0\le 0$.

Используем теперь оценку (9). На ее основании имеем

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\frac{b_3(\tau)}{\tau^\rho}\left[\varphi(\tau+\varepsilon)\left|u_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2+\left|v_{tt}^{j,\varepsilon}\right|^2+\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2\right]dx$$

$$\le M_1\frac{(\varphi(\tau+\varepsilon))^{\varkappa_0}}{\tau^\rho}\int\limits_{Q_\tau}\frac{b_3(t)}{(\varphi(t))^{\varkappa_0}}\left[\frac{|F_1(x,t)|^2}{\varphi'(t)}+|F_2(x,t)|^2\right]dxdt\equiv M_1(\varphi(\tau+\varepsilon))^{\varkappa_0}\mathbf{f}_1(\tau).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{Q_\tau}\left[\gamma_m\left(\frac{1}{\delta_2}+1+\frac{2b_2(t+\varepsilon)}{\delta_2(t+\varepsilon)^\rho}\right)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha w^{j,\varepsilon}|^2\right.$$

$$+\frac{2c_2(t+\varepsilon)}{\delta_2(t+\varepsilon)^\rho}\varphi(t+\varepsilon)\big|u_t^{j,\varepsilon}\big|^2+\frac{2c_3(t+\varepsilon)}{\delta_2(t+\varepsilon)^\rho}\big|v_t^{j,\varepsilon}\big|^2\Bigg]e^{-\omega t}\,dxdt\le M_2(\varphi(\tau+\varepsilon))^{\varkappa_0}\mathbf{f}_1(\tau),\tag{14}$$

причем постоянная M_2 не зависит от ε и j. Таким образом, учитывая оценки (12)–(14), из (11) получим неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\varphi(\tau+\varepsilon)\big|u_{tt}^{j,\varepsilon}\big|^2+\big|v_{tt}^{j,\varepsilon}\big|^2+\sum_{|\alpha|=m}\big|D^\alpha w_t^{j,\varepsilon}\big|^2\Big]e^{-\omega\tau}\,dx$$
$$\le M_3\Bigg[(\varphi(\tau+\varepsilon))^{\varkappa_0}\mathbf{f}_1(\tau)+\int\limits_{Q_\tau}\bigg[\frac{|F_{1t}(x,t)|^2}{\varphi'(t)}+|F_{2t}(x,t)|^2\bigg]dxdt$$
$$+\int\limits_{\Omega_0}|F_2(x,0)|^2\,dx\Bigg]+(\nu_2+\delta_0)\int\limits_{Q_\tau}\varphi'(t+\varepsilon)\big|u_{tt}^{j,\varepsilon}\big|^2e^{-\omega t}\,dxdt,\quad \tau\in[0,\tau_1],$$

где постоянная M_3 не зависит от ε и j. Из последнего неравенства легко получить оценку

$$\int\limits_{Q_{\tau_1}}\Big[\varphi(t)\big|u_{tt}^{j,\varepsilon}\big|^2+\big|v_{tt}^{j,\varepsilon}\big|^2+\sum_{|\alpha|=m}\big|D^\alpha w_t^{j,\varepsilon}\big|^2\Big]dxdt\le M_4\Bigg\{\mathbf{f}_1(T)$$
$$+\sigma_2\int\limits_{\Omega_0}|F_2(x,0)|^2\,dx+\int\limits_{Q_T}\frac{1}{(\varphi(t))^{\sigma_1}}\bigg[\frac{|F_{1t}(x,t)|^2}{\varphi'(t)}+|F_{2t}(x,t)|^2\bigg]dxdt\Bigg\}.\tag{15}$$

Нетрудно видеть, что оценка (15) может быть получена и в области $Q_{\tau_1,T}$.

Рассмотрим пространство функций $\overset{\circ}{H}{}^{m,2}_{\varphi}(Q_T)$, являющееся замыканием множества функций, бесконечно дифференцируемых в $\overline{Q}_T$ и равных нулю в окрестности S_T, по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^{m,2}_{\varphi}(Q_T)}=\bigg(\int\limits_{Q_T}\Big[\varphi(t)u_{tt}^2+\sum_{|\alpha|=m}(D^\alpha u)^2+\sum_{|\alpha|=m}(D^\alpha u_t)^2\Big]dxdt\bigg)^{\frac12}.$$

Пусть

$$V^{m,2}_\varphi=\prod_{i=1}^{l}\overset{\circ}{H}{}^{m,2}_{\varphi}(Q_T)\times\prod_{i=l+1}^{N}\overset{\circ}{H}{}^{m,2}_{1}(Q_T).$$

Тогда на основании оценок (9) и (15) имеем

$$\|w^{j,\varepsilon}\|_{V^{m,2}_\varphi}\le M_5,\tag{16}$$

причем постоянная M_5 не зависит от ε и j. Рассмотрим последовательность функций $\{w^{j,\varepsilon}(x,t)\}$, где $\varepsilon=1/j$. В силу (16) из нее можно выбрать подпоследовательность $\{w^s(x,t)\}$ такую, что

$$w^s(x,t)\to w(x,t)\quad\text{слабо в}\quad V^{m,2}_\varphi,\quad\text{когда}\quad s\to\infty,$$

причем

$$\sqrt{\varphi(t)}u_t(x,t),\quad v_t(x,t)\in C([0,T];(L^2(\Omega))^N),$$
$$w(x,t)\in C([0,T];(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N),\quad w_t(x,t)\in L^2((0,T);(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N).$$

Рассмотрим снова систему (4) для функций $w^s(x,t)$. Из нее легко получить равенство

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big[(\Phi(x,t)w_{tt},\psi)+(C(x,t)w_t,\psi)+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta w,D^\alpha\psi)$$
$$+\sum_{|\alpha|\le m}(B_\alpha(x,t)D^\alpha w,\psi)-(F(x,t),\psi)\Big]\,dx=0,\qquad(17)$$

справедливое почти для всех $t\in[0,T]$ и для всех $\psi\in(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$. Из равенства (17), в частности, следует, что почти для всех $t\in[0,T]$ функция $w(x,t)$ является обобщенным решением задачи Дирихле для эллиптической системы

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta w)=\mathbb{F}(x,t),\qquad(18)$$

где

$$\mathbb{F}(x,t)=F(x,t)-\Phi(x,t)w_{tt}-C(x,t)w_t-\sum_{|\alpha|\le m}B_\alpha(x,t)D^\alpha w,$$

с краевыми условиями

$$\left.\frac{\partial^i w}{\partial\nu^i}\right|_{\partial\Omega}=0,\quad i=0,\dots,m-1.\qquad(19)$$

Заметим, что $\mathbb{F}(x,t)\in(L^2(\Omega))^N$ почти для всех $t\in[0,T]$ и в силу условия (A_0) задача (18), (19) имеет только одно обобщенное решение, а именно найденную нами функцию $w(x,t)$. С другой стороны, как следует из работы [23], условия теоремы гарантируют существование единственного решения задачи (18), (19) в пространстве $(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)\cap H^{2m}(\Omega))^N$, которое будет, очевидно, и обобщенным решением этой задачи. Следовательно,

$$w(x,t)\in L^2((0,T);(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)\cap H^{2m}(\Omega))^N).$$

Далее легко показать аналогично [24, с. 219], что $w(x,t)$ является решением почти всюду задачи (1)–(3). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Терсенов С. А.* К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 6. С. 913–935.
2. *Терсенов С. А.* О сингулярной задаче Коши для одной системы уравнений гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205, № 5. С. 1046–1049.
3. *Барановский Ф. Т.* Смешанная краевая задача для гиперболического уравнения с вырождающейся главной частью // Мат. сб. 1981. Т. 115, № 4. С. 560–576.
4. *Барановский Ф. Т.* О задаче Коши для гиперболического вырождающегося на начальной плоскости уравнения с видоизмененными начальными данными // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 4. С. 926–933.
5. *Барановський Ф. Т.* Смешанная задача для сильно вырождающегося гиперболического уравнения с видоизмененными начальными данными // Укр. мат. журн. 1978. Т. 30, № 1. С. 3–15.
6. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966.
7. *Брюханов В. А.* О смешанной задаче для одного уравнения гиперболического типа, вырождающегося на части границы области // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 3–6.

8. *Брюханов В. А.* Характеристическая задача Коши для одного класса гиперболических уравнений, вырождающихся на многообразии начальных данных // Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск, 1987. С. 21–34.

9. *Бубнов Б. А.* Смешанная задача для некоторых параболо-гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 3. С. 494–501.

10. *Врагов В. Н.* Смешанная задача для одного класса гиперболо-параболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 24–31.

11. *Глазатов С. Н.* О корректности смешанной задачи для вырождающегося гиперболического уравнения с произвольным характером вырождения // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 2. С. 60–66.

12. *Дерябина А. В.* О растущих решениях сильно вырождающихся гиперболических систем // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 4. С. 447–463.

13. *Егоров И. Е.* О смешанной задаче для одного гиперболо-параболического уравнения // Мат. заметки. 1978. Т. 23, № 3. С. 389–400.

14. *Егоров И. Е.* К теории вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 2. С. 68–75.

15. *Калашников А. С.* Задача без начальных условий для линейных вырождающихся гиперболических уравнений с бесконечной областью зависимости // Мат. сб. 1972. Т. 88, № 4. С. 609–622.

16. *Бубнов Б. А.* Смешанная задача для одного класса неклассических уравнений // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 3. С. 525–528.

17. *Бубнов Б. А., Врагов В. Н.* К теории корректных краевых задач для некоторых классов ультрагиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 4. С. 795–800.

18. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.

19. *Лавренюк С. П.* Смешанная задача для вырождающегося уравнения типа колебания пластины // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1375–1383.

20. *Лавренюк С. П.* Смешанная задача для сильно вырождающейся эволюционной системы // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 8. С. 1405–1411.

21. *Вишик М. И.* Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения // Мат. сб. 1956. Т. 39, № 1. С. 51–148.

22. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

23. *Слободецкий Л. Н.* Оценки в L^2 решений эллиптических и параболических систем // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. математика, механика, астрономия. 1960. № 7. С. 28–47.

24. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 26 февраля 1997 г.

г. Львов
Львовский национальный университет, Краковская политехника,
`lawreniu@usk.pk.edu.pl; diffeq@uli.franko.lviv.ua`