Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2001. Том 42, № 2

УДК 519.21

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ L–СТАТИСТИК

И. С. Борисов, Е. А. Бакланов

Аннотация: Получены показательные оценки для хвостов распределения обобщенных L-статистик (аддитивных функционалов от порядковых статистик). Доказаны также соответствующие моментные неравенства. Библиогр. 21.

1. Введение

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Рассмотрим статистику

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^{n} h_{ni}(X_{n:i}), \tag{1}$$

где $X_{n:1} \le \dots \le X_{n:n}$ — порядковые статистики, построенные по выборке $\{X_i; i \le n\}$, $h_{ni} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, — некоторые измеримые функции. В частности, если $h_{ni}(y) = c_{ni}h(y)$ и $h(y)$ монотонна, то Φ_n — классическая L-статистика.

Функционалы вида (1) в рассматриваемой общности естественно называть *обобщенными L-статистиками.* Они впервые введены в [1, 2], где получены асимптотические разложения для распределений этих статистик в некоторых частных случаях. Анализ Фурье распределений Φ_n содержится в [3]. Отметим, что интегральные статистики (интегральные функционалы от эмпирических функций распределения, например, статистики Крамера — Андерсона — Дарлинга) представимы в виде (1), но не в виде классических L-статистик (подробнее см. [1, 3]). Целью настоящей работы является получение оценок для хвостов распределения статистик Φ_n, а также моментных неравенств для них. В случае классических L-статистик показательные оценки для хвостов распределения получены в [4]. При этом их вывод оценок основан на аппроксимации L-статистик с помощью U-статистик с невырожденными ядрами, что позволяет сводить задачу к аналогичным проблемам для сумм независимых случайных величин. Предлагаемый в настоящей работе подход иллюстрирует возможности бесконечномерного анализа: рассматриваемые задачи сводятся к аналогичным проблемам для сумм независимых случайных элементов со значениями в некотором функциональном банаховом пространстве. В предыдущей работе авторов [5] предложен аналогичный подход, использующий удобную для анализа структуру порядковых статистик, построенных по выборке из показательного распределения. В настоящей работе для изучения обобщенных L-статистик

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00504, 00–01–00802) и фонда INTAS (код проекта 99–01317).

мы существенно используем свойства порядковых статистик, построенных по выборке из равномерного на отрезке $[0,1]$ распределения, хотя не налагаем никаких дополнительных ограничений на распределение выборки для так называемых L-статистик с расщепляющимися ядрами, которые будут рассмотрены ниже.

Отметим также, что термин «обобщенные» применительно к L-статистикам ранее введен в [6], где рассматривалось обобщение теории классических L-статистик в несколько ином направлении, связанном с другим построением порядковых статистик.

2. Формулировка основных результатов

2.1. Аддитивные функционалы от центрированных порядковых статистик. В этом разделе мы рассматриваем аддитивные функционалы от центрированных и нормированных порядковых статистик, построенных по выборке из равномерного распределения на отрезке $[0,1]$:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} h_{ni}(\sqrt{n+1}(X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i})). \tag{2}$$

Очевидно, что в силу произвольности ядер h_{ni} в (1), а также хорошо известных свойств квантильных преобразований любая обобщенная L-статистика допускает такое представление, хотя для нас оно играет лишь вспомогательную роль.

Теорема 1. *Пусть функции $h_{ni}(x)$, $i=1,\dots,n$, в (2) удовлетворяют следующему условию:*

$$|h_{ni}(x)| \le a_{ni} + b_{ni}|x|^m \quad \text{для некоторого} \quad m \ge 1, \tag{3}$$

где a_{ni} и b_{ni} — положительные постоянные, зависящие только от i и n. Тогда

$$\mathbf{P}\{A_n \ge y\} \le 4\exp\left\{-\frac{(y/2-\Lambda)^{2/m} - 2\beta y^{1/m}}{2(B^2 + Hy^{1/m})}\right\}, \tag{4}$$

где

$$\beta = C(m)(n+1)^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^{m/2} b_{ni}\right)^{1/m},$$

$$C(m) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 1 \le m < 2, \\ (1+\Gamma(m+1))^{\frac{1}{m}} \max\{1+\frac{m}{2}; (2e)^{\frac{1}{m}}((1+\frac{m}{2})e)^{\frac{1}{2}}\}, & \text{если} \quad m \ge 2, \end{cases}$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\Lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}$,

$$B^2 = 2(n+1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} b_{nj}\right)^{2/m}, \quad H = (n+1)^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ni}\right)^{1/m}.$$

Рассмотрим частный случай $h_{ni}(x) = |x|^m/(n+1)$, $m \ge 2$. Тогда $a_{ni} = 0$, $b_{ni} = (n+1)^{-1}$ и статистика A_n имеет вид

$$A_n = \int_0^1 |G_n(t)|^m \, dt,$$

где $G_n(t)$ — обратный (квантильный) эмпирический процесс, построенный по выборке объема n из совокупности с равномерным на отрезке $[0,1]$ распределением (подробнее о процессе $G_n(t)$ см. п. 3). Известно (см., например, [7]), что при $n \to \infty$ распределения процессов $G_n(t)$ C-сходятся в $D[0,1]$ к распределению «броуновского моста» $w^0(t)$. Таким образом, при $n \to \infty$ имеем

$$\mathbf{P}\{A_n \geq y\} = \mathbf{P}\left\{\int\limits_0^1 |G_n(t)|^m dt \geq y\right\} \to \mathbf{P}\{\|w^0\| \geq y^{1/m}\},$$

где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $\mathscr{L}_m([0,1], dt)$. Из неравенства, доказанного в [8] для гауссовских элементов произвольного банахова пространства, можно получить следующую в известном смысле неулучшаемую оценку:

$$\mathbf{P}\{\|w^0\| \geq y^{1/m}\} \leq \exp\left\{-\frac{(y^{1/m} - \sigma)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где $y \geq \sigma^m$, $\sigma^m = 2^{m/2}\pi^{-1/2}\Gamma((m+1)/2)B(m/2+1, m/2+1)$, $B(x,y)$ — бета-функция.

С другой стороны, из (4) получаем

$$\mathbf{P}\{A_n \geq y\} \leq 4\exp\left\{-\frac{y^{2/m} - 4C(m)y^{1/m}}{4(1 + y^{1/m}n^{-1/2})}\right\}.$$

Так что для данного примера неравенство (4) достаточно точное.

Остановимся подробнее на простейшей классической L-статистике с ядром $h_{ni}(x) = x(n(n+1))^{-1/2}$. В этом случае статистика A_n имеет следующий вид:

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}X_i),$$

где $X_1, \dots, X_n$ — независимые равномерно распределенные на $[0,1]$ случайные величины. Применение неравенства (4) при $a_{ni} = 0$, $b_{ni} = (n(n+1))^{-1/2}$ и $m = 1$ дает оценку

$$\mathbf{P}\{A_n \geq y\} \leq 4\exp\left\{-\frac{y^2 - 16y/3}{8(2/3 + yn^{-1/2})}\right\},$$

которая, по существу, совпадает с оценкой в классическом неравенстве С. Н. Бернштейна для сумм независимых ограниченных случайных величин. Сравним этот результат со следующей оценкой для хвоста распределения данной L-статистики в [4]:

$$\mathbf{P}\{A_n \geq y\} \leq \exp\left\{-\frac{C_0 y^2}{1 + y^{3/2}n^{-1/4}}\right\},$$

где абсолютную постоянную C_0 можно вычислить в явном виде. Легко видеть, что логарифмическая асимптотика правой части последнего неравенства совпадает по порядку с аналогичной асимптотикой правой части в неравенстве С. Н. Бернштейна лишь в зоне уклонений $y = O(n^{1/6})$.

Введем в рассмотрение центрированную обобщенную L-статистику

$$\overline{\Phi}_n = \sum_{i=1}^n h_{ni}(X_{n:i}) - \sum_{i=1}^n h_{ni}(\mathbf{E}X_{n:i}). \tag{5}$$

В качестве непосредственного следствия теоремы 1 можно получить следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть функции h_{ni}, $i = 1, \ldots, n$, в (5) удовлетворяют условию Липшица с константами b_{ni} соответственно. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\overline{\Phi}_n \geq y\} \leq 4 \exp\left\{-\frac{y^2 - 8\beta_1 y}{8(B_1^2 + H_1 y)}\right\}, \tag{6}$$

где

$$\beta_1 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^n i^{1/2} b_{ni}, \quad B_1^2 = \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n b_{nj}\right)^2, \quad H_1 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^n b_{ni}.$$

Неравенство (6) следует из соотношения

$$|\overline{\Phi}_n| \leq \sum_{i=1}^n b_{ni}|X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{i=1}^n b_{ni}|\sqrt{n+1}(X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i})| \tag{7}$$

и теоремы 1.

Следующие два утверждения содержат моментные неравенства для рассматриваемых статистик.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для всех $r \geq 2$*

$$\mathbf{E}|A_n|^r \leq 4^r\left\{\left(\sum_{i=1}^n a_{ni}\right)^r + 2^{rm-1}\beta^{rm}\right\} \\ + \frac{2^{r(m+2)-1}}{(n+1)^{rm/2}}(Krm)^{rm}\bigl\{\Gamma(rm+1)B_{n,r} + B_{n,2/m}^{rm/2}\bigr\}, \tag{8}$$

где

$$B_{n,r} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n b_{nj}\right)^r,$$

K — положительная абсолютная постоянная, β определено в теореме 1.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия 1. Тогда для всех $r \geq 2$*

$$\mathbf{E}|\overline{\Phi}_n|^r \leq \frac{2^{3r-1}}{(n+1)^r}\left\{\left(\sum_{i=1}^n i^{1/2} b_{ni}\right)^r + (K_1 r)^r\bigl(\Gamma(r+1)B_{n,r} + B_{n,2}^{r/2}\bigr)\right\}, \tag{9}$$

где K_1 — абсолютная положительная постоянная.

Соотношение (9) очевидным образом следует из (7) и (8).

Вновь рассмотрим частный случай $h_{ni}(x) = x(n(n+1))^{-1/2}$, для которого

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}X_i).$$

В [9] показано, что для независимых центрированных случайных величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ при любом $c > r/2$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}\left|\sum_{i=1}^n \zeta_i\right|^r \leq c^r \sum_{i=1}^n \mathbf{E}|\zeta_i|^r + rc^{r/2}e^c B(r/2, c - r/2)\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\zeta_i^2\right)^{r/2}. \tag{10}$$

Полагая в (10) $\zeta_i = X_i - \mathbf{E}X_i$, $c = 1 + r/2$ и учитывая, что $\mathbf{E}(X_1 - \mathbf{E}X_1)^2 = 1$, $\mathbf{E}|X_1 - \mathbf{E}X_1|^r \leq \Gamma(r+1)$, получим

$$\mathbf{E}|A_n|^r \leq 2(1 + r/2)^{r/2}e^{1+r/2} + (1 + r/2)^r\Gamma(r+1)n^{1-r/2}.$$

С другой стороны, из (8) имеем

$$\mathbf{E}|A_n|^r \le 2^{3r-1}(1+(Kr)^r) + 2^{3r-1}(Kr)^r\Gamma(r+1)n^{1-r/2},$$

что вполне согласуется с вышеприведенной оценкой.

2.2. L-статистики с расщепляющимися ядрами. Рассмотрим L-статистики следующего вида:

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} h(X_{n:i}), \tag{11}$$

где c_{ni}, $i=1,\dots,n$, — некоторые постоянные, h — произвольная измеримая (не обязательно монотонная) функция, а X_1 имеет произвольную функцию распределения F.

Без ограничения общности можно считать, что $\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ni} = 0$, поскольку статистика L_n представима в виде

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_{ni} h(X_{n:i}) + \tilde{c}_n \sum_{i=1}^{n} h(X_i), \tag{12}$$

где $\tilde{c}_{ni} = c_{ni} - \tilde{c}_n$, $\tilde{c}_n = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ni}$, а второе слагаемое в правой части (12) представляет собой сумму независимых одинаково распределенных случайных величин, для которых хорошо известны как моментные неравенства, так и оценки для хвостов распределения.

Стоит отметить, что L-статистики вида (11) изучались многими авторами при различных ограничениях на веса c_{ni} и функцию распределения F. Главным образом, исследовалась асимптотическая нормальность этих статистик в случае, когда функция $h(x)$ монотонна (или, что одно и то же, $h(x) = x$ и распределение выборки произвольно; см., например, [10–14]). Заметим, что в [13] также использовался бесконечномерный анализ при изучении асимптотического поведения статистик вида (11). Поведение вероятностей больших и умеренных уклонений L_n изучалось в [4, 15, 16].

Как отмечено в [3], статистики вида (11) с гладкими ядрами представимы в виде интегральных функционалов от эмпирической функции распределения $F_n(t)$. Действительно, пусть $h \in C^1(\mathbb{R})$ и $\phi_n(x)$ — произвольная непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\phi_n(0) = 0, \quad \phi_n(k/n) = \sum_{i=1}^{k} c_{ni}, \quad k = 1,\dots,n.$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ni} = 0$, то $\phi_n(1) = 0$. Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$L_n = \sum_{i=1}^{n}\left\{\phi_n\left(\frac{i}{n}\right) - \phi_n\left(\frac{i-1}{n}\right)\right\} h(X_{n:i}) \\ = \int\limits_{\mathbb{R}} h(t)\,d\phi_n(F_n(t)) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \phi_n(F_n(t))h'(t)\,dt.$$

Данное представление, по существу, присутствует в том или ином виде во многих работах, посвященных асимптотическому анализу L-статистик.

Функцию $\phi_n(x)$ доопределим следующим образом:

$$\phi_n(x) = nc_{nk}x + \sum_{i=1}^{k} c_{ni} - kc_{nk}, \quad \frac{k-1}{n} < x < \frac{k}{n}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Очевидно, что функция $\phi_n(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой nc_n, где $c_n = \max\limits_{1 \le k \le n} |c_{nk}|$. Обозначим

$$\gamma_n = \int\limits_{\mathbb{R}} \phi_n(F(t))h'(t)\,dt.$$

Тогда

$$L_n + \gamma_n = \int\limits_{\mathbb{R}} \{\phi_n(F(t)) - \phi_n(F_n(t)\}h'(t)\,dt. \tag{13}$$

Введем следующие обозначения:

$$g(t,z) = \begin{cases} F(t) & \text{при } t \le z, \\ 1 - F(t) & \text{при } t > z, \end{cases}$$

$$\alpha_k \equiv \alpha(k, F, h) = \int\limits_{\mathbb{R}} \Biggl(\int\limits_{\mathbb{R}} g(t,z)|h'(t)|\,dt\Biggr)^k dF(z),$$

$$H_F = \int\limits_{\mathbb{R}} (F(t)(1 - F(t)))^{1/2}|h'(t)|\,dt.$$

Условия нижеследующих теорем 3 и 4 содержат, в частности, моментные ограничения в терминах величин H_F и α_k. Поэтому представляет определенный интерес изучение свойств и связей введенных характеристик, а также сравнение указанных ограничений с классическими моментными условиями теории суммирования.

Предложение. *Справедливы следующие утверждения.*

1. $\mathbf{E}g^2(t, X_1) = F(t)(1 - F(t)$.
2. $\alpha_1 \le H_F$.
3. $\alpha_k \ge \alpha_1^k$, $k \ge 1$.
4. *Если h — монотонная функция, то* $\alpha_k \le 2^k \mathbf{E}|h(X_1)|^k$, $k \ge 1$.
5. *Пусть $\delta_1 \le |h'(t)| \le \delta_2$ для некоторых положительных δ_1 и δ_2, и пусть $H_F < \infty$. Тогда при $x \to \infty$*

$$\mathbf{P}(|X_1| \ge x) = o(x^{-2}).$$

В частности, $\mathbf{E}|X_1|^2(\ln^+|X_1|)^{-1-\varepsilon} < \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$.

6. *Пусть $|h'(t)| \le \delta|t|^\beta$ для некоторых $\delta > 0$ и $\beta \ge 0$, и пусть*

$$\mathbf{E}|X_1|^{2(1+\beta)}(\ln^+|X_1|)^{2+\varepsilon} < \infty$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда $H_F < \infty$.

Замечание. Как следует из приведенного предложения, условия существования величины H_F и второго момента выборки близки между собой. Подробнее проанализируем эту связь. Пусть функция h удовлетворяет следующему условию: $\delta_1 \le |h'(t)| \le \delta_2$ для некоторых положительных δ_1 и δ_2. В этом случае конечность одной из величин H_F или $\widetilde{H}_F = \int\limits_{\mathbb{R}} \sqrt{F(t)(1-F(t))}\,dt$ влечет за собой конечность другой.

В [14, с. 686] отмечено, что если функция распределения F имеет правильно меняющиеся хвосты степенного типа, то существование второго момента и конечность $\widetilde{H}_F$ — эквивалентные условия. Однако это не так. Приведем соответствующий контрпример. Пусть для простоты оба хвоста распределения ведут себя на бесконечностях как $|t|^{-p}L(|t|)$, $p > 0$, где $L(t)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция. Тогда существование второго момента и конечность $\widetilde{H}_F$ эквивалентны сходимости интегралов

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} t^{1-p}L(t)\,dt, \quad \int\limits_{t_0}^{\infty} t^{-p/2}L^{1/2}(t)\,dt$$

соответственно для некоторого $t_0 > 0$. Последние интегралы одновременно сходятся при $p > 2$ и одновременно расходятся при $p < 2$ (см., например, [17]). Рассмотрим отдельно случай $p = 2$. В этом случае из конечности $\widetilde{H}_F$ следует существование второго момента. В самом деле, если $f(x)$ — неотрицательная монотонно убывающая функция и интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ сходится, то $f(x) = o(1/x)$ при $x \to \infty$. Это вытекает из соотношения

$$0 \le xf(x) \le 2\int\limits_{x/2}^{x} f(t)\,dt \to 0, \quad x \to \infty.$$

Значит, если

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} t^{-1}L^{1/2}(t)\,dt < \infty,$$

то $L(x) \to 0$ при $x \to \infty$, т. е. $L(x) < 1$ при достаточно больших x. Отсюда получаем, что $L(x) \le L^{1/2}(x)$ при достаточно больших x и, стало быть,

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} t^{-1}L(t)\,dt < \infty.$$

Обратное утверждение неверно. Действительно, пусть $L(t) = C\ln^{-q} t$, $1 < q < 2$. Тогда, очевидно, второй момент существует, в то время как $\widetilde{H}_F = \infty$. Иными словами, в классе правильно меняющихся хвостов распределения выборки условие конечности величины $\widetilde{H}_F$ более сильное, нежели требование конечности второго выборочного момента.

Теорема 3. *Пусть функция $h(x)$ в (11) непрерывно дифференцируема и $H_F < \infty$. Если $\alpha_k < \infty$ для некоторого $k \ge 1$, то для всех $y > y_0$*

$$\mathbf{P}\{L_n + \gamma_n \ge y\} \le \exp\left\{-\frac{\ln 3}{2}\left(\frac{y-y_0}{2y_0}\right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}\right\} + \frac{6^{k+2}c_n^k n\alpha_k}{2(y-y_0)^k}, \tag{14}$$

где $y_0 = 24H_F c_n\sqrt{n}$, если $\alpha_k \le (24H_F)^k n^{k/2-1}/36$, и $y_0 = c_n(36n\alpha_k)^{1/k}$, если $\alpha_k > (24H_F)^k n^{k/2-1}/36$.

Если $\alpha_k \leq k!B^2H^{k-2}/2$ *для некоторых постоянных* B^2 *и* $H > 0$ *и всех целых* $k \geq 2$, *то*

$$\mathbf{P}\{L_n + \gamma_n \geq y\} \leq \exp\biggl\{-\frac{y^2 - 2H_F c_n \sqrt{n} y}{2c_n(nc_n B^2 + yH)}\biggr\}. \tag{15}$$

Если $|X_1| \leq b$ *п. н., то*

$$\mathbf{P}\{L_n + \gamma_n \geq y\} \leq \exp\biggl\{-\frac{(y - H_F c_n \sqrt{n})^2}{2nc_n^2 H_0^2}\biggr\}, \tag{16}$$

где $H_0 = \int\limits_{-b}^{b} |h'(t)|\, dt$.

Следствие 3. *Пусть функция* $h(x)$ *в* (11) *монотонна и непрерывно дифференцируема,* $H_F < \infty$, *и пусть* $\mathbf{E}|h(X_1)|^k \leq k!B^2H^{k-2}/2$ *для некоторых постоянных* B^2, $H > 0$ *и всех целых* $k \geq 2$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\{L_n + \gamma_n \geq y\} \leq \exp\biggl\{-\frac{y^2 - 2H_F c_n \sqrt{n} y}{4c_n(2nc_n B^2 + yH)}\biggr\}. \tag{17}$$

Соотношение (17) следует из (15) и неравенства $\alpha_k \leq 2^k \mathbf{E}|h(X_1)|^k$ (см. предложение).

Теорема 4. *Пусть функция* $h(x)$ *в* (11) *непрерывно дифференцируема,* $H_F < \infty$ *и* $\alpha_k < \infty$ *для некоторого* $k \geq 2$. *Тогда*

$$\mathbf{E}|L_n + \gamma_n|^k \leq 2^{k-1} c_n^k \bigl((Ck)^k \alpha_k + H_F^k\bigr) n^{k/2}, \tag{18}$$

где C *— абсолютная положительная постоянная.*

3. Доказательство основных результатов

3.1. Доказательство теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Определим случайный процесс $G_n(t)$ и функцию $\varphi_n(t,z)$ следующим образом. Для всех $t \in [i/(n+1), (i+1)/(n+1))$, $i = 0, 1, \ldots, n$, положим

$$G_n(t) = \sqrt{n+1}(X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i}), \quad \varphi_n(t,z) = (n+1)h_{ni}(z), \quad X_{n:0} \equiv 0,\ h_{n0} \equiv 0.$$

Тогда

$$A_n = \int\limits_0^1 \varphi_n(t, G_n(t))\, dt. \tag{19}$$

Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_{n+1}$ — независимые случайные величины, имеющие экспоненциальное распределение с параметром 1.

Обозначим $\tau_i = \nu_i - 1$. Очевидно, $\mathbf{E}\tau_i = 0$, $\mathbf{E}\tau_i^2 = 1$. По набору случайных величин $\{\tau_i\}_{i=1}^{n+1}$ построим процесс частных сумм $S_{n+1}(t)$:

$$S_{n+1}(t) = \frac{S_k}{\sqrt{n+1}}, \quad \text{если} \quad \frac{k}{n+1} \leq t < \frac{k+1}{n+1},$$

$$k = 0, 1, \ldots, n, \quad S_{n+1}(1) = \frac{S_{n+1}}{\sqrt{n+1}},$$

где $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \tau_i$, $S_0 = 0$. Наряду со случайным процессом $S_{n+1}(t)$ рассмотрим процесс $S^0_{n+1}(t)$ с «закрепленным» в нуле правым концом. Иными словами, $S^0_{n+1}(t)$ — случайный процесс, конечномерные распределения которого совпадают с конечномерными распределениями процесса $S_{n+1}(t)$ при условии $S_{n+1}(1) = 0$, т. е. для любых $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < 1$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}(S^0_{n+1}(t_1) < x_1, \dots, S^0_{n+1}(t_k) < x_k) = \mathbf{P}(S_{n+1}(t_1) < x_1, \dots, S_{n+1}(t_k) < x_k | S_{n+1}(1) = 0).$$

В [7] доказана следующая

Лемма 1. *Совместные распределения совокупностей* $\bigl\{G_n\bigl(\frac{i}{n+1}\bigr)\bigr\}_{i=1}^n$ *и* $\bigl\{S^0_{n+1}\bigl(\frac{i}{n+1}\bigr)\bigr\}_{i=1}^n$ *совпадают.*

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{A_n \ge y\} &= \mathbf{P}\Biggl\{\int\limits_0^1 \varphi_n(t, G_n(t))\,dt \ge y\Biggr\} = \mathbf{P}\Biggl\{\int\limits_0^1 \varphi_n\bigl(t, S^0_{n+1}(t)\bigr)\,dt \ge y\Biggr\} \\ &\le \mathbf{P}\Biggl\{\int\limits_0^{\frac{N+1}{n+1}} \varphi_n\bigl(t, S^0_{n+1}(t)\bigr)\,dt \ge \frac{y}{2}\Biggr\} + \mathbf{P}\Biggl\{\int\limits_{\frac{N+1}{n+1}}^1 \varphi_n\bigl(t, S^0_{n+1}(t)\bigr)\,dt \ge \frac{y}{2}\Biggr\} \\ &= \mathbf{P}\Biggl\{\int\limits_0^{\frac{N+1}{n+1}} \varphi_n\bigl(t, S^0_{n+1}(t)\bigr)\,dt \ge \frac{y}{2}\Biggr\} + \mathbf{P}\Biggl\{\int\limits_{\frac{N+1}{n+1}}^1 \varphi_n\bigl(t, -\bigl(S^0_{n+1}(1) - S^0_{n+1}(t)\bigr)\bigr)\,dt \ge \frac{y}{2}\Biggr\},\end{aligned} \tag{20}$$

где $N = [n/2]$. Обозначим

$$P_1 = \mathbf{P}\Biggl\{\int\limits_0^{\frac{N+1}{n+1}} \varphi_n\bigl(t, S^0_{n+1}(t)\bigr)\,dt \ge \frac{y}{2}\Biggr\},$$

$$P_2 = \mathbf{P}\Biggl\{\int\limits_{\frac{N+1}{n+1}}^1 \varphi_n\bigl(t, -\bigl(S^0_{n+1}(1) - S^0_{n+1}(t)\bigr)\bigr)\,dt \ge \frac{y}{2}\Biggr\}.$$

Лемма 2. *Для всех $n \ge 5$ справедливы следующие неравенства:*

$$P_1 \le 2\mathbf{P}\Biggl\{\int\limits_0^{\frac{N+1}{n+1}} \varphi_n\Biggl(t, S_{n+1}(t)\Biggr)\,dt \ge \frac{y}{2}\Biggr\},$$

$$P_2 \le \sqrt{3}\mathbf{P}\Biggl\{\int\limits_{\frac{N+1}{n+1}}^1 \varphi_n(t, -\Bigl(S_{n+1}(1) - S_{n+1}(t))\Bigr)\,dt \ge \frac{y}{2}\Biggr\}.$$

Доказательство. В [7] установлено, что для любого события $\mathscr{F}$ из σ-алгебры, порожденной траекториями процесса $S^0_{n+1}(t)$ за время от 0 до $1 - v$, имеет место неравенство

$$\mathbf{P}\bigl(S^0_{n+1}(\cdot) \in \mathscr{F}\bigr) \le C\mathbf{P}(S_{n+1}(\cdot) \in \mathscr{F}),$$

где $C = \sup \frac{f_1(-x)}{f_2(0)}$, f_1 и f_2 — плотности распределения случайных величин $S_{n+1}(1) - S_{n+1}(1-v)$ и $S_{n+1}(1)$ соответственно. Так как

$$f_1(-x) = \sqrt{n+1}(l - x\sqrt{n+1})^{l-1} \exp\{x\sqrt{n+1} - l)\}/(l-1)!,$$
$$f_2(0) = (n+1)^{n+3/2} e^{-(n+1)}/(n+1)!,$$

где $l = v(n+1)$, то

$$C = \frac{(n+1)!e^{n+1}(v(n+1)-1)^{(v(n+1)-1)}}{(n+1)^{n+1}(v(n+1)-1)!e^{v(n+1)-1}},$$

поскольку функция $x^N e^{-x}$ достигает наибольшего значения в точке $x = N$. Применяя формулу Стирлинга $k! = \sqrt{2\pi k}(k/e)^k e^{\theta(k)}$, где $1/(12k+1) < \theta(k) < 1/(12k)$ (см., например, [18]), окончательно получаем

$$C \le \left(v - \frac{1}{n+1}\right)^{-1/2}.$$

Аналогичные рассуждения в силу очевидной симметрии имеют место и при оценке величины P_2. Подставляя теперь $(n-N)/(n+1)$ и $(N+1)/(n+1)$ вместо v, получим требуемые неравенства. Лемма 2 доказана.

Из (20) и леммы 2 получаем

$$\mathbf{P}\{A_n \ge y\} \le 2\mathbf{P}\left\{\int\limits_0^{\frac{N+1}{n+1}} \varphi_n(t, S_{n+1}(t))\,dt \ge \frac{y}{2}\right\} + \sqrt{3}\mathbf{P}\left\{\int\limits_{\frac{N+1}{n+1}}^1 \varphi_n(t, -(S_{n+1}(1) - S_{n+1}(t)))\,dt \ge \frac{y}{2}\right\}. \quad (21)$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части (21). Из (3) следует, что $|\varphi_n(t,z)| \le (n+1)(a_{ni} + b_{ni}|z|^m)$ для всех $t \in [i/(n+1), (i+1)/(n+1))$, $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$\int\limits_0^{\frac{N+1}{n+1}} \varphi_n(t, S_{n+1}(t))\,dt \le \sum_{i=1}^N \int\limits_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} |\varphi_n(t, S_{n+1}(t))|\,dt$$
$$\le \sum_{i=1}^N \int\limits_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} (n+1)\{a_{ni} + b_{ni}|S_{n+1}(t)|^m\}\,dt$$
$$= \sum_{i=1}^N a_{ni} + \int\limits_0^1 |S_{n+1}(t)|^m \lambda(dt) = \sum_{i=1}^N a_{ni} + \|S_{n+1}(t)\|_\lambda^m, \quad (22)$$

где $\|\cdot\|_\lambda$ — норма в пространстве $\mathscr{L}_m([0,1], \lambda)$, $\lambda(dt) = q_1(t)\,dt$, $q_1(t) = (n+1)b_{ni}$ при $t \in [i/(n+1), (i+1)/(n+1))$, $i = 1, \dots, N$, и $q_1(t) = 0$ при остальных t.

Аналогично

$$\int\limits_{\frac{N+1}{n+1}}^1 \varphi_n(t, -(S_{n+1}(1) - S_{n+1}(t)))\,dt \le \sum_{i=N+1}^n a_{ni} + \|\widetilde{S}_{n+1}(t)\|_\mu^m, \quad (23)$$

где $\widetilde{S}_{n+1}(t) = S_{n+1}(1) - S_{n+1}(t)$, $\|\cdot\|_\mu$ — норма в пространстве $\mathscr{L}_m([0,1],\mu)$, $\mu(dt) = q_2(t)\,dt$, $q_2(t) = (n+1)b_{ni}$ при $t \in [i/(n+1), (i+1)/(n+1))$, $i = N+1, \dots, n$, и $q_2(t) = 0$ при $t \in [0, (N+1)/(n+1))$. Подставляя (22) и (23) в (21), получим

$$\mathbf{P}\{A_n \geq y\} \leq 2\mathbf{P}\Biggl\{\|S_{n+1}(t)\|_\lambda^m \geq \frac{y}{2} - \sum_{i=1}^{N} a_{ni}\Biggr\} + \sqrt{3}\mathbf{P}\Biggl\{\|\widetilde{S}_{n+1}(t)\|_\mu^m \geq \frac{y}{2} - \sum_{i=N+1}^{n} a_{ni}\Biggr\}.$$

В [8] показано, что если для независимых случайных величин $Y_1, \dots, Y_n$ со значениями в сепарабельном банаховом пространстве справедливы неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\|Y_j\|^k \leq k! B^2 H^{k-2}/2, \quad k = 2, 3, \dots, \tag{24}$$

для некоторых постоянных B и $H > 0$, то

$$\mathbf{P}(\|Y_1 + \dots + Y_n\| - \beta \geq x) \leq \exp\biggl\{-\frac{x^2}{2(B^2 + xH)}\biggr\},$$

где $\beta = \mathbf{E}\|Y_1 + \dots + Y_n\|$. Отсюда

$$\mathbf{P}(\|Y_1 + \dots + Y_n\| \geq x) \leq \exp\biggl\{-\frac{x^2 - 2\beta x}{2(B^2 + xH)}\biggr\}. \tag{25}$$

Заметим, что случайные процессы $S_{n+1}(t)$ и $\widetilde{S}_{n+1}(t)$ можно представить в виде суммы независимых банаховозначных случайных величин:

$$S_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i(t) \quad \text{и} \quad \widetilde{S}_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \eta_i(t),$$

где

$$\xi_i(t) = \frac{\tau_i}{\sqrt{n+1}}\mathbf{I}\biggl\{\frac{i}{n+1} \leq t\biggr\}, \quad \eta_i(t) = \frac{\tau_i}{\sqrt{n+1}}\mathbf{I}\biggl\{\frac{i}{n+1} > t\biggr\}.$$

Отметим также, что

$$\|S_{n+1}(t)\|_\lambda = \Biggl\|\sum_{i=1}^{N} \xi_i(t)\Biggr\|_\lambda, \quad \|\widetilde{S}_{n+1}(t)\|_\mu = \Biggl\|\sum_{i=N+2}^{n+1} \eta_i(t)\Biggr\|_\mu.$$

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось проверить, что случайные величины $\xi_1(t), \dots, \xi_{n+1}(t)$ и $\eta_1(t), \dots, \eta_{n+1}(t)$ удовлетворяют условию (24). По определению нормы в пространстве $\mathscr{L}_m([0,1],\lambda)$ имеем

$$\|\xi_i(t)\|_\lambda^m = \int_0^1 |\xi_i(t)|^m\,\lambda(dt) = \int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{N+1}{n+1}} \frac{|\tau_i|^m}{(n+1)^{m/2}} q_1(t)\,dt$$

$$= \sum_{j=i}^{N} \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} \frac{|\tau_i|^m}{(n+1)^{m/2}} (n+1) b_{nj}\,dt = \frac{|\tau_i|^m}{(n+1)^{m/2}} \sum_{j=i}^{N} b_{nj}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Отсюда

$$\mathbf{E}\|\xi_i(t)\|_\lambda^k \le k!\frac{\left(\sum\limits_{j=i}^{N} b_{nj}\right)^{k/m}}{(n+1)^{k/2}}, \quad k=2,3,\ldots, \quad i=1,\ldots,N.$$

Нетрудно проверить, что

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{E}\|\xi_i(t)\|_\lambda^k \le k!B^2H^{k-2}/2, \quad k=2,3,\ldots,$$

где

$$B^2=\frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} b_{nj}\right)^{2/m}, \quad H=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ni}\right)^{1/m}.$$

Оценим теперь $\mathbf{E}\|S_{n+1}(t)\|_\lambda$. Пусть $m\ge 2$. Тогда

$$\|S_{n+1}(t)\|_\lambda^2=\left(\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{N+1}{n+1}}\left|\sum_{j=1}^{N}\xi_j(t)\right|^m\lambda(dt)\right)^{2/m}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}}\left|\sum_{j=1}^{i}\frac{\tau_j}{\sqrt{n+1}}\right|^m(n+1)b_{ni}\,dt\right)^{2/m}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{N}b_{ni}\left|\sum_{j=1}^{i}\frac{\tau_j}{\sqrt{n+1}}\right|^m\right)^{2/m}=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{N}b_{ni}\left|\sum_{j=1}^{i}\tau_j\right|^m\right)^{2/m}.$$

Отсюда

$$\mathbf{E}\|S_{n+1}(t)\|_\lambda \le \left(\mathbf{E}\|S_{n+1}(t)\|_\lambda^2\right)^{1/2}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sum_{i=1}^{N}b_{ni}\mathbf{E}\left|\sum_{j=1}^{i}\tau_j\right|^m\right)^{1/m}. \tag{26}$$

Из неравенства (10) при $c=1+m/2$ следует, что

$$\mathbf{E}\left|\sum_{j=1}^{i}\tau_j\right|^m\le C_1(m)\left(\sum_{j=1}^{i}\mathbf{E}|\tau_j|^m+\left(\sum_{j=1}^{i}\mathbf{E}\tau_j^2\right)^{m/2}\right), \tag{27}$$

где $C_1(m)=\max\{(1+m/2)^m;2(1+m/2)^{m/2}e^{1+m/2}\}$. Так как $\mathbf{E}\tau_j^2=1$ и $\mathbf{E}|\tau_j|^m\le\Gamma(m+1)$, из (27) получаем

$$\mathbf{E}\left|\sum_{j=1}^{i}\tau_j\right|^m\le C_1(m)(1+\Gamma(m+1))i^{m/2}. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (26), имеем

$$\mathbf{E}\|S_{n+1}(t)\|_\lambda\le\frac{C_1^{1/m}(m)(1+\Gamma(m+1))^{1/m}}{\sqrt{n+1}}\left(\sum_{i=1}^{N}i^{m/2}b_{ni}\right)^{1/m}\equiv\beta_1.$$

Пусть теперь $1 \le m < 2$. Применяя дважды неравенство Гёльдера, получаем

$$\mathbf{E}\|S_{n+1}(t)\|_\lambda \le \left(\mathbf{E}\|S_{n+1}(t)\|_\lambda^m\right)^{1/m} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sum_{i=1}^N b_{ni}\mathbf{E}\left|\sum_{j=1}^i \tau_j\right|^m\right)^{1/m}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sum_{i=1}^N b_{ni}\left(\mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^i \tau_j\right)^2\right)^{m/2}\right)^{1/m} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^N i^{m/2} b_{ni}\right)^{1/m} \equiv \beta_1.$$

Аналогично

$$\|\eta_i(t)\|_\mu = \frac{|\tau_i|}{\sqrt{n+1}}\left(\sum_{j=N+1}^{i-1} b_{nj}\right)^{1/m}, \quad i = N+2, \dots, n+1,$$

$$\sum_{i=N+2}^{n+1} \mathbf{E}\|\eta_i(t)\|_\mu^k \le k! B^2 H^{k-2}/2, \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$\mathbf{E}\|\widetilde{S}_{n+1}(t)\|_\mu \le \beta_2 = \frac{C(m)}{\sqrt{n+1}}\left(\sum_{i=N+1}^n (i-N)^{m/2} b_{ni}\right)^{1/m}.$$

Заметим, что

$$\max\{\beta_1; \beta_2\} \le \beta = C(m)(n+1)^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^n i^{m/2} b_{ni}\right)^{1/m}.$$

Подставляя теперь B^2, H и β в (25), получим (4). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Из (19) и леммы 2 следуют неравенства

$$\mathbf{E}|A_n|^r \le 2^{r-1}\left(\mathbf{E}\left|\int_0^{\frac{N+1}{n+1}} \varphi_n(t, G_n(t))\,dt\right|^r + \mathbf{E}\left|\int_{\frac{N+1}{n+1}}^1 \varphi_n(t, G_n(t))\,dt\right|^r\right)$$

$$= 2^{r-1}\mathbf{E}\left|\int_0^{\frac{N+1}{n+1}} \varphi_n\bigl(t, S^0_{n+1}(t)\bigr)\,dt\right|^r + 2^{r-1}\mathbf{E}\left|\int_{\frac{N+1}{n+1}}^1 \varphi_n\bigl(t, S^0_{n+1}(t)\bigr)\,dt\right|^r$$

$$\le 2^r\mathbf{E}\left|\int_0^{\frac{N+1}{n+1}} \varphi_n(t, S_{n+1}(t))\,dt\right|^r + 2^{r-1}\sqrt{3}\,\mathbf{E}\left|\int_{\frac{N+1}{n+1}}^1 \varphi_n(t, -\widetilde{S}_{n+1}(t))\,dt\right|^r. \quad (29)$$

Подставляя (22) и (23) в (29), получим

$$\mathbf{E}|A_n|^r \le 4^r\left(\sum_{i=1}^n a_{ni}\right)^r + 4^{r-1}\bigl\{2\mathbf{E}\|S_{n+1}(t)\|_\lambda^{rm} + \sqrt{3}\mathbf{E}\|\widetilde{S}_{n+1}(t)\|_\mu^{rm}\bigr\}.$$

В [19] показано, что для независимых центрированных случайных величин $Y_1, \dots, Y_n$ со значениями в сепарабельном банаховом пространстве

$$\mathbf{E}\bigl|\,\|S_n\| - \mathbf{E}\|S_n\|\,\bigr|^l \le (\widetilde{K}l)^l\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\|Y_i\|^l + \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\|Y_i\|^2\right)^{l/2}\right), \quad l \ge 2, \qquad (30)$$

где $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$, $\widetilde{K}$ — положительная абсолютная постоянная. Положив в (30) $l = rm$, приходим к неравенствам

$$\mathbf{E}|\,\|S_{n+1}(t)\|_\lambda - \mathbf{E}\|S_{n+1}(t)\|_\lambda|^{rm} \\ \le (\widetilde{K}_1 rm)^{rm}\left\{\sum_{i=1}^{N}\mathbf{E}\|\xi_i(t)\|_\lambda^{rm} + \left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{E}\|\xi_i(t)\|_\lambda^2\right)^{\frac{rm}{2}}\right\},$$

$$\mathbf{E}|\,\|\widetilde{S}_{n+1}(t)\|_\mu - \mathbf{E}\|\widetilde{S}_{n+1}(t)\|_\mu|^{rm} \\ \le (\widetilde{K}_2 rm)^{rm}\left\{\sum_{i=N+2}^{n+1}\mathbf{E}\|\eta_i(t)\|_\mu^{rm} + \left(\sum_{i=N+2}^{n+1}\mathbf{E}\|\eta_i(t)\|_\mu^2\right)^{\frac{rm}{2}}\right\}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{E}\|\xi_i(t)\|_\lambda^{rm} \le \frac{\Gamma(rm+1)}{(n+1)^{rm/2}}\left(\sum_{j=i}^{N} b_{nj}\right)^r, \quad \mathbf{E}\|\xi_i(t)\|_\lambda^2 = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=i}^{N} b_{nj}\right)^{2/m},$$

$$\mathbf{E}\|\eta_i(t)\|_\mu^{rm} \le \frac{\Gamma(rm+1)}{(n+1)^{rm/2}}\left(\sum_{j=N+1}^{i-1} b_{nj}\right)^r, \quad \mathbf{E}\|\eta_i(t)\|_\mu^2 = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=N+1}^{i-1} b_{nj}\right)^{2/m}.$$

Осталось воспользоваться простым неравенством (справедливым для любой нормы)

$$\mathbf{E}\|S_{n+1}(t)\|^{rm} \le 2^{rm-1}\mathbf{E}|\,\|S_{n+1}(t)\| - \mathbf{E}\|S_{n+1}(t)\|\,|^{rm} + 2^{rm-1}(\mathbf{E}\|S_{n+1}(t)\|)^{rm}$$

и оценками для $\mathbf{E}\|S_{n+1}(t)\|_\lambda$ и $\mathbf{E}\|\widetilde{S}_{n+1}(t)\|_\mu$, полученными в теореме 1. Теорема 2 доказана.

3.2. Доказательство теорем 3 и 4.

Доказательство предложения. Пп. 1–3 непосредственно следуют из определений. Докажем п. 4. Действительно, если h монотонно не убывает, то

$$\int_{\mathbb{R}} g(t,z)|h'(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{z} F(t)h'(t)\,dt + \int_{z}^{\infty}(1-F(t))h'(t)\,dt \\ = h(z)(2F(z)-1) - \int_{-\infty}^{z} h(t)\,dF(t) + \int_{z}^{\infty} h(t)\,dF(t) \\ \le |h(z)| + \int_{\mathbb{R}} |h(t)|\,dF(t) = |h(z)| + \mathbf{E}|h(X_1)|,$$

и, очевидно, эта же оценка справедлива, если h монотонно не возрастает. Следовательно, $\alpha_k \le 2^{k-1}(\mathbf{E}|h(X_1)|^k + (\mathbf{E}|h(X_1)|)^k) \le 2^k\mathbf{E}|h(X_1)|^k$.

По условию п. 5 конечность H_F эквивалентна конечности $\widetilde{H}_F$. Положим $P(t) = \mathbf{P}\{|X_1| \ge t\}$, $t > 0$. Нетрудно видеть, что сходимость интеграла

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{F(t)(1-F(t))}\,dt$$

эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty \sqrt{P(t)}\,dt$. Стало быть, $P(t)=o(t^{-2})$ при $t\to\infty$ (см. замечание перед теоремой 3), что влечет за собой выполнение условия $\mathbf{E}|X_1|^2(\ln^+|X_1|)^{-1-\varepsilon}<\infty$.

Докажем п. 6. Так как $|h'(t)|\le\delta|t|^\beta$, для любого $t_0>0$ имеем

$$
\begin{aligned}
H_F &\le \delta\int\limits_{\mathbb{R}}|t|^\beta\sqrt{F(t)(1-F(t))}\,dt \le \delta\int\limits_{-\infty}^{0}|t|^\beta\sqrt{F(t)}\,dt+\delta\int\limits_0^\infty t^\beta\sqrt{1-F(t)}\,dt\\
&=\delta\int\limits_0^\infty t^\beta\left(\sqrt{1-F(t)}+\sqrt{F(-t)}\right)dt\le\delta\sqrt{2}\int\limits_0^\infty t^\beta\sqrt{1-F(t)+F(-t)}\,dt\\
&\le\frac{\delta\sqrt{2}}{\beta+1}t_0^{\beta+1}+\delta\sqrt{2}\int\limits_{t_0}^\infty t^\beta\sqrt{P(t)}\,dt.
\end{aligned}
$$

Далее, для всех $t\ge t_0$ в силу неравенства Чебышева

$$
P(t)\le\frac{\mathbf{E}|X_1|^{2(\beta+1)}(\ln^+|X_1|)^{2+\varepsilon}}{t^{2(\beta+1)}(\ln t)^{2+\varepsilon}}.
$$

Отсюда

$$
H_F\le c_1+c_2\int\limits_{t_0}^\infty\frac{dt}{t(\ln t)^{1+\varepsilon/2}}<\infty,
$$

где c_1, c_2 — некоторые положительные постоянные. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 3. Обозначим

$$
S_n(t)=\sum_{i=1}^n\xi_i(t),\quad \xi_i(t)=F(t)-\mathbf{I}\{X_i<t\}.
$$

Очевидно, $\mathbf{E}\xi_i(t)=0$, $\mathbf{E}\xi_i^2(t)=F(t)(1-F(t))$. Так как

$$
\phi_n(F(t))-\phi_n(F_n(t))\le nc_n|F(t)-F_n(t)|=c_n|S_n(t)|, \tag{31}
$$

подставляя (31) в (13), получаем

$$
L_n+\gamma_n\le c_n\int\limits_{\mathbb{R}}|S_n(t)||h'(t)|\,dt=c_n\|S_n\|, \tag{32}
$$

где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $\mathscr{L}_1(\mathbb{R},\mu)$, $\mu(dt)=|h'(t)|\,dt$.

По определению нормы в пространстве $\mathscr{L}_1(\mathbb{R},\mu)$ имеем

$$
\|\xi_i\|=\int\limits_{\mathbb{R}}|F(t)-\mathbf{I}\{X_i<t\}|\,|h'(t)|\,dt=\int\limits_{\mathbb{R}}g(t,X_i)|h'(t)|\,dt.
$$

Отсюда

$$
\mathbf{E}\|\xi_i\|^k=\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}g(t,z)|h'(t)|\,dt\right)^k dF(z)\equiv\alpha_k.
$$

Оценим теперь $\mathbf{E}\|S_n\|$. Имеем

$$\mathbf{E}\|S_n\| = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbf{E}|S_n(t)|\,|h'(t)|\,dt \le \int\limits_{\mathbb{R}} \big(\mathbf{E}S_n^2(t)\big)^{1/2}|h'(t)|\,dt$$
$$= \sqrt{n}\int\limits_{\mathbb{R}} (F(t)(1-F(t)))^{1/2}|h'(t)|\,dt \equiv H_F\sqrt{n}.$$

В [20] показано, что если для независимых случайных величин $Y_1,\dots,Y_n$ со значениями в сепарабельном банаховом пространстве выполнены условия

$$\mathbf{P}\{\|Y_1+\dots+Y_n\| \ge u_0\} \le \frac{1}{24} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\|Y_i\|^t/u_0^t \le \frac{1}{36}, \tag{33}$$

то для всех $u > u_0$

$$\mathbf{P}\{\|Y_1+\dots+Y_n\| \ge u\} \le \exp\left\{-\frac{\ln 3}{2}\left(\frac{u-u_o}{2u_0}\right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}\right\} + 6^{t+2}\frac{\sum\limits_{i=1}^n \mathbf{E}\|Y_i\|^t}{2(u-u_o)^t}. \tag{34}$$

Там же отмечено, что если первое из условий (33) выполнено, а второе — нет, то для $u_0' = \Big(36\sum\limits_{i=1}^n \mathbf{E}\|Y_i\|^t\Big)^{1/t}$ будут выполнены оба условия (33). Из (32) и (34) получаем (14).

Пусть теперь $\alpha_k \le k!B^2H^{k-2}/2$, $k = 2,3,\dots$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\|\xi_i\|^k = n\alpha_k \le k!(nB^2)\frac{H^{k-2}}{2}$$

и из (25) следует (15).

Пусть $|X_1| \le b$ п. н. Тогда

$$\|\xi_i\| = \int\limits_{-b}^{X_i} F(t)|h'(t)|\,dt + \int\limits_{X_i}^{b} (1-F(t))|h'(t)|\,dt \le \int\limits_{-b}^{b} |h'(t)|\,dt \equiv H_0.$$

Из неравенства (1.2) [21] получаем (16). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Из (30) и (32) имеем

$$\mathbf{E}|L_n+\gamma_n|^k \le c_n^k\mathbf{E}\|S_n\|^k \le 2^{k-1}c_n^k\{(\mathbf{E}\|S_n\|)^k + \mathbf{E}|\,\|S_n\| - \mathbf{E}\|S_n\|\,|^k\}$$
$$\le 2^{k-1}c_n^k(\mathbf{E}\|S_n\|)^k + 2^{k-1}c_n^k(C_0k)^k\left\{\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\|\xi_i\|^k + \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\|\xi_i\|^2\right)^{k/2}\right\}$$
$$\le 2^{k-1}c_n^k\big(H_F^k n^{k/2} + (C_0k)^k\big(n\alpha_k + n^{k/2}\alpha_2^{k/2}\big)\big) \le 2^{k-1}c_n^k\big(H_F^k + (Ck)^k\alpha_k\big)n^{k/2},$$

где C_0 и C — абсолютные положительные постоянные. Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зитикис Р.* О гладкости функции распределения $\mathscr{F}\mathscr{L}$-статистики. I // Литов. мат. сб. 1990. Т. 30, № 2. С. 233–246.
2. *Зитикис Р.* О гладкости функции распределения $\mathscr{F}\mathscr{L}$-статистики. II // Литов. мат. сб. 1990. Т. 30, № 3. С. 499–512.

3. *Borisov I. S.* Bounds for characteristic functions of additive functionals of order statistics // Siberian Adv. Math. 1995. V. 5, N 4. P. 1–15.
4. *Алешкявичене А. К.* О больших уклонениях для линейных комбинаций порядковых статистик // Литов. мат. сб. 1989. Т. 29, № 2. С. 212–222.
5. *Борисов И. С., Бакланов Е. А.* Моментные неравенства для обобщенных L-статистик // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 38, № 3. С. 483–489.
6. *Serfling R. J.* Generalized L-, M-, and R-statistics // Ann. Probab. 1984. V. 12, N 1. P. 76–86.
7. *Борисов И. С.* О скорости сходимости в «условном» принципе инвариантности // Теория вероятностей и ее применения. 1978. Т. 23, № 1. С. 67–79.
8. *Пинелис И. Ф., Саханенко А. И.* Замечания о неравенствах для вероятностей больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. 1985. Т. 30, № 1. С. 127–131.
9. *Нагаев С. В., Пинелис И. Ф.* Некоторые неравенства для распределений сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, № 2. С. 254–263.
10. *Chernoff H., Gastwirth J. L., Johns M. V. Jr.* Asymptotic distribution of linear combinations of order statistics, with applications to estimation // Ann. Math. Statist. 1967. V. 38. P. 52–72.
11. *Helmers R.* A Berry — Esseen theorem for linear combinations of order statistics // Ann. Probab. 1981. V. 9, N 2. P. 342–347.
12. *Mason D. M., Shorack G. R.* Necessary and sufficient conditions for asymptotic normality of L-statistics // Ann. Probab. 1992. V. 20, N 4. P. 1779–1803.
13. *Norvaiša R., Zitikis R.* Asymptotic behaviour of linear combinations of functions of order statistics // J. Statist. Planning and Inference. 1991. V. 28. P. 305–317.
14. *Stigler S. M.* Linear functions of order statistics with smooth weight functions // Ann. Statist. 1974. V. 2, N 4. P. 676–693.
15. *Алешкявичене А. К.* Большие и умеренные уклонения для L-статистик // Литов. мат. сб. 1991. Т. 31, № 2. С. 227—241.
16. *Vandemaele M., Veraverbeke N.* Cramér type large deviations for linear combinations of order statistics // Ann. Probab. 1982. V. 10, N 2. P. 423–434.
17. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
18. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 1.
19. *Пинелис И. Ф.* Оценки моментов бесконечномерных мартингалов // Мат. заметки. 1980. Т. 27, № 6. С. 953–958.
20. *Нагаев С. В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве // Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы. Новосибирск: Наука, 1982. С. 159–167. (Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние; Т. 1).
21. *Пинелис И. Ф.* Неравенства для распределений сумм независимых случайных векторов и их применение к оцениванию плотности // Теория вероятностей и ее применения. 1990. Т. 35, № 3. С. 592–594.

Статья поступила 18 сентября 2000 г.

Борисов Игорь Семенович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
sibam@math.nsc.ru

Бакланов Евгений Анатольевич
Новосибирский гос. университет, Новосибирск 630090