Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2001. Том 42, № 2

УДК 517.925.51

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева

Аннотация: Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами $\frac{dy}{dt} = A(t)y$, $t \geq 0$, где $A(t)$ — матрица размера $N \times N$ с непрерывными T-периодическими элементами. С использованием дифференциального уравнения Ляпунова формулируется критерий асимптотической устойчивости решений системы. Устанавливается равномерная оценка для матрицанта системы, которая позволяет указать скорость убывания решений при $t \to +\infty$, исследуется влияние периодических возмущений. Библиогр. 12.

В работе рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad t \geq 0, \tag{0.1}$$

где $A(t)$ — матрица размера $N \times N$ с непрерывными T-периодическими элементами, т. е.

$$A(t+T) = A(t).$$

Мы изучаем дифференциальное уравнение Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C, \tag{0.2}$$

с использованием которого формулируем критерий асимптотической устойчивости решений системы (0.1), получаем равномерную оценку для матрицанта системы, позволяющую указать скорость убывания решений при $t \to +\infty$, исследуем влияние периодических возмущений.

1. Дифференциальное уравнение Ляпунова

Согласно критерию Ляпунова асимптотическая устойчивость нулевого решения системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = Ay \tag{1.1}$$

эквивалентна существованию решения $H = H^* > 0$ матричного уравнения

$$HA + A^*H = -C, \quad C = C^* > 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00533) и Министерства образования Российской Федерации.

Напомним, что если матрица $H = H^* > 0$ является решением этого уравнения, то функция $h(y) = \langle Hy, y\rangle$ будет функцией Ляпунова для системы (1.1).

Из теорем К. П. Персидского и И. Г. Малкина (см., например, [1]) вытекает, что при построении функции Ляпунова для системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (0.1), у которой верхний генеральный показатель отрицателен, можно использовать положительно определенные решения $H(t)$ дифференциального матричного уравнения Ляпунова (0.2).

Отметим, что матричные дифференциальные уравнения вида (0.2) и более общие рассматривались во многих работах (см., например, [2–7]).

Используя уравнение (0.2), сформулируем критерий асимптотической устойчивости нулевого решения системы (0.1) с периодической матрицей $A(t)$, являющийся аналогом критерия Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Напомним, что нулевое решение системы (0.1) с периодическими коэффициентами асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы монодромии лежат в единичном круге $\{|\lambda| < 1\}$ (см., например, [2]).

Теорема 1. *Пусть $A(t)$ — непрерывная T-периодическая матрица.*

I. *Если все собственные значения матрицы монодромии системы (0.1) лежат в единичном круге $\{|\lambda| < 1\}$, то для любой матрицы C существует единственное решение $H(t)$ краевой задачи*

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C, \quad 0 < t < T, \\ H(0) = H(T),\end{gathered} \tag{1.2}$$

при этом если $C = C^* > 0$, то

$$H(t) = H^*(t) > 0, \quad t \in [0, T].$$

II. *Если при $C = C^* > 0$ краевая задача* (1.2) *имеет эрмитово решение $H(t)$ такое, что $H(0) > 0$, то все собственные значения матрицы монодромии системы* (0.1) *лежат в единичном круге $\{|\lambda| < 1\}$.*

Доказательство. I. Вначале выпишем общее решение дифференциального уравнения Ляпунова (0.2). Пусть $H(t)$ — решение матричного уравнения (0.2), $Y(t)$ — матрицант системы (0.1). Тогда имеем тождества

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) \equiv -C, \tag{1.3}$$

$$\frac{d}{dt}Y(t) \equiv A(t)Y(t), \quad Y(0) = I, \tag{1.4}$$

$$\frac{d}{dt}Y^*(t) \equiv Y^*(t)A^*(t). \tag{1.5}$$

Умножая слева обе части тождества (1.3) на $Y^*(t)$ и учитывая (1.5), получим

$$\frac{d}{dt}(Y^*(t)H(t)) + Y^*(t)H(t)A(t) \equiv -Y^*(t)C.$$

Умножая это тождество справа на $Y(t)$ и принимая во внимание (1.4), будем иметь

$$\frac{d}{dt}(Y^*(t)H(t)Y(t)) \equiv -Y^*(t)CY(t).$$

Отсюда

$$Y^*(t)H(t)Y(t) \equiv H(0) - \int\limits_0^t Y^*(s)CY(s)\,ds.$$

Следовательно, любое решение дифференциального уравнения Ляпунова (0.2) можно записать в виде

$$H(t) = (Y^{-1}(t))^* H(0) Y^{-1}(t) - (Y^{-1}(t))^* \int\limits_0^t Y^*(s)CY(s)\,ds\,Y^{-1}(t). \tag{1.6}$$

Выясним, при каких начальных значениях $H(0)$ матрица (1.6) будет удовлетворять граничному условию $H(0) = H(T)$. Очевидно, матрица $H(0)$ должна удовлетворять уравнению

$$H(0) = (Y^{-1}(T))^* H(0) Y^{-1}(T) - (Y^{-1}(T))^* \int\limits_0^T Y^*(s)CY(s)\,ds Y^{-1}(T)$$

или

$$H(0) - Y^*(T)H(0)Y(T) = \int\limits_0^T Y^*(s)CY(s)\,ds. \tag{1.7}$$

Это дискретное уравнение Ляпунова. По условию собственные значения матрицы монодромии $Y(T)$ лежат в единичном круге, значит, это уравнение однозначно разрешимо, при этом решение представимо в виде ряда

$$H(0) = \int\limits_0^T Y^*(s)CY(s)\,ds + Y^*(T) \int\limits_0^T Y^*(s)CY(s)\,ds Y(T) \\ + (Y^*(T))^2 \int\limits_0^T Y^*(s)CY(s)\,ds (Y(T))^2 + \dots$$

(см., например, [2]). Поскольку $Y(s+mT) = Y(s)Y^m(T)$, этот ряд можно переписать в виде

$$H(0) = \int\limits_0^T Y^*(s)CY(s)\,ds + \int\limits_T^{2T} Y^*(s)CY(s)\,ds \\ + \int\limits_{2T}^{3T} Y^*(s)CY(s)\,ds + \dots = \int\limits_0^\infty Y^*(s)CY(s)\,ds.$$

Следовательно, если $H(t)$ — решение краевой задачи (1.2), то $H(0)$ определяется единственным образом:

$$H(0) = \int\limits_0^\infty Y^*(s)CY(s)\,ds.$$

Тогда

$$H(t) = (Y^{-1}(t))^* \int\limits_t^\infty Y^*(s)CY(s)\,ds Y^{-1}(t). \tag{1.8}$$

Нетрудно проверить, что эта матрица действительно является решением задачи (1.2).

Матрица (1.8) положительно определена при всех $t \in [0,T]$, если $C = C^* > 0$. Действительно, для любого вектора $v \in E_N$ имеем

$$\langle H(t)v, v\rangle = \int_t^\infty \langle CY(s)Y^{-1}(t)v, Y(s)Y^{-1}(t)v\rangle\, ds \geq \sigma_1(C) \int_t^\infty \|Y(s)Y^{-1}(t)v\|^2\, ds,$$

где $\sigma_1(C) > 0$. Поскольку $Y(t)$ — матрицант системы (0.1), то

$$m = \min_{t\in[0,T],\, \|v\|=1} \int_t^\infty \|Y(s)Y^{-1}(t)v\|^2\, ds > 0.$$

Следовательно, $H(t) > 0$ при $t \in [0,T]$.

II. Докажем вторую часть теоремы. Поскольку $H(t)$ — решение дифференциального уравнения Ляпунова (0.2), его можно записать в виде (1.6). Тогда в силу краевого условия задачи (1.2) имеем

$$H(0) = (Y^{-1}(T))^* H(0) Y^{-1}(T) - (Y^{-1}(T))^* \int_0^T Y^*(s)CY(s)\, ds Y^{-1}(T).$$

Тем самым положительно определенная матрица $H(0)$ является решением дискретного уравнения Ляпунова (1.7) с положительно определенной правой частью $\int_0^T Y^*(s)CY(s)\, ds$. Тогда спектр матрицы монодромии $Y(T)$ должен лежать внутри единичного круга $\{|\lambda| < 1\}$ (см., например, [2]).

Теорема доказана.

Замечание. Если $A(t)$ — постоянная матрица, то матрица $H(t)$, определяемая формулой (1.8), не зависит от t и совпадает с интегралом Ляпунова

$$H = \int_0^\infty e^{tA^*} C e^{tA} dt.$$

Приведем обобщение теоремы 1 на случай переменной матрицы $C(t)$ в правой части дифференциального уравнения Ляпунова (0.2).

Теорема 2. *Пусть $A(t)$ — непрерывная T-периодическая матрица.*

I. *Если все собственные значения матрицы монодромии системы* (0.1) *лежат в единичном круге $\{|\lambda| < 1\}$, то для любой непрерывной на $[0,T]$ матрицы $C(t)$ существует единственное решение $H(t)$ краевой задачи*

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C(t), \quad 0 < t < T, \\ H(0) = H(T), \end{gathered} \tag{1.9}$$

при этом если

$$C(t) = C^*(t) > 0, \quad t \in [0,T], \tag{1.10}$$

то

$$H(t) = H^*(t) > 0, \quad t \in [0,T].$$

II. *Пусть правая часть* $C(t)$ *непрерывна на* $[0,T]$ *и удовлетворяет условиям* (1.10). *Если краевая задача* (1.9) *имеет эрмитово решение* $H(t)$ *такое, что* $H(0)>0$, *то все собственные значения матрицы монодромии системы* (0.1) *лежат в единичном круге* $\{|\lambda|<1\}$.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1. Поэтому мы отметим лишь существенные отличия.

I. Как и в случае постоянной правой части, любое решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}H(t)+H(t)A(t)+A^*(t)H(t)=-C(t)$$

можно записать в виде

$$H(t)=(Y^{-1}(t))^*H(0)Y^{-1}(t)-(Y^{-1}(t))^*\int\limits_0^t Y^*(s)C(s)Y(s)\,ds\,Y^{-1}(t). \tag{1.11}$$

Следовательно, матрица $H(t)$ является решением краевой задачи (1.9), если матрица $H(0)$ будет решением дискретного уравнения Ляпунова

$$H(0)-Y^*(T)H(0)Y(T)=\int\limits_0^T Y^*(s)C(s)Y(s)\,ds. \tag{1.12}$$

Поскольку это уравнение однозначно разрешимо, то существует единственное решение задачи (1.9), при этом

$$\begin{aligned}H(t)&=(Y^{-1}(t))^*\int\limits_t^T Y^*(s)C(s)Y(s)\,ds\,Y^{-1}(t)\\&+(Y^{-1}(t))^*Y^*(T)\int\limits_0^T Y^*(s)C(s)Y(s)\,ds\,Y(T)Y^{-1}(t)\\&+(Y^{-1}(t))^*(Y^*(T))^2\int\limits_0^T Y^*(s)C(s)Y(s)\,ds\,(Y(T))^2Y^{-1}(t)+\dots.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Как и для матричного интеграла (1.8), можно показать, что согласно условию (1.10) матричный ряд (1.13) является положительно определенным равномерно на $[0,T]$.

II. Из явного выражения (1.11) для решения $H(t)$ вытекает, что $H(0)$ — решение уравнения (1.12) при положительно определенной правой части. Поскольку $H(0)=H^*(0)>0$, спектр матрицы $Y(T)$ принадлежит единичному кругу $\{|\lambda|<1\}$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть все собственные значения матрицы монодромии системы* (0.1) *лежат в единичном круге. Если непрерывная матрица* $C(t)$ *является* T*-периодической, то дифференциальное уравнение Ляпунова имеет единственное* T*-периодическое решение*

$$H(t)=(Y^{-1}(t))^*\int\limits_t^\infty Y^*(s)C(s)Y(s)\,ds\,Y^{-1}(t), \tag{1.14}$$

при этом если матрица $C(t)$ *удовлетворяет условию* (1.10), *то* $H(t) = H^*(t) > 0$, $t \in [0, T]$.

Доказательство. Из предыдущих рассуждений вытекает, что существует единственное решение $H(t)$, удовлетворяющее условию $H(0) = H(T)$, и его можно записать в виде (1.13). Учитывая условие $C(t) = C(t + T)$, а также свойство $Y(t + T) = Y(t)Y(T)$, формулу (1.13) можно переписать в виде (1.14). Очевидно, эта матрица является T-периодической.

Из доказанных теорем вытекает, что исследование асимптотической устойчивости решений системы (0.1) можно свести к изучению разрешимости краевых задач (1.2) или (1.9). Как будет следовать из результатов § 3, нетрудно установить непрерывную зависимость решений этих задач относительно линейных возмущений, что является важным при использовании полученного критерия для проведения численных расчетов.

В качестве приложения установленного критерия исследуем асимптотическую устойчивость нулевого решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt} = [B_0 + B_1(\omega t)]y, \quad t \geq 0, \tag{1.15}$$

где B_0 — постоянная матрица, спектр которой лежит в левой полуплоскости, $B_1(t)$ — T-периодическая матрица, $\omega > 0$ — числовой параметр. Будем предполагать, что выполнено условие

$$\int\limits_0^T B_1(t)\, dt = 0. \tag{1.16}$$

Как следует из [2, с. 291], существует число $\omega_0 > 0$ такое, что при всех $\omega \geq \omega_0$ нулевое решение системы (1.15) будет асимптотически устойчивым. Отметим, что в работе [8] этот результат доказан с помощью построения функции Ляпунова. Покажем, как можно установить этот результат, используя теорему 2.

Вначале, сделав замену $\tau = \omega t$, $\tilde{y}(\tau) = y(\omega t)$, перепишем систему (1.15) в виде

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tau} = \frac{1}{\omega}[B_0 + B_1(\tau)]\tilde{y}, \quad \tau \geq 0. \tag{1.17}$$

Матрица

$$A(\tau) = B_0 + B_1(\tau)$$

является T-периодической. Рассмотрим матрицу

$$H(\tau, \omega) = \omega H_0 - H_1(\tau),$$

где

$$H_0 = \int\limits_0^\infty e^{sB_0^*} e^{sB_0}\, ds, \quad H_1(\tau) = H_0 \int\limits_0^\tau B_1(s)\, ds + \int\limits_0^\tau B_1^*(s)\, ds H_0.$$

В силу условия (1.16)

$$H(\tau + T, \omega) = H(\tau, \omega), \quad \tau \geq 0,$$

при этом $H(\tau, \omega) = H^*(\tau, \omega)$ и существует $\omega_1 > 0$ такое, что при $\omega \geq \omega_1$

$$H(\tau, \omega) \geq h_0 I, \quad h_0 > 0, \quad \tau \geq 0.$$

Поскольку

$$\frac{d}{d\tau}H_1(\tau) = H_0B_1(\tau) + B_1^*(\tau)H_0,$$

$$H(\tau,\omega)A(\tau) + A^*(\tau)H(\tau,\omega) = \omega[H_0B_0 + B_0^*H_0] \\ + \omega[H_0B_1(\tau) + B_1^*(\tau)H_0] - [H_1(\tau)A(\tau) + A^*(\tau)H_1(\tau)],$$

$$H_0B_0 + B_0^*H_0 = -I,$$

матрица $H(\tau,\omega)$ является решением краевой задачи вида (1.9):

$$\frac{d}{d\tau}H + \frac{1}{\omega}HA(\tau) + \frac{1}{\omega}A^*(\tau)H = -C(\tau,\omega), \quad 0 < \tau < T,$$
$$H|_{\tau=0} = H|_{\tau=T},$$

где

$$C(\tau,\omega) = I + \frac{1}{\omega}[H_1(\tau)A(\tau) + A^*(\tau)H_1(\tau)].$$

Ясно, что существует $\omega_2 > 0$ такое, что при $\omega \geq \omega_2$

$$C(\tau,\omega) > c_0I, \quad c_0 > 0, \quad \tau \in [0,T].$$

Отсюда в силу теоремы 2 при любом $\omega \geq \max\{\omega_1,\omega_2\}$ нулевое решение системы (1.17), а следовательно, и (1.15) асимптотически устойчиво.

2. Оценки решений периодических систем

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений (0.1):

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad t \geq 0,$$

где $A(t)$ — матрица размера $N \times N$ с непрерывными T-периодическими элементами. Предположим, что все собственные числа матрицы монодромии системы принадлежат единичному кругу $\{|\lambda| < 1\}$.

Обозначим через $Y(t)$ матрицант системы (0.1). Введем два семейства эрмитовых матриц $H(t)$, $h(t)$, $t \geq 0$:

$$H(t) = (Y^{-1}(t))^* \int_t^\infty Y^*(s)Y(s)\,dsY^{-1}(t), \quad h(t) = \int_t^\infty Y^*(s)Y(s)\,ds.$$

Согласно следствию из теоремы 2 матрица $H(t)$ является единственным T-периодическим решением дифференциального уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -I,$$

при этом $H(t) > 0$, $t \in [0,T]$.

Теорема 3. *Для любого вектора $v \in E_N$ имеет место оценка*

$$\langle h(t)v,v\rangle \leq \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right)\langle h(0)v,v\rangle. \tag{2.1}$$

Доказательство. Вначале докажем следующее неравенство:

$$\langle h(t)v,v\rangle \leq \|H(t)\|\,\|Y(t)v\|^2. \tag{2.2}$$

Действительно, из определений $h(t)$ и $H(t)$ следует, что

$$\langle h(t)v, v\rangle = \left\langle \left[\int_t^\infty Y^*(s)Y(s)\,ds\right] v, v \right\rangle = \langle H(t)Y(t)v, Y(t)v\rangle \le \|H(t)\|\|Y(t)v\|^2.$$

Из определения матрицы $h(t)$ для любого вектора $v \in E_N$ имеем тождество

$$\langle h(t)v, v\rangle \equiv \int_t^\infty \|Y(s)v\|^2\,ds. \tag{2.3}$$

Дифференцируя по t, получим

$$\frac{d}{dt}\langle h(t)v, v\rangle + \|Y(t)v\|^2 \equiv 0.$$

Учитывая оценку (2.2), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\langle h(t)v, v\rangle + \frac{1}{\|H(t)\|}\langle h(t)v, v\rangle \le 0$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left(\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right)\langle h(t)v, v\rangle\right) \le 0.$$

Отсюда вытекает (2.1).

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $\gamma_1(t)$ — минимальное собственное число матрицы $H(t)$. Тогда для нормы матрицанта $Y(t)$ имеет место оценка*

$$\|Y(t)\|^2 \le \frac{\|H(0)\|}{\gamma_1(t)} \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right), \quad t \ge 0. \tag{2.4}$$

Доказательство. Поскольку $H(t) > 0$ при $t \in [0, T]$ и $H(t+T) \equiv H(t)$, то $\gamma_1(t) \ge \gamma > 0$ при $t \ge 0$. Учитывая, что $h(t) = Y^*(t)H(t)Y(t)$, неравенство (2.1) можно переписать в следующем виде:

$$\langle H(t)Y(t)v, Y(t)v\rangle \le \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right)\langle H(0)v, v\rangle.$$

Тогда

$$\gamma_1(t)\|Y(t)v\|^2 \le \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right)\|H(0)\|\,\|v\|^2.$$

Отсюда приходим к оценке (2.4).

Теорема доказана.

Следствие. *Для собственных значений λ_j матрицы монодромии $Y(T)$ имеют место оценки*

$$|\lambda_j| \le \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^T \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right), \qquad j = 1,\dots,N. \tag{2.5}$$

Доказательство. Обозначим через v_j собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_j матрицы монодромии $Y(T)$. Тогда

$$\|Y(kT)v_j\|^2 = \|Y^k(T)v_j\| = |\lambda_j|^{2k}\|v_j\|^2.$$

С другой стороны, согласно неравенству (2.4)

$$\|Y(kT)v_j\|^2 \le \frac{\|H(0)\|}{\gamma_1(t)}\exp\left(-\int\limits_0^{kT}\frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right)\|v_j\|^2.$$

Поскольку матрица $H(t)$ является T-периодической, то

$$\|Y(kT)v_j\|^2 \le \frac{\|H(0)\|}{\gamma_1(t)}\exp\left(-k\int\limits_0^{T}\frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right)\|v_j\|^2.$$

Следовательно,

$$|\lambda_j|^{2k} \le \frac{\|H(0)\|}{\gamma_1(t)}\exp\left(-k\int\limits_0^{T}\frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right)$$

или

$$|\lambda_j| \le \left(\frac{\|H(0)\|}{\gamma_1(t)}\right)^{\frac{1}{2k}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{T}\frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right).$$

Устремляя k к бесконечности, получаем требуемую оценку (2.5).

Приведем менее точное, но более простое неравенство для нормы матриципанта, чем неравенство (2.4).

Теорема 5. *Для нормы матриципанта $Y(t)$ справедлива оценка*

$$\|Y(t)\|^2 \le 2a\|H(0)\|\exp\left(-\int\limits_0^{t}\frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right), \quad t \ge 0, \tag{2.6}$$

где $a = \max\limits_{s\in[0,T]}\|A(s)\|$.

Доказательство. Поскольку $h(0) = H(0)$, в силу (2.3) неравенство (2.1) можно переписать в следующем виде:

$$\int\limits_t^{\infty}\|Y(s)v\|^2\,ds \le \exp\left(-\int\limits_0^{t}\frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right)\langle H(0)v, v\rangle.$$

Отсюда для любого вектора $v \in E_N$, $\|v\| = 1$, получим

$$\int\limits_t^{\infty}\|Y(s)v\|^2\,ds \le \exp\left(-\int\limits_0^{t}\frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right)\|H(0)\|. \tag{2.7}$$

Лемма. *Имеет место неравенство*

$$\|Y(t)Y^{-1}(s)\| \le e^{(s-t)a}, \quad s \ge t.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$X(s,t) = Y(t)Y^{-1}(s).$$

Поскольку $Y(s)$ — фундаментальная матрица решений системы

$$\frac{d}{ds}Y = A(s)Y,$$

для матрицы $Y^{-1}(s)$ имеет место тождество

$$\frac{d}{ds}Y^{-1}(s) \equiv Y^{-1}(s)A(s).$$

Следовательно, при любом фиксированном t матрица $X(s,t)$ является решением задачи Коши

$$\frac{d}{ds}X = -XA(s), \quad X|_{s=t} = I.$$

Значит, имеем тождество

$$X(s,t) \equiv I - \int_t^s X(\xi,t)A(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда

$$\|X(s,t)\| \le 1 + \int_t^s \|A(\xi)\|\,\|X(\xi,t)\|\,d\xi, \quad s \ge t,$$

и в силу неравенства Гронуолла получим

$$\|X(s,t)\| \le \exp\left(\int_t^s \|A(\xi)\|\,d\xi\right), \quad s \ge t.$$

Поэтому

$$\|Y(t)Y^{-1}(s)\| \le \exp\left(\int_t^s \|A(\xi)\|\,d\xi\right) \le e^{(s-t)a}, \quad s \ge t.$$

Лемма доказана.

Используя лемму, очевидно, имеем

$$\|Y(t)v\| \le \|Y(t)Y^{-1}(s)\|\,\|Y(s)v\| \le e^{(s-t)a}\|Y(s)v\|, \quad s \ge t,$$

или

$$e^{(t-s)a}\|Y(t)v\| \le \|Y(s)v\|, \quad s \ge t.$$

Тогда из неравенства (2.7) получим

$$\|Y(t)v\|^2 \int_t^\infty e^{2(t-s)a}\,ds \le \int_t^\infty \|Y(s)v\|^2\,ds \le \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right)\|H(0)\|,$$

или

$$\|Y(t)v\|^2 \le 2a\|H(0)\| \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right).$$

Отсюда в силу произвольности вектора $v \in E_N$, $\|v\| = 1$, вытекает неравенство (2.5).

Теорема доказана.

Замечание 1. Неравенство (2.6) — аналог неравенства М. Г. Крейна для нормы матричной экспоненты

$$\frac{1}{2\|A\|}\|e^{tA}\|^2 \le \|H\| \exp\left(-\frac{t}{\|H\|}\right), \quad t \ge 0, \tag{2.8}$$

где H — решение матричного уравнения Ляпунова

$$HA + A^*H = -I,$$

и спектр постоянной матрицы A лежит в левой полуплоскости (см. [2, с. 52, 53]).

Замечание 2. Опираясь на неравенство (2.8) А. Я. Булгаков ввел параметр асимптотической устойчивости $\varkappa = 2\|A\|\,\|H\|$ для системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (1.1):

$$\frac{dy}{dt} = Ay.$$

Использование этого параметра позволило разработать алгоритм с гарантированной точностью для численного исследования асимптотической устойчивости решений. Обзор результатов в этом направлении см. в [9, 10].

3. Периодические возмущения линейных систем

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = [A(t) + A_1(t)]y, \quad t \ge 0, \tag{3.1}$$

где $A(t)$, $A_1(t)$ — матрицы размера $N \times N$ с непрерывными T-периодическими элементами, т. е.

$$A(t+T) = A(t), \quad A_1(t+T) = A_1(t).$$

Эту систему можно рассматривать как T-периодическое возмущение линейной системы (0.1).

В дальнейшем будем предполагать, что все собственные числа матрицы монодромии системы (0.1) принадлежат единичному кругу $\{|\lambda| < 1\}$. В этом случае, как мы знаем, существует единственное T-периодическое решение дифференциального уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -I. \tag{3.2}$$

Используя это решение, в силу (2.4) или (2.6) можно получить оценку для скорости убывания решений системы (0.1) при $t \to +\infty$.

В этом параграфе мы укажем условия на матрицу $A_1(t)$, при которых нулевое решение системы (3.1) является асимптотически устойчивым, и установим оценку для нормы разности

$$\|H(t) - \widetilde{H}(t)\|, \qquad 0 \le t \le T,$$

где $\widetilde{H}(t)$ — T-периодическое решение дифференциального уравнения Ляпунова с возмущением

$$\frac{d}{dt}\widetilde{H} + \widetilde{H}(A(t) + A_1(t)) + (A^*(t) + A_1^*(t))\widetilde{H} = -I. \tag{3.3}$$

Из этой оценки в силу (2.4), (2.5) будут вытекать квалифицированные оценки, характеризующие возможные изменения скорости убывания решений системы (3.1) при $t \to +\infty$.

Отметим, что если нулевое решение системы (0.1) асимптотически устойчиво, то при достаточно малых T-периодических возмущениях $A_1(t)$ нулевое решение системы (3.1) будет также асимптотически устойчивым (см., например, [3, 11, 12]). Более того, поскольку для генеральных показателей систем с периодическими коэффициентами справедлива теорема о непрерывной зависимости [2], теоретически можно сравнивать скорости убывания решений систем (0.1) и (3.1) при $t \to +\infty$. Однако на практике нахождение точных значений генеральных показателей представляет достаточно сложную задачу даже для систем с постоянными коэффициентами, ибо это связано с решением задачи локализации спектра матриц, которая является плохо обусловленной. В случае систем с постоянными коэффициентами более простым и удобным для практических приложений представляется использование нормы интеграла Ляпунова. Для таких систем, применяя неравенство (2.7) и теорему о непрерывной зависимости для нормы интеграла Ляпунова (см., например, [9, 10]), можно указать оценки, характеризующие изменение скорости убывания при $t \to +\infty$ решений систем при достаточно малых постоянных возмущениях.

Теорема 6. *Пусть $H(t)$ — T-периодическое решение дифференциального уравнения Ляпунова* (3.2). *Предположим, что для непрерывной T-периодической функции $\alpha(t)$ такой, что*

$$H(t)A_1(t) + A_1^*(t)H(t) \le I + \alpha(t)H(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3.4}$$

выполнено условие

$$\int_0^T \alpha(t)\,dt < 0. \tag{3.5}$$

Тогда нулевое решение системы (3.1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Напомним, что в силу следствия из теоремы 2 матрица $H(t)$ эрмитова и $H(t) > 0$, $t \in [0, T]$. Пусть $y(t)$ — произвольное решение системы (3.1). Рассмотрим форму $\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$. Учитывая, что $H(t)$ является решением уравнения (3.2), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle = \left\langle \left(\frac{d}{dt}H(t)\right) y(t), y(t)\right\rangle + \left\langle H(t)\frac{d}{dt}y(t), y(t)\right\rangle$$
$$+ \left\langle H(t)y(t), \frac{d}{dt}y(t)\right\rangle = \left\langle \left[\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t)\right] y(t), y(t)\right\rangle$$
$$+ \langle (H(t)A_1(t) + A_1^*(t)H(t))y(t), y(t)\rangle = \big\langle (H(t)A_1(t) + A_1^*(t)H(t) - I)y(t), y(t)\big\rangle.$$

Тогда в силу условия (3.4)

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \le \alpha(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle,$$

отсюда

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \le \exp\left(\int_0^t \alpha(s)\,ds\right)\langle H(0)y(0), y(0)\rangle. \tag{3.6}$$

Следовательно, в силу T-периодичности матрицы $H(t)$ и функции $\alpha(t)$ для любого натурального k имеем

$$\langle H(0)y(kT), y(kT)\rangle \le \exp\left(k\int_0^T \alpha(s)\,ds\right)\langle H(0)y(0), y(0)\rangle.$$

Обозначим через $\widetilde{Y}(t)$ матрицант системы (3.1). В силу T-периодичности матрицы $(A(t) + A_1(t))$ выполняется равенство

$$y(kT) = \widetilde{Y}^k(T)y(0).$$

Тогда предыдущее неравенство переписывается в виде

$$\langle H(0)\widetilde{Y}^k(T)y(0), \widetilde{Y}^k(T)y(0)\rangle \le \exp\left(k\int_0^T \alpha(s)\,ds\right)\langle H(0)y(0), y(0)\rangle.$$

Из этой оценки вытекает, что все собственные значения λ_j матрицы монодромии $\widetilde{Y}(T)$ лежат в единичном круге $\{|\lambda| < 1\}$ и, следовательно, нулевое решение системы (3.1) асимптотически устойчиво. Действительно, если бы существовало хотя бы одно собственное значение λ_{j_0} с $|\lambda_{j_0}| \ge 1$, то для соответствующего ему собственного вектора v_{j_0} из этой оценки следовало бы, что

$$|\lambda_{j_0}|^{2k}\langle H(0)v_{j_0}, v_{j_0}\rangle \le \exp\left(k\int_0^T \alpha(s)\,ds\right)\langle H(0)v_{j_0}, v_{j_0}\rangle.$$

Тогда в силу $H(0) = H^*(0) > 0$ и условия (3.5) получили бы

$$\lim_{k\to\infty} |\lambda_{j_0}|^{2k} = 0;$$

противоречие.

Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть $H(t)$ и $\widetilde{H}(t)$ — T-периодические решения дифференциальных уравнений Ляпунова (3.2) и (3.3) соответственно. Предположим, что*

$$\Delta = \max_{t\in[0,T]}\big\|H(t)A_1(t) + A_1^*(t)H(t)\big\| < 1. \tag{3.7}$$

Тогда имеет место оценка

$$\|\widetilde{H}(t) - H(t)\| \le \frac{\Delta}{1-\Delta}\|H(t)\|, \quad 0 \le t \le T. \tag{3.8}$$

Доказательство. Отметим, что согласно теореме 6 собственные значения матрицы монодромии системы (3.1) принадлежат единичному кругу $\{|\lambda| <$

$1\}$. Действительно, в этом случае в качестве функции $\alpha(t)$ можно взять величину $(\Delta - 1)/\|H(t)\|$, и в силу (3.7) условие (3.5), очевидно, будет выполнено.

Матрица $V(t) = \widetilde{H}(t) - H(t)$ является T-периодическим решением дифференциального уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}V + V(A(t) + A_1(t)) + (A^*(t) + A_1^*(t))V = -(H(t)A_1(t) + A_1^*(t)H(t)),$$

в правой части которого стоит непрерывная T-периодическая матрица. Согласно следствию из теоремы 2 это уравнение имеет единственное T-периодическое решение. Используя формулу (1.14), имеем

$$\widetilde{H}(t) - H(t) = (\widetilde{Y}^{-1}(t))^* \int_t^\infty \widetilde{Y}^*(s)(H(s)A_1(s) + A_1^*(s)H(s))\widetilde{Y}(s)\,ds\,\widetilde{Y}^{-1}(t),$$

где $\widetilde{Y}(t)$ — матрицант системы (3.1). Тогда

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{H}(t) - H(t)\| &\le \max_{|v|=1} |\langle(\widetilde{H}(t) - H(t))v, v\rangle| \\
&= \max_{|v|=1}\left|\int_t^\infty \langle (H(s)A_1(s) + A_1^*(s)H(s))\widetilde{Y}(s)\widetilde{Y}^{-1}(t)v,\, \widetilde{Y}(s)\widetilde{Y}^{-1}(t)v\rangle\,ds\right| \\
&\le \max_{\tau\in[0,T]} \|H(\tau)A_1(\tau) + A_1^*(\tau)H(\tau)\| \max_{|v|=1}\int_t^\infty \|\widetilde{Y}(s)\widetilde{Y}^{-1}(t)v\|^2\,ds \\
&= \max_{\tau\in[0,T]} \|H(\tau)A_1(\tau) + A_1^*(\tau)H(\tau)\| \max_{|v|=1}\langle \widetilde{H}(t)v,\, v\rangle \\
&= \max_{\tau\in[0,T]} \|H(\tau)A_1(\tau) + A_1^*(\tau)H(\tau)\|\|\widetilde{H}(t)\| \le \Delta(\|\widetilde{H}(t) - H(t)\| + \|H(t)\|).
\end{aligned}$$

Поскольку $\Delta < 1$, отсюда получаем (3.8).

Теорема доказана.

В качестве приложений теорем 6 и 7 приведем утверждения об асимптотической устойчивости для некоторых частных случаев.

Вначале рассмотрим систему дифференциальных уравнений с вещественным параметром μ:

$$\frac{dy}{dt} = [A(t) + \mu A_1(t)]y, \quad t \ge 0. \tag{3.9}$$

Теорема 8. *Пусть $H(t)$ — T-периодическое решение уравнения* (3.2) *и*

$$\Delta = \max_{t\in[0,T]} \|H(t)A_1(t) + A_1^*(t)H(t)\|.$$

Тогда при любом μ: $|\mu|\Delta < 1$ нулевое решение системы (3.9) *асимптотически устойчиво и для T-периодического решения $H(t,\mu)$ дифференциального уравнения Ляпунова*

$$\frac{d}{dt}H + H(A(t) + \mu A_1(t)) + \big(A^*(t) + \mu A_1^*(t)\big)H = -I$$

имеет место оценка

$$\|H(t,\mu) - H(t)\| \le \frac{|\mu|\Delta}{1 - |\mu|\Delta}\|H(t)\|, \quad 0 \le t \le T.$$

Доказательство вытекает непосредственно из теорем 6 и 7.

Рассмотрим частный случай возмущенной системы (3.1), когда $A(t) = A$ — постоянная матрица:

$$\frac{dy}{dt} = [A + A_1(t)]y, \quad t \geq 0. \tag{3.10}$$

Теорема 9. *Пусть спектр матрицы A лежит в левой полуплоскости и*

$$H = \int_0^\infty e^{tA^*} e^{tA} dt$$

— интеграл Ляпунова. Предположим, что для непрерывной T-периодической функции $\alpha(t)$ такой, что

$$HA_1(t) + A_1^*(t)H \leq I + \alpha(t)H, \quad 0 \leq t \leq T,$$

выполнено условие (3.5). *Тогда нулевое решение системы* (3.10) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Поскольку

$$HA + A^*H = -I,$$

матрицу H можно рассматривать как T-периодическое решение дифференциального уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H + HA + A^*H = -I.$$

Поэтому асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (3.10) непосредственно вытекает из теоремы 6.

Теорема доказана.

Из теорем 7–9 получаем следующие утверждения.

Следствие 1. *Пусть спектр матрицы A лежит в левой полуплоскости и H — интеграл Ляпунова. Предположим, что*

$$\Delta = \max_{t \in [0,T]} \left\| HA_1(t) + A_1^*(t)H \right\| < 1.$$

Тогда нулевое решение системы (3.10) *асимптотически устойчиво и для T-периодического решения $\widetilde{H}(t)$ уравнения*

$$\frac{d}{dt}\widetilde{H} + \widetilde{H}(A + A_1(t)) + (A^* + A_1^*(t))\widetilde{H} = -I$$

имеет место оценка

$$\|\widetilde{H}(t) - H\| \leq \frac{\Delta}{1 - \Delta}\|H\|, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Следствие 2. *Пусть спектр матрицы A лежит в левой полуплоскости, H — интеграл Ляпунова и A_1 — постоянная $N \times N$ матрица. Если*

$$\Delta = \|HA_1 + A_1^*H\| < 1,$$

то нулевое решение системы

$$\frac{dy}{dt} = (A + A_1)y, \quad t \geq 0,$$

асимптотически устойчиво и для решения $\widetilde{H}$ матричного уравнения

$$\widetilde{H}(A + A_1) + (A^* + A_1^*)\widetilde{H} = -I$$

имеет место оценка

$$\|\widetilde{H} - H\| \le \frac{\Delta}{1 - \Delta}\|H\|.$$

Замечание. Некоторый аналог сформулированного следствия содержится в [9, 10].

Следствие 3. *Пусть спектр матрицы A лежит в левой полуплоскости, H — интеграл Ляпунова и*

$$\Delta = \max_{t\in[0,T]} \|HA_1(t) + A_1^*(t)H\|.$$

Тогда при любом μ: $|\mu|\Delta < 1$ нулевое решение системы

$$\frac{dy}{dt} = (A + \mu A_1(t))y, \quad t \ge 0,$$

асимптотически устойчиво и для T-периодического решения $H(t, \mu)$ дифференциального уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H + H(A + \mu A_1(t)) + (A^* + \mu A_1^*(t))H = -I$$

имеет место оценка

$$\|H(t, \mu) - H\| \le \frac{|\mu|\Delta}{1 - |\mu|\Delta}\|H\|, \quad 0 \le t \le T.$$

Замечание. Из следствия 3 вытекает, что решение $H(t, \mu)$ краевой задачи

$$\frac{d}{dt}H + H(A + \mu A_1(t)) + (A^* + \mu A_1^*(t))H = -I, \quad 0 < t < T,$$
$$H(0, \mu) = H(T, \mu)$$

можно записать в виде

$$H(t, \mu) = H + O(\mu), \quad |\mu| < \frac{1}{\Delta},$$

равномерно по $t \in [0, T]$, где H — решение уравнения Ляпунова

$$HA + A^*H = -I.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
3. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
4. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
5. *Розенвассер Е. Н.* Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления. М.: Наука, 1977.
6. *Megan M.* On controllability, stability and the Lyapunov differential equation for linear control systems // Glas. Mat. Ser. III 13. 1978. N 1. P. 183–198.

7. *Bittanti S., Bolzern P., Colaneri P.* The extended periodic Lyapunov lemma // Automatica. 1985. V. 21. P. 603–605.

8. *Бодунов Н. А., Котченко Ф. Ф.* О зависимости устойчивости линейных периодических систем от периода // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 2. С. 338–341.

9. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: НГУ, 1994.

10. *Bulgak H.* Pseudoeigenvalues, spectral portrait of a matrix and their connections with different criteria of stability // Error Control and Adaptivity in Scientific Computing, NATO Science Series. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. P. 95–124.

11. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965.

12. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.

Статья поступила 29 мая 2000 г.

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru,

Матвеева Инесса Изотовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
matveeva@math.nsc.ru