Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2001. Том 42, № 2

УДК 519.21

ОБ УСЛОВИЯХ НЕВОЗВРАТНОСТИ ДЛЯ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

С. Г. Фосс, Д. Э. Денисов

Аннотация: Рассматривается неоднородная (по времени) цепь Маркова, принимающая значения в произвольном фазовом пространстве. Доказывается новый критерий невозвратности, формулируемый в терминах приращений за один шаг для некоторой пробной функции от значения цепи. Приводятся примеры, показывающие близость предлагаемых условий к необходимым. Библиогр. 2.

1. Введение

Пусть $X = \{X_n\}_{n\geq 0}$, $X_0 = \mathrm{const}$, — вообще говоря, неоднородная (по времени) цепь Маркова, принимающая значения в измеримом пространстве $(\mathscr{X}, B)$, и $L : \mathscr{X} \to [0,\infty)$ — измеримая функция, принимающая неограниченные значения, т. е. при любом $c > 0$ полный прообраз $L^{-1}([c,\infty))$ множества $[c,\infty)$ непуст. Изучаются условия, при которых с ростом времени значения $L(X_n)$ уходят почти наверное на бесконечность, т. е. выполняется равенство

$$\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} L(X_n) = \infty) = 1 \tag{1.1}$$

при любом начальном значении X_0. Из (1.1) вытекает, что при любом $N > 0$ множество $\{x : L(x) < N\}$ будет невозвратным.

Насколько нам известно, общие условия невозвратности изучались лишь в случае счетных цепей Маркова (т. е. цепей со счетным множеством состояний $\mathscr{X}$) и при дополнительном предположении, что величины скачков ограничены. По-видимому, наиболее общее утверждение для этого случая содержится в [1, с. 31, теорема 2.2.7].

Теорема 1.1. *Пусть X — однородная цепь Маркова, принимающая значения в счетном множестве $\mathscr{X}$, образующем один класс существенных сообщающихся состояний рассматриваемой цепи. Предположим, что существуют функция $L : \mathscr{X} \to [0,\infty)$, целочисленная функция $v : \mathscr{X} \to \{1, 2, \dots\}$ и числа $\varepsilon > 0$, $N > 0$, $d > 0$ такие, что*

(a) $\sup\limits_x v(x) < \infty$,

(b) *при любых $x, y \in \mathscr{X}$*

$$|L(x) - L(y)| > d \quad \text{влечет} \quad p_{x,y} \equiv \mathbf{P}(X_1 = y \mid X_0 = x) = 0, \tag{1.2}$$

(c) *для любого $x \in \mathscr{X}$ такого, что $L(x) \geq N$,*

$$\mathbf{E}\{L(X_{v(x)}) - L(X_0) \mid X_0 = x\} \geq \varepsilon. \tag{1.3}$$

Работа частично поддержана Франко-русским центром им. А. М. Ляпунова (грант 97–07) и INTAS (грант 97–1625).

Тогда цепь Маркова X невозвратна, т. е. для любого состояния $x \in \mathscr{X}$

$$\tau(x) \equiv \min\{n \geq 1 : X_n = x \mid X_0 = x\}$$

является несобственной случайной величиной.

Замечание 1. Если дополнительно предположить, что для любого начального состояния $X_0 = x$ из множества $\{x : \ L(x) < N\}$

$$\min\{n \geq 1 : X_n \geq N\} < \infty \quad \text{п. н.,} \tag{1.4}$$

то в условиях теоремы 1.1 имеет место (1.1). Для выполнения (1.4) достаточно потребовать, чтобы множество $\{x : L(x) < N\}$ было конечным.

Замечание 2. Наиболее ограничительными среди условий теоремы 1.1 являются (1.2) и (1.3). В настоящей работе мы рассматриваем ситуацию, когда условие (1.2) не выполнено. С другой стороны, ради упрощения изложения в дальнейшем будем предполагать выполнение условия (1.3) при $v(x) \equiv 1$.

Для того чтобы понять, какого рода дополнительные условия на приращения скачков следует накладывать при отсутствии (1.2), рассмотрим два примера однородных по времени цепей Маркова. При $x \in \mathscr{X}$ через Δ_x обозначим случайную величину, имеющую распределение $\mathbf{P}(\Delta_x \in B) = \mathbf{P}(L(X_1) - L(x) \in B \mid X_0 = x)$. Будем писать $a^+ = \max(a, 0)$ и $a^- = -\min(a, 0)$.

Пример 1. Пусть $\mathscr{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество неотрицательных целых чисел, $L(x) = x$ и X — однородная цепь Маркова с вероятностями переходов $p_{i,j} = \mathbf{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$, равными

$$p_{0,0} = p_{0,1} = 1/2,$$

и при $i = 1, 2, \dots$

$$p_{i,i+1} = 1 - p_{i,0} \in (0, 1), \quad p_{i,j} = 0 \quad \text{при } j \neq 0, j \neq i + 1.$$

Эта цепь неразложима и апериодична, и вероятность невозвращения в состояние 0 равна бесконечному произведению

$$\prod_{i=0}^{\infty} p_{i,i+1},$$

которое является положительным числом тогда и только тогда, когда ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_{i,0}$ сходится. Заметим, что условие $p_{i,0} = o(i^{-1})$ (что в данном примере эквивалентно равномерной интегрируемости случайных величин Δ_i^-) является необходимым для сходимости ряда, но не достаточным. Если предположить, что последовательность $p_{i,0}$ не возрастает, то сходимость ряда эквивалентна сходимости интеграла

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dt}{h(t)} < \infty, \tag{1.5}$$

где функция $h(t)$ не убывает и $h(i) = \frac{1}{p_{i,0}}$ в целых точках. Условие вида (1.5) появится позже в формулировке основной теоремы. Отметим также, что из (1.5) с необходимостью следует выполнение условия «положительности сноса» (1.3) при достаточно большом N.

Этот пример показывает, что, вообще говоря, даже при наличии положительного сноса для невозвратности недостаточно требовать равномерную интегрируемость отрицательных частей скачков Δ_x^- — нужно нечто большее.

Рассмотрим также второй пример, обосновывающий необходимость появления в формулировке критерия невозвратности и условия на распределения положительных частей скачков Δ_x^+.

Пример 2. Пусть, как и в первом примере, $L(x) = x$ и однородная цепь Маркова задана на фазовом пространстве $\{0, 1, 2, \dots\}$. Пусть $\alpha > 1$, $\beta > 1$ — заданные числа и $k \equiv k(\alpha, \beta) = \max\bigl\{i : \frac{\alpha}{[i^\beta]} \geq 1\bigr\}$. Здесь $[x]$ — целая часть числа x.

Зададим вероятности перехода равенствами

$$p_{0,0} = p_{0,1} = 1/2, \quad p_{i,i-1} = 1 - p_{i,i+1} = 1/3 \quad \text{при всех} \quad i = 1, \dots, k$$

$$p_{i,l(i)} = 1 - p_{i,i-1} = \alpha i^{-\beta} \quad \text{при } i = k+1, k+2, \dots \quad \text{и} \quad l(i) = i + [i^\beta],$$

$$p_{i,j} = 0 \quad \text{при } j \neq i-1,\ j \neq l(i).$$

Эта цепь Маркова неразложима и апериодична, все состояния сообщаются друг с другом. Нетрудно видеть, что $\mathbf{E}\Delta_i \geq \min(1/3, \alpha - 1) \equiv \varepsilon > 0$ при всех $i \geq 1$. Отрицательные скачки ограничены и, следовательно, любое условие типа (1.5) выполняется. С другой стороны, так как $\beta > 1$, цепь Маркова оказывается возвратной. Действительно, зафиксируем любое целое число $N \geq k$. Допустим, что цепь стартует из состояния $X_0 = i > N$. Покажем, что с вероятностью единица она в некоторый момент времени придет в состояние N. Возможно одно из двух: либо до момента попадания в N будут происходить только скачки влево (единичной величины), вероятность этого события равна

$$\prod_{j=N+1}^{i} p_{j,j-1} \geq \prod_{j=N+1}^{\infty} p_{j,j-1} \equiv \gamma > 0,$$

либо в какой-то из моментов времени произойдет скачок вправо, скажем, в точку i_1. Если происходит последнее, то независимо от значения i_1 с вероятностью, не меньшей чем γ, цепь Маркова, стартуя из i_1, придет в N, делая скачки только влево. В случае «неуспеха» (скачка вправо, скажем, в точку i_2) вновь вероятность прийти в N из i_2, совершая только скачки влево, не меньше γ, и т. д. Другими словами, рассматривается последовательность (зависимых) испытаний, в каждом из которых вероятность успеха, какова бы ни была предыстория, всегда не меньше чем $\gamma > 0$. Следовательно, вероятность того, что успех когда-либо произойдет, равна единице.

С другой стороны, нетрудно убедиться, что если в начальный момент цепь Маркова стартует из состояния $X_0 = x \leq N$, то она когда-либо с вероятностью единица примет значение, не меньшее N. Из последнего следует, что состояние N является возвратным — такова и сама цепь. Более точный анализ (который мы опускаем) показывает, что эта цепь Маркова будет возвратной и при $\beta = 1$.

В данном примере положительный снос $\mathbf{E}\Delta_i \geq \varepsilon > 0$ обеспечивается за счет скачков случайных величин $\{\Delta_x^+\}$, которые не являются равномерно интегрируемыми. Поэтому присутствие в формулировке критерия невозвратности условия равномерной интегрируемости положительных частей скачков или, более общо, условия, гарантирующего положительный снос за счет ограниченных положительных скачков, является вполне естественным.

2. Формулировка и доказательство основного результата

Пусть $(\mathscr{X}, B)$ — измеримое пространство, $\{X_n \equiv X_n^{(x)}\}_{n\geq 0}$ — заданная на нем (вообще говоря, неоднородная по времени) цепь Маркова с начальным состоянием $X_0 = x = \mathrm{const}$ и переходными вероятностями

$$P(y,n,B) = \mathbf{P}(X_{n+1} \in B \mid X_n = y), \quad B \in \mathscr{B},\ y \in \mathscr{X}.$$

Для упрощения изложения будем в дальнейшем предполагать, что цепь Маркова представима в виде *стохастически рекурсивной последовательности*

$$X_{n+1} = f_n(X_n, \xi_n), \quad n \geq 0,$$

где $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одно и то же равномерное на $[0,1]$ распределение, а $f_n : \mathscr{X} \times [0,1] \to \mathscr{X}$ — измеримые функции. Данное предположение не является слишком ограничительным — для его выполнения достаточно потребовать, чтобы сигма-алгебра $\mathscr{B}$ была счетно-порожденной (см., например, [2]).

При $m = 0,1,2,\dots$ через $\{X_{m+n}^{(x,m)}\}_{n\geq 0}$ будем обозначать цепь Маркова, стартующую в момент времени m из состояния $X_m^{(x,m)} = x$ и определяемую с помощью рекуррентных соотношений

$$X_{m+n+1}^{(x,m)} = f_{m+n}\bigl(X_{m+n}^{(x,m)}, \xi_{m+n}\bigr) \quad \text{при } n = 0,1,\dots.$$

При этом для любого $n \geq 0$

$$\mathbf{P}\bigl(X_{m+n+1}^{(x,m)} \in B \mid X_{m+n}^{(x,m)} = y\bigr) = P(y, m+n, B).$$

В частности, $X_n^{(x)} = X_n^{(x,0)}$ и $P(x,m,B) = \mathbf{P}\bigl(X_{m+1}^{(x,m)} \in B\bigr)$.

Далее, пусть $L : \mathscr{X} \to [0,\infty)$ — измеримая функция, $\Delta_{x,m} = L\bigl(X_{m+1}^{(x,m)}\bigr) - L(x)$ и для числа $N > 0$

$$\tau_{x,m}(N) = \min\bigl\{n \geq 1 : L\bigl(X_{m+n}^{(x,m)}\bigr) \geq N\bigr\}.$$

Теорема 2.1. *Предположим, что существуют числа $N > 0$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$ и измеримая функция $h : [0,\infty) \to [1,\infty)$ такие, что*

(1) $\tau_{x,m}(N) < \infty$ п. н. при всех $x \in \mathscr{X}$ и $m \geq 0$;

(2) при всех $m = 0,1,2,\dots$ и всех $x \in \mathscr{X}$ таких, что $L(x) \geq N$,

$$\mathbf{E}\{\Delta_{x,m} \cdot I(\Delta_{x,m} \leq M)\} \geq \varepsilon;$$

(3) интеграл $\int_1^\infty (h(t))^{-1}\,dt$ сходится и при $t \geq 1$ функция $g(t) = \frac{h(t)}{t}$ является неубывающей и выпуклой вверх;

(4) семейство случайных величин $\{h(\Delta_{x,m}^-); m \geq 0, L(x) \geq N\}$ равномерно интегрируемо.

Тогда при всех $x \in \mathscr{X}$ и любом $m \geq 0$

$$\mathbf{P}\bigl(\lim_{n\to\infty} L\bigl(X_{m+n}^{(x,m)}\bigr) = \infty\bigr) = 1. \tag{2.1}$$

Замечание 3. Условие (2) теоремы 2.1 будет выполнено, если предположить, что имеют место следующие два условия:

(1) $\mathbf{E}\Delta_{x,m} \geq 2\varepsilon$ при всех $m \geq 0$ и $x \in \mathscr{X}$ таких, что $L(x) \geq N$;

(2) семейство случайных величин $\{\Delta^+_{x,m}; m \ge 0, L(x) \ge N\}$ равномерно интегрируемо.

Замечание 4. В неопубликованной работе С. Г. Фосса (1995 г.) утверждение теоремы 2.1 было доказано в частном случае $h(t) = \max(1, t^2)$.

Замечание 5. В условии (3) теоремы 2.1 предположение о неубывании и выпуклости функции g выбрано для простоты формулировки. Оно является техническим и может быть естественным образом ослаблено. Однако, по-видимому, одного только требования о сходимости интеграла недостаточно для справедливости утверждения теоремы 2.1.

Замечание 6. Условия (3) и (4) будут выполнены, если предположить, что при некотором $\beta > 0$ моменты порядка $1+\beta$ случайных величин $\Delta^-_{x,m}$ равномерно ограничены, т. е.

$$\sup_{m\ge 0, L(x)\ge N} \mathbf{E}\{\Delta^-_{x,m}\}^{1+\beta} < \infty.$$

Действительно, при этом в качестве h можно взять функцию $h(t) = t^{1+\gamma}$ при $t \ge 1$, где γ — любое число из интервала $(0, \min(1,\beta))$. Отметим также, что в качестве $h(t)$ можно рассматривать (при $t \ge 1$) функции вида $t(\log t)^{1+\beta}$, $t\log t(\log\log t)^{1+\beta}$ и т. д., где $\beta > 0$ произвольно.

Замечание 7. С помощью некоторых технических приемов можно показать, что утверждение теоремы 2.1 остается в силе, если ослабить условие (4) до следующего:

$$\sup_{m\ge 0, L(x)\ge N} \mathbf{E}\, h(\Delta^-_{x,m}) < \infty.$$

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 2.1, получим предварительно вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (2) *теоремы* 2.1. *Тогда для любого неотрицательного целого числа* m *и для любого* $x \in \mathscr{X}$

$$\mathbf{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} L\big(X^{(x,m)}_{m+n}\big) = \infty\Big) = 1. \tag{2.2}$$

Доказательство леммы. Возьмем произвольно $b > N$. Покажем сначала, что для любых неотрицательных целых чисел m, l и для любого $x \in \mathscr{X}$

$$\mathbf{P}\big(\exists n \ge l : L\big(X^{(x,m)}_{m+n}\big) \ge b\big) = 1. \tag{2.3}$$

Без ограничения общности можно рассмотреть лишь случай $m = 0$. Возьмем $d = \varepsilon/2$, тогда

$$\mathbf{P}(\Delta_{y,n} \ge d) \ge \mathbf{P}(M \ge \Delta_{y,n} \ge d) \ge \mathbf{E}\bigg\{\frac{\Delta_{y,n}}{M}\mathbf{I}(M \ge \Delta_{y,n} \ge d)\bigg\} \ge \frac{d}{M}.$$

Положим $H = \max\big(l, [\frac{b-N}{d}] + 1\big)$ и $\nu_1 = \min\big\{n \ge 1 : L(X^{(x)}_n) \ge N\big\}$. Отметим, что в силу условия (1) случайная величина ν_1 конечна п. н. Кроме того,

$$\mathbf{P}\big(L\big(X^{(x)}_{\nu_1+H}\big) \ge b\big) \ge \left(\frac{d}{M}\right)^H \equiv \delta > 0.$$

Далее, при $i = 1, 2, \ldots$ определим случайные величины

$$\nu_{i+1} = \min\big\{n \ge \nu_i + H + 1 : L\big(X^{(x)}_n\big) \ge N\big\}$$

и заметим, что все они тоже п. н. конечны. Рассмотрим при $i = 1, 2, \ldots$ последовательность событий $B_i = \{L(X^{(x)}_{\nu_i+H}) \geq b\}$ и возрастающую последовательность сигма-алгебр $\mathscr{F}_i = \sigma(\nu_i, \xi_1, \ldots, \xi_{\nu_i})$. Отметим, что $\mathbf{P}(B_i \mid \mathscr{F}_i) \geq \delta > 0$ п. н. при всех i. Значит, $\mathbf{P}(\overline{B}_i \mid \overline{B}_1 \ldots \overline{B}_{i-1}) \leq 1 - \delta < 1$ при всех $i = 2, 3, \ldots$, где через $\overline{B}_i$ обозначено дополнение события B_i. Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{B}_i\right) \leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{B}_i\right) \leq (1-\delta)^n \to 0$$

при $n \to \infty$ и с вероятностью единица происходит хотя бы одно из событий B_i. Следовательно, (2.3) имеет место.

Возьмем теперь $b_n = N + n$ и положим

$$\mu_{n+1} = \min\bigl\{i \geq \mu_n + 1 : L\bigl(X^{(x,m)}_{m+i}\bigr) \geq b_{n+1}\bigr\}.$$

В силу (2.3) все случайные величины μ_n конечны п. н. Тем самым

$$L\bigl(X^{(x,m)}_{m+\mu_n}\bigr) \to \infty \quad \text{п. н. при } n \to \infty, \tag{2.4}$$

что и требовалось показать. Доказательство леммы завершено.

Доказательство теоремы 2.1 проводится единообразно при всех $m \geq 0$, поэтому ограничимся случаем $m = 0$.

Возьмем произвольно $x \in \mathscr{X}$ и $C > 0$. Положим

$$Y_n = \int\limits_{1+((L(X^{(x)}_n)-N)^+)/C}^{\infty} \frac{dt}{h(t)}.$$

Нам достаточно доказать, что при надлежащем выборе числа $C > 0$

$$\text{последовательность } \{Y_n\}_{n\geq 0} \text{ образует положительный супермартингал.} \tag{2.5}$$

Действительно, если это так, то по известной теореме последовательность $\{Y_n\}$ сходится п. н. Но в силу леммы 2.1 существует подпоследовательность $\{\mu_n\}$, по которой Y_{μ_n} сходится к нулю п. н. Значит, и $Y_n \to 0$ п. н., что эквивалентно сходимости $L\bigl(X^{(x)}_n\bigr) \to \infty$ п. н.

Итак, докажем (2.5). Так как мы имеем дело с цепью Маркова, нам достаточно показать справедливость неравенства

$$\mathbf{E}\bigl\{Y_{n+1} - Y_n \mid X^{(x)}_n\bigr\} \leq 0 \tag{2.6}$$

п. н. при каждом n.

Доказательство неравенства (2.6) проводится единообразно при всех n. Поэтому ради упрощения обозначений ограничимся лишь случаем $n = 0$.

Неравенство $\mathbf{E}\{Y_1 - Y_0\} \leq 0$ очевидно, если x таково, что $L(x) \leq N$. В ходе дальнейшего доказательства будем предполагать, что $z \equiv L(x) - N = \mathrm{const} > 0$. Обозначим

$$A(x) = Y_1 - Y_0 = \int\limits_{1+(z+\Delta_x)^+/C}^{1+z/C} \frac{dt}{h(t)},$$

где $\Delta_x \equiv \Delta_{x,0}$.

При доказательстве нам понадобятся некоторые положительные постоянные r, R, C, удовлетворяющие следующему набору ограничений.

Выберем сначала R и r. Пусть

$$D = \sup_{L(x)\geq N} \mathbf{E}\{\Delta_x^-\} \quad \text{и} \quad T(\alpha) = \sup_{t\geq 0} \frac{g(1+\alpha t)}{g(1+t)}, \quad \alpha > 1$$

(из условия (4) теоремы 2.1 следует конечность числа D, а из выпуклости g — конечность числа $T(\alpha)$ при каждом $\alpha > 1$ и сходимость $T(\alpha) \to 1$ при $\alpha \to 1$).

Предположим, что число $R \in (0,1)$ выбрано настолько малым, что имеет место неравенство

$$\frac{h(1+2R)-h(1)}{h(1)} D \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.7}$$

а число $r \in (0,1)$ — настолько малым, что при $\alpha = \frac{1+r}{1-r}$ выполняется неравенство

$$(\alpha T(\alpha) - 1)D \leq \varepsilon/2. \tag{2.8}$$

Отметим, что в силу условия (3) теоремы 2.1 при любом $\alpha > 1$ и любом $t > 0$

$$1 \leq \frac{h(1+\alpha t)}{h(1+t)} = \frac{1+\alpha t}{1+t}\frac{g(1+\alpha t)}{g(1+t)} \leq \alpha T(\alpha),$$

поэтому (2.8) влечет неравенство

$$\frac{h(1+(1+r)u)-h(1+(1-r)u)}{h(1+(1-r)u)} D \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.9}$$

при любом $u > 0$ (достаточно положить $t = (1-r)u$).

Теперь выберем C настолько большим, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$C > \frac{\max(M, 1+R(1+r))}{Rr} \tag{2.10}$$

и

$$K\mathbf{E}\{h(|\Delta_x|\mathbf{I}(\Delta_x < -rRC)\} \leq \varepsilon r R/12, \tag{2.11}$$

где $K = \int\limits_1^\infty (h(t))^{-1}\,dt$.

Перейдем теперь собственно к доказательству. Возможны два случая: а) $0 < z \leq RC$ и б) $z > RC$.

Рассмотрим первый случай. Представим $\mathbf{E}A(x)$ в виде

$$\mathbf{E}A(x) = E_1 + E_2 + E_3,$$

где

$$E_1 = \mathbf{E}\{A(x)\mathbf{I}(\Delta_x > M)\}, \quad E_2 = \mathbf{E}\{A(x)\mathbf{I}(0 \leq \Delta_x \leq M)\},$$
$$E_3 = \mathbf{E}\{A(x)\mathbf{I}(\Delta_x < 0)\}.$$

Отметим, что $A(x)$ допускает (в силу монотонности h) следующие оценки сверху:

$$A(x) \leq \begin{cases} 0, & \text{если } \Delta_x > M, \\ \frac{z-(z+\Delta_x)^+}{Ch(1+(z+\Delta_x)^+/C)} \leq \frac{-\Delta_x}{Ch(1+R+Rr)}, & \text{если } 0 \leq \Delta_x \leq M, \\ \int\limits_{1+(z+\Delta_x)^+/C}^{1+z/C} \frac{du}{h(u)} \leq \frac{-\Delta_x}{Ch(1)}, & \text{если } \Delta_x < 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$E_2 \le \frac{-1}{Ch(1+(1+r)R)}\,\mathbf{E}\{\Delta_x \mathbf{I}(\Delta_x \le M) - \Delta_x \mathbf{I}(\Delta_x < 0)\}$$

и

$$E_3 \le \frac{-1}{Ch(1)}\,\mathbf{E}\{\Delta_x \mathbf{I}(\Delta_x < 0)\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} C\mathbf{E}A(x) &\le \frac{-\varepsilon}{h(1+(1+r)R)} + \left(\frac{1}{h(1)} - \frac{1}{h(1+(1+r)R)}\right)\mathbf{E}\{-\Delta_x \mathbf{I}(\Delta_x < 0)\} \\ &\le \frac{1}{h(1+(1+r)R)}\left(-\varepsilon + \frac{h(1+(1+r)R) - h(1)}{h(1)} D\right). \end{aligned}$$

В силу (2.7) и монотонности h правая часть последнего неравенства является отрицательным числом, поэтому $\mathbf{E}A(x) < 0$, что и требовалось показать.

Рассмотрим второй случай. Представим теперь математическое ожидание $\mathbf{E}A(x)$ как сумму четырех слагаемых

$$\mathbf{E}A(x) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4,$$

где

$$\begin{gathered} E_1 = \mathbf{E}\{A(x)\mathbf{I}(\Delta_x > M)\}, \quad E_2 = \mathbf{E}\{A(x)\mathbf{I}(0 \le \Delta_x \le M)\}, \\ E_3 = \mathbf{E}\{A(x)\mathbf{I}(-rz \le \Delta_x < 0)\}, \quad E_4 = \mathbf{E}\{A(x)\mathbf{I}(\Delta_x < -rz)\}. \end{gathered}$$

При $\Delta_x \ge -rz$ интеграл $A(x)$ допускает следующие верхние оценки:

$$A(x) \le \begin{cases} 0, & \text{если } \Delta_x > M, \\ \frac{-\Delta_x}{Ch(1+(z+M)/C)} \le \frac{-\Delta_x}{Ch(1+(z+rz)/C)}, & \text{если } 0 \le \Delta_x \le M, \\ \frac{-\Delta_x}{Ch(1+(z-rz)/C)}, & \text{если } -rz \le \Delta_x < 0. \end{cases}$$

Отметим, что $E_1 \le 0$. Далее,

$$\begin{gathered} E_2 \le \frac{-1}{Ch\big(1+\frac{z+rz}{C}\big)}\mathbf{E}\{\Delta_x \mathbf{I}(0 \le \Delta_x \le M)\}, \\ E_3 \le \frac{-1}{Ch\big(1+\frac{z-rz}{C}\big)}\mathbf{E}\{\Delta_x \mathbf{I}(\Delta_x < 0)\}. \end{gathered}$$

Значит,

$$E_1 + E_2 + E_3 \le \frac{-\varepsilon}{Ch\big(1+\frac{z+rz}{C}\big)} + \frac{h\big(1+\frac{z+rz}{C}\big) - h\big(1+\frac{z-rz}{C}\big)}{h\big(1+\frac{z+rz}{C}\big)h\big(1+\frac{z-rz}{C}\big)C}\,D. \tag{2.12}$$

Воспользовавшись неравенством (2.9) при $u = z/C$, получаем

$$E_1 + E_2 + E_3 \le \frac{-\varepsilon}{2Ch\big(1+\frac{z+rz}{C}\big)}. \tag{2.13}$$

Осталось оценить слагаемое E_4:

$$\begin{aligned} E_4 = \mathbf{E}\left(\int\limits_{1+(z+\Delta_x)^+/C}^{1+z/C} \frac{du}{h(u)}\mathbf{I}(\Delta_x < -rz)\right) &\le K \cdot \mathbf{P}(\Delta_x < -rz) \\ \le K \cdot \mathbf{E}\left\{\frac{h(|\Delta_x|)}{h(rz)}\,\mathbf{I}(\Delta_x < -rz)\right\} &\le \frac{K}{h(rz)}\mathbf{E}\{h(|\Delta_x|)\mathbf{I}(\Delta_x < -rRC)\}. \end{aligned}$$

В силу (2.11) правая часть последнего неравенства не больше чем $\varepsilon rR/12h(rz)$.

Из (2.10) следует, что $g(rz) \geq g(1+z(1+r)/C)$. Действительно, функция g не убывает и, так как $z > RC$,

$$rz - (1 + z(1+r)/C) = z\frac{rC - (1+r)}{C} - 1 > RrC - R(1+r) - 1 > 0.$$

Далее, поскольку $R < 1$, $r < 1$ и $z > RC$, имеет место неравенство $3rz/rRC > 1 + (z + rz)/C$. Действительно,

$$\frac{3z}{RC} - \frac{z(1+r)}{C} = \frac{z(3 - R(1+r))}{RC} > \frac{z}{RC} > 1.$$

Поэтому

$$E_4 \leq \frac{\varepsilon rR/12}{rRC(1 + (z+rz)/C)g(rz)/3} \leq \frac{\varepsilon}{4Ch(1 + z(1+r)/C)}. \tag{2.14}$$

Из (2.13) и (2.14) следует нужная нам оценка:

$$\mathbf{E}A(x) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \leq \frac{-\varepsilon}{4Ch(1 + z(1+r)/C)} < 0.$$

Итак, мы получили, что при любом $x \in \mathscr{X}$

$$\mathbf{E}A(x) \leq 0.$$

Теорема 2.1 доказана.

Авторы выражают благодарность рецензенту за высказанные замечания, а также Д. А. Коршунову и Н. И. Черновой за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fayolle G., Malyshev V. A., Menshikov M. V.* Topics on the constructive theory of countable Markov chains. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

2. *Kifer Yu.* Ergodic theory of random transformations. Boston: Birkhauser, 1986.

Статья поступила 9 октября 2000 г.

Фосс Сергей Георгиевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
`foss@math.nsc.ru`

Денисов Денис Эдуардович
Новосибирский гос. университет, Новосибирск 630090
`denis79@imail.ru`