Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 517.946

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОБРАЩЕНИЯ ЛУЧЕВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С НЕПОЛНЫМИ ДАННЫМИ

Акрам Х. Бегматов

Аннотация: Рассматривается задача восстановления функции в трехмерном пространстве, если известны интегралы от нее по одному семейству прямых, являющихся образующими конусов, т. е. задача обращения лучевого преобразования с неполными данными. Эта задача связана с вспомогательной задачей аналитического продолжения и является сильно некорректной. Получены теорема единственности и оценки условной устойчивости решения. Библиогр. 18.

Введение

Рассматривается задача восстановления функции, если известны интегралы от нее по одному семейству прямых в трехмерном пространстве, являющихся образующими конусов. Интегральные преобразования подобного вида называются лучевыми преобразованиями [1] и имеют широкие приложения при исследовании задач компьютерной томографии [2]. Формулы обращения лучевого преобразования, связанные с конусной схемой сканирования компьютерной томографии, приведены в работах Х. К. Туя [3], Д. В. Финча [4], П. Гранже [5] (см. также обзоры Ф. Наттерера [6], В. П. Паламодова [7] и указанную там литературу). А. А. Кириллов [8], А. С. Благовещенский [9], И. М. Гельфанд и А. Б. Гончаров [10] изучали различные постановки задачи восстановления функции, если заданы интегралы от нее вдоль прямых, пересекающих некоторое множество в пространстве. Были получены явные формулы для эффективного определения искомой функции. Упомянем также статью С. В. Успенского [11], в которой рассматривалась задача восстановления функции, заданной интегралами по одному семейству конических поверхностей.

Задача, которая изучается в настоящей работе, связана с вспомогательными задачами аналитического продолжения и в отличие от задач, рассмотренных в работах автора [12–14], является сильно некорректной. В п. 1 приводится постановка задачи. Сформулирована и доказана теорема единственности ее решения в классе непрерывных финитных функций. В п. 2 получены оценки условной устойчивости решения задачи. Оценка устойчивости имеет логарифмический вид. Наконец, в п. 3 приводится доказательство леммы об оценке одной гармонической меры, которая используется в п. 2 при получении оценок устойчивости.

Отметим, что единственность, оценки устойчивости в пространствах Соболева и формула обращения достаточно простого вида для задачи интегральной геометрии на семействе однополостных прямых круговых конусов в четномерном пространстве получены в статье автора [13].

1. Постановка задачи. Теорема единственности. Пусть

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3,$$
$$\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,$$
$$Q = \mathbb{R}^3 \times \Theta, \quad \mathscr{D} = \mathbb{R}^2 \times \Theta, \quad \Theta = \{\alpha : \alpha \in [0, 2\pi]\}, \quad \mu = (\cos\alpha, \sin\alpha),$$
$$\Omega = \{(x, y) : |x| < 1,\ |y| < l,\ 0 < l < \infty\}; \quad \overline{\Omega} = \{(x, y) : |x| \le 1,\ |y| \le l\}.$$

Постановка задачи. Обозначим через $\{K(x)\}$ семейство двуполостных конусов, которые определяются соотношением $K(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |x_3 - \xi_3| = |\bar{x} - \bar{\xi}|\}$. Рассмотрим операторное уравнение относительно функции $u(x)$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} u(x_1 + s\cos\alpha, x_2 + s\sin\alpha, x_3 + s)\, ds = f(x, \alpha). \tag{1}$$

Функция $f(\cdot)$ предполагается известной для всех $(x, \alpha) \in Q$.

Задача решения уравнения (1) представляет собой задачу интегральной геометрии для семейства прямых, являющихся образующими двуполостных конусов $K(x)$. Искомая функция $u(\cdot)$ является функцией трех переменных. Правая часть уравнения (1) зависит от четырех параметров x_1, x_2, x_3 и α. Однако, как показано ниже, функция $u(\cdot)$ однозначно определяется по функции $f(\cdot)$.

Правая часть (1) удовлетворяет следующему уравнению с частными производными первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial x_2}\sin\alpha + \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0. \tag{2}$$

Можно выбрать другую параметризацию задачи интегральной геометрии (1) с помощью трех параметров z_1, z_2 и α, где $z_1 = x_1 - x_3\cos\alpha$, $z_2 = x_2 - x_3\sin\alpha$. Нетрудно видеть, что функция $f_1(z_1, z_2, \alpha) = f(x, \alpha)$ удовлетворяет уравнению (2). Таким образом, задача решения уравнения (1) фактически не является переопределенной.

Теорема 1. *Решение уравнения* (1) *в классе непрерывных финитных функций с носителем в* Ω *единственно.*

Доказательство. Применяя к обеим частям уравнения (1) преобразование Фурье по переменным x_1, x_2, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-is\langle\bar{\lambda},\mu\rangle} w(\lambda_1, \lambda_2, s + x_3)\, ds = \psi(\bar{\lambda}, x_3, \alpha). \tag{3}$$

Здесь через $w(\bar{\lambda}, x_3)$ и $\psi(\bar{\lambda}, x_3, \alpha)$ обозначены преобразования Фурье по переменным x_1, x_2 от функций $u(x)$ и $f(x, \alpha)$ соответственно, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Сделаем замену $s + x_3 = t$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-it\langle\bar{\lambda},\mu\rangle} w(\bar{\lambda}, t)\, dt = e^{-ix_3\langle\bar{\lambda},\mu\rangle}\psi(\bar{\lambda}, x_3, \alpha),$$

и введем обозначение $\lambda_1\cos\alpha + \lambda_2\sin\alpha = -\lambda_3$.

Уравнение (3) примет вид

$$v(\lambda) = e^{ix_3\lambda_3}\psi(\lambda, \alpha), \tag{4}$$

где $v(\lambda)$ — преобразование Фурье от функции $w(\lambda_1, \lambda_2, x_3)$ по переменной x_3.

Рассмотрим в пространстве переменных Фурье $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ двуполостной конус $\mathscr{K} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 : |\bar{\lambda}| = |\lambda_3|\}$ с вершиной в начале координат. Обозначим $\widetilde{\mathscr{K}} = \{\lambda \in \mathbb{R}^3 : |\bar{\lambda}| < |\lambda_3|\}$.

Учитывая, что (4) имеет место для всех $\alpha \in [0; 2\pi]$ и $\psi(\bar{\lambda}, x_3, \alpha)$ — преобразование Фурье по переменным (x_1, x_2) от заданной функции $f(x, \alpha)$, заключаем, что значения функции $v(\lambda)$ однозначно определяются из уравнения (4) для всех $\lambda \in \mathbb{R}^3 \setminus \widetilde{\mathscr{K}}$. Таким образом, задача нахождения функции $u(x)$ из уравнения (1) сводится к задаче продолжения значений ее образа Фурье $v(\lambda)$ из $\mathbb{R}^3 \setminus \widetilde{\mathscr{K}}$ во внутренность конуса $\mathscr{K}$.

Рассмотрим сечение $\widetilde{\mathscr{K}}$ некоторой плоскостью $\mathscr{P} = \{\lambda : \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^2,\ \lambda_3 = \lambda_3^*\}$. Значения функции $v(\lambda)$ известны для всех λ, лежащих за пределами открытого круга $\mathscr{B}$ с центром в точке $(0, 0, \lambda_3^*)$:

$$\mathscr{B} = \{\lambda : \lambda_3 = \lambda_3^*,\ |\bar{\lambda}| < |\lambda_3^*|\}.$$

Рассмотрим продолжение функции $v(\lambda)$ внутрь круга $\mathscr{B}$. Для этого на плоскости $\mathscr{P}$ возьмем произвольную прямую $\mathscr{A}$, проходящую через точку $(0, 0, \lambda_3^*)$; $\mathscr{A} = \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2 \cup \mathscr{Y}$, где лучи $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ лежат в $\mathscr{P} \setminus \mathscr{B}$, интервал $\mathscr{Y}$ содержится в $\mathscr{B}$. Не теряя общности, можно считать, что прямая $\mathscr{A}$ совпадает с прямой $\{\lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = \lambda_3^*\}$.

Учитывая условие $\operatorname{supp} u \subset \Omega$, заключаем, что функцию $v(\lambda)$ можно аналитически продолжить по первому аргументу в комплексную плоскость. Значит, исходная задача интегральной геометрии сводится к следующей задаче аналитического продолжения: определить на интервале $\{\nu \in \mathbb{C} : |\nu|_1 < \lambda_3^*, \nu_2 = 0\}$ функцию $v(\nu_1 + i\nu_2)$, аналитическую во всей комплексной плоскости, если известны ее значения на лучах $L_1 = \{(\nu_1, \nu_2) : \nu_1 \geq \lambda_3^*,\ \nu_2 = 0\}$ и $L_2 = \{(\nu_1, \nu_2) : \nu_1 \leq -\lambda_3^*,\ \nu_2 = 0\}$.

Решение этой задачи, как известно (см., например, [15]), единственно. Отсюда вытекает справедливость утверждения теоремы 1.

2. Оценка устойчивости. Вначале сформулируем одно вспомогательное утверждение, которое понадобится для вывода оценки устойчивости решения задачи. Доказательство этого утверждения приводится в п. 3.

В комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим полосу

$$S = \{z = z_1 + iz_2 : z_1 \in \mathbb{R}^1,\ |z_2| < a\pi, a > 0\}$$

и лучи

$$r_1 = \{z : -\infty < z_1 \leq -a,\ z_2 = 0\}, \quad r_2 = \{z : a \leq x < \infty,\ y = 0\}.$$

Пусть $G = S \setminus \{r_1 \cup r_2\}$. Иначе говоря, область G — полоса S с вырезами по лучам r_1 и r_2.

Введем обозначения: $E = r_1 \cup r_2$, $\overline{G}$ — замыкание области G, ∂G — граница области G, $\omega = \omega(z, E, G)$ — гармоническая мера множества E относительно области G.

Лемма. *Для $\omega = \omega(z, E, G)$ справедлива оценка*

$$\frac{2}{3} < \omega(z, E, G) \leq 1. \tag{5}$$

В пространстве функций $f(x, \alpha)$ введем норму

$$\|f(x_1, x_2, y, \alpha\|_1 = \|f_1(x_1 - x_3 \cos\alpha, x_2 - x_3 \sin\alpha, \alpha)\|_{\mathbb{C}(\mathscr{D})}.$$

Теорема 2. *Пусть функция $u(x,y)$ принадлежит классу $C_0^5(\Omega)$ и выполняются неравенства*

$$\|u(\cdot)\|_{C_0^5(\Omega)} < 1, \quad \|f(\cdot)\|_1 < \varepsilon,$$

$\varepsilon > 0$ достаточно мало́. Тогда имеет место следующая оценка условной устойчивости решения задачи интегральной геометрии (1):

$$\|u(\cdot)\|_{\mathbb{C}} < a_1 \left|\ln \frac{1}{\varepsilon}\right|^{-1},$$

где a_1 — некоторая постоянная.

Доказательство. Аналогично тому, как это делалось выше, оценка устойчивости решения исходной задачи интегральной геометрии (1) может быть найдена путем сведения к задаче аналитического продолжения функции $v(\nu_1 + i\nu_2)$ в полосе $\Pi = \{(\nu_1,\nu_2) : \nu_1 \in \mathbb{R}^1,\ |\nu_2| < a\pi,\ 0 < a < \infty\}$ с лучей

$$p_1 = \{(\nu_1,\nu_2) : \nu_1 \geq a,\ \nu_2 = 0\}, \quad p_2 = \{(\nu_1,\nu_2) : \nu_1 \leq -a,\ \nu_2 = 0\}$$

на интервал $\{(\nu_1,\nu_2) : -a < \nu_1 < a, \quad \nu_2 = 0\}$.

Обозначим через Λ область $\Pi \setminus \{p_1 \cup p_2\}$. Гармоническая мера множества $\{p_1 \cup p_2\}$ относительно области Λ есть $\omega = \omega(\nu, p_1 \cup p_2, \Lambda)$.

Из леммы вытекает оценка гармонической меры ω:

$$\frac{2}{3} < \omega(\nu, p_1 \cup p_2, \Lambda) \leq 1. \tag{6}$$

Функция $v(\nu)$ удовлетворяет условиям теоремы о двух константах (см. [16]), следовательно, учитывая неравенство (6), имеем

$$|v(\nu)| < \varepsilon_1{}^{\frac{2}{3}} M_1{}^{\frac{1}{3}}, \quad \nu \in \Pi, \tag{7}$$

где ε_1 и M_1 — оценки сверху модуля функции $v(\nu,\lambda_2,\lambda_3)$ на лучах p_1, p_2 и на прямых $\{\nu : \nu_1 \in \mathbb{R}^1,\ \nu_2 = -a\pi\}$, $\{\nu : \nu_1 \in \mathbb{R}^1,\ \nu_2 = a\pi\}$ соответственно.

Оценим сверху по модулю функцию $v(\nu,\lambda_2,\lambda_3)$ (при фиксированных λ_2 и λ_3) на лучах p_1 и p_2.

Образ Фурье функции $\psi(\cdot)$ находится по формуле

$$\psi(\bar{\lambda}, x_3, \alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle\bar{\lambda},\bar{x}\rangle} f(x,\alpha)\, d\bar{x}.$$

Из финитности функции $u(\cdot)$ следует, что функция $f(\cdot)$ при фиксированном y финитна по первым двум аргументам и выполняется неравенство

$$|\psi(\bar{\lambda}, x_3, \alpha)| \leq \left| \int\limits_{|\bar{x}|<a_r} e^{i\langle\bar{\lambda}\bar{x}\rangle} f(x,\alpha)\, d\bar{x} \right|, \tag{8}$$

где a_r — некоторая постоянная, не зависящая от x_3.

Действительно, из (4) следует, что $|\psi(\bar{\lambda}, x_3, \alpha)| = |v(\lambda)|$. Правая (а следовательно, и левая) часть этого равенства не зависит от переменной x_3. Отсюда, учитывая условия на функцию $f(\cdot)$ и используя неравенство (8), получим, что на лучах p_1 и p_2

$$|v(\lambda)| < a_2\varepsilon, \tag{9}$$

где a_2 — некоторая константа.

Теперь найдем M_1 — оценку сверху для $|v(\cdot)|$ на границе полосы П. При фиксированных (λ_2, λ_3)

$$v(\nu_1 + i\nu_2, \lambda_2, \lambda_3) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{i(\nu_1+i\nu_2)x_1} \hat{\hat{u}}(x_1, \lambda_2, \lambda_3)\, dx_1,$$

где $\hat{\hat{u}}(x_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — преобразование Фурье от функции $u(x)$ по переменным x_2, x_3.

В силу финитности функции $u(\cdot)$ заключаем, что

$$v(\nu_1 + i\nu_2, \lambda_2, \lambda_3) = \int\limits_{-1}^{1} e^{i(\nu_1+i\nu_2)x_1} \hat{\hat{u}}(x_1, \lambda_2, \lambda_3)\, dx_1. \tag{10}$$

В правой части последнего выражения подынтегральная функция $\hat{\hat{u}}(x_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ограничена по модулю сверху некоторой константой:

$$\left|\hat{\hat{u}}(x_1, \lambda_2, \lambda_3)\right| < a_3. \tag{11}$$

Учитывая, что $\nu \in \Pi$, из (10) и (11) получим

$$|v(\cdot)| \le a_3 \int\limits_{-1}^{1} e^{a\pi x_1}\, dx_1$$

или

$$|v(\cdot)| < \frac{a_3}{a\pi} e^{a\pi}. \tag{12}$$

В результате из (7), (9) и (12) вытекает, что

$$|v| < a_2 \varepsilon^{\frac{2}{3}} \left(\frac{a_3}{a\pi}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}a\pi} = a_4 a^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}a\pi} \varepsilon^{\frac{2}{3}}, \tag{13}$$

где $a_4 = \left(a_2^2 a_3/\pi\right)^{\frac{1}{3}}$.

В пространстве переменных Фурье λ_1, λ_2, λ_3 обозначим через $\mathscr{G}_R$ шар $\mathscr{G}_R = \{\lambda : |\lambda| < R,\ 0 < R < \infty\}$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left|\frac{1}{8\pi^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i\langle\lambda,x\rangle} v(\lambda)\, d\lambda\right| \\ &< \left|\frac{1}{8\pi^3} \int\limits_{\mathscr{G}_R} e^{-i\langle\lambda,x\rangle} v(\lambda)\, d\lambda\right| + \left|\frac{1}{8\pi^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{G}_R} e^{-i\langle\lambda,x\rangle} v(\lambda)\, d\lambda\right|. \end{aligned} \tag{14}$$

Из условий, которым удовлетворяет функция $u(\cdot)$, ясно, что

$$|v(\lambda)| < \frac{a_5}{p^5}, \tag{15}$$

где a_5 — некоторая константа, $p = |\lambda|$. Учитывая очевидные неравенства

$$\left|\int\limits_{\mathscr{G}_R} e^{-i\langle\lambda,x\rangle} v(\lambda)\, d\lambda\right| < \int\limits_{\mathscr{G}_R} |v(\lambda)|\, d\lambda, \quad \left|\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{G}_R} e^{-i\langle\lambda,x\rangle} v(\lambda)\, d\lambda\right| < \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{G}_R} |v(\lambda)|\, d\lambda$$

и используя для оценки сверху первого слагаемого из правой части неравенства (14) соотношение (13), а для второго слагаемого — формулу (15), получим

$$|u(x)| < a_6 \mathscr{H}^{\frac{8}{3}} e^{\frac{1}{3}\pi\mathscr{H}} \varepsilon^{\frac{2}{3}} + \frac{a_7}{\mathscr{H}},$$

где a_6, a_7 — постоянные, $\mathscr{H} = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Получим оценку сверху для суммы из правой части этого неравенства. Для этого подберем $\mathscr{H}$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$a_6 \mathscr{H}^{\frac{8}{3}} e^{\frac{1}{3}\pi\mathscr{H}} \varepsilon^{\frac{2}{3}} = \frac{a_7}{\mathscr{H}}.$$

Оценивая порядок главной части $\mathscr{H}$, в итоге приходим к неравенству

$$|u(x)| < a_1 \left| \ln \frac{1}{\varepsilon} \right|^{-1}.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Переход от оценки (13) к оценке устойчивости решения уравнения (1) осуществляется аналогично тому, как это делалось в работе [17].

Замечание 2. Полученные результаты легко распространяются на случай образующих более общего семейства конусов вида

$$\sum_{m=1}^{2} a_m^2 (x_m - \xi_m)^2 = (y - \eta)^2, \quad 0 \le \eta \le y, \quad \text{где } a_m \in \mathbb{R}^1.$$

Можно рассмотреть также обобщение задачи решения уравнения (1), когда направляющими конусов являются гладкие замкнутые выпуклые плоские кривые.

3. Доказательство леммы. Предварительно осуществим конформное отображение $\overline{G}$ в верхнюю полуплоскость $\mathbf{W}_+ = \{w = w_1 + iw_2 : w_1 \in \mathbb{R}^1,\ w_2 \ge 0\}$ с помощью функции

$$w(z) = \left(\frac{\exp(z\pi/h) - \exp(a\pi/h)}{\exp(z\pi/h) - \exp(-a\pi/h)} \right)^{1/2},$$

где h будет определено ниже. При этом отображении интервал действительной оси $I = \{z : |z_1| < a,\ z_2 = 0\}$ переходит в мнимую полуось $\mathscr{H}_+ = \{w : w_1 = 0,\ w_2 > 0\}$, ∂G — в действительную ось, причем множество $E = r_1 \cup r_2$ переходит в следующее подмножество действительной оси:

$$E_1 = \{w : -\infty < w_1 \le -\exp(a\pi/h),\ w_2 = 0\} \cup \{w : |w_1| \le 1,\, w_2 = 0\} \cup \{w : \exp(a\pi/h) \le w_1 < \infty,\ w_2 = 0\}.$$

По принципу гармонической меры (см. [16])

$$\omega(z, E, G) = \omega(w(z), E_1, \mathbf{W}_+). \tag{16}$$

Гармоническая мера из правой части (16), как известно (см. [18]), может быть построена с помощью интеграла Пуассона для верхней полуплоскости $\mathbf{W}_+$:

$$\omega(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) \frac{w_2\, dt}{(t - w_1)^2 + w_2^2}. \tag{17}$$

Учитывая, что при конформном отображении $w = w(z)$ множество I переходит в $\mathscr{H}_+$, без ограничения общности можно считать, что точка $w(z)$ лежит на мнимой полуоси $\mathscr{H}_+$, т. е. $w = iw_2$, $w_2 > 0$.

Это означает, что для построения гармонической меры $\omega(w(z), E_1, \mathbf{W}_+)$ необходимо знать сумму углов, под которыми из произвольной точки мнимой полуоси $w = iw_2$, $w_2 > 0$ видны множества

$$E_{11} = \{w : -\infty < w_1 \le \exp(-a\pi/h),\ w_2 = 0\}, \quad E_{12} = \{w : |w_1| \le 1,\ w_2 = 0\},$$

$$E_{13} = \{w : \exp(a\pi/h) \le w_1 < \infty,\ w_2 = 0\}.$$

Используя (17), получим

$$\omega(w(z), E_1, \mathbf{W}_+) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{w_2(\exp(a\pi/h) - 1)}{(w_2)^2 + \exp(a\pi/h)}\right). \tag{18}$$

Рассмотрим функцию

$$g(w_2) = \operatorname{arctg}\frac{w_2(\exp(a\pi/h) - 1)}{(w_2)^2 + \exp(a\pi/h)}.$$

При $h = a\pi$ функция $g(w_2)$ имеет следующий вид:

$$g(w_2) = \operatorname{arctg}\frac{w_2(e-1)}{(w_2)^2 + e}.$$

Из последнего выражения легко усмотреть, что при $h = a\pi$ функция $g(w_2)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \le g(w_2) \le \operatorname{arctg}\frac{e-1}{2\exp(1/2)}. \tag{19}$$

Из (16), (18) и (19) вытекает следующая оценка гармонической меры $\omega(z, E, G)$:

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{e-1}{2\exp(1/2)}\right) \le \omega \le 1.$$

Отсюда легко получить, что

$$\frac{2}{3} < \omega(z, E, G) \le 1.$$

Лемма 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хелгасон С.* Преобразования Радона. М.: Мир, 1966.
2. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
3. *Tuy H. K.* An inversion formula for cone-beam reconstruction // SIAM J. Appl. Math. 1983. V. 43. P. 546–552.
4. *Finch D. V.* Cone beam reconstruction with sources on a curve // SIAM J. Appl. Math. 1985. V. 45. P. 665–673.
5. *Grangeat P.* Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform // Mathematical methods in tomography. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1991.
6. *Natterer F.* Recent developments in X-ray tomography // Tomography, Impedance Imaging, and Integral Geometry. Amer. Math. Soc. 1994. P. 177–198. (Lectures in Appl. Math.; V. 30).
7. *Palamodov V. P.* Some mathematical aspects of 3D X-ray tomography // Tomography, Impedance Imaging, and Integral Geometry. Amer. Math. Soc. 1994. P. 199–210. (Lectures in Appl. Math.; V. 30).
8. *Кириллов А. А.* Об одной задаче И. М. Гельфанда // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 2. С. 276–277.

9. *Благовещенский А. С.* О восстановлении функции по известным интегралам от нее, взятым вдоль линейных многообразий // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 6. С. 841–849.

10. *Гельфанд И. М., Гончаров А. Б.* Восстановление финитной функции, исходя из ее интегралов по прямым, пересекающим данное множество точек в пространстве // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. С. 1037–1040.

11. *Успенский С. В.* О восстановлении функции, заданной интегралами по одному семейству конических поверхностей // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 3. С. 675–684.

12. *Бегматов Акр. Х.* Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 2. С. 243–247.

13. *Бегматов Акр. Х.* Задачи интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 500–505.

14. *Бегматов Акр. Х.* Вольтерровские задачи интегральной геометрии на плоскости для кривых с особенностями // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 4. С. 723–737.

15. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1991.

16. *Бухгейм А. Л.* Об одном классе операторных уравнений Вольтерра первого рода // Функцион. анализ и его приложения. 1972. Т. 6, № 1. С. 1–9.

17. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.

18. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1986.

Статья поступила 5 января 1999 г.

Бегматов Акрам Хасанович
Самаркандский гос. университет, Университетский бульвар, 15, Самарканд 703004, Узбекистан