Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 512.66

О ГРУППАХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЙ В КАТЕГОРИИ КОММУТАТИВНЫХ ДИАГРАММ

А. А. Хусаинов

Аннотация: Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория, $\mathscr{P}$ — собственный класс коротких точных последовательностей в $\mathscr{A}$, C — конечное частично упорядоченное множество, $C\mathscr{P}$ — класс таких коротких точных последовательностей $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ в категории функторов $C \to \mathscr{A}$, что последовательности $0 \to F'(c) \to F(c) \to F''(c) \to 0$ принадлежат $\mathscr{P}$ для всех $c \in C$. Для $A \in \mathscr{A}$ и $c \in C$ обозначим через $A[c] : C \to \mathscr{A}$ функтор, принимающий значения $A[c](x) = A$ на $x = c$ и $A[c](x) = 0$ при $x \neq c$. Для произвольной абелевой группы G обозначим через $\widetilde{H}^n(C, G)$ приведенные группы когомологий нерва частично упорядоченного множества C.

Теорема. *Для любых объектов $A, B \in \mathscr{A}$ и элементов $a < b$ из C существует спектральная последовательность первой четверти с начальным членом*

$$E_2^{p,q} = \widetilde{H}^{p-2}(]a,b[, Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B)),$$

сходящаяся к градуированной абелевой группе $\{Ext^n_{C\mathscr{P}}(A[a], B[b])\}_{n\geq 0}$. Здесь $]a,b[= \{x \in C : a < x < b\}$.

С помощью этой теоремы обобщены результаты ряда авторов о строении групп расширений в категории модулей над алгеброй инцидентности и о глобальной размерности категории функторов, определенных на конечном частично упорядоченном множестве. Библиогр. 21.

Работа посвящена относительной глобальной размерности категории коммутативных диаграмм в абелевой категории. Строится спектральная последовательность, с помощью которой обобщаются результаты, полученные ранее Б. Митчелом, Ч. Ч. Ченгом и автором. В случае категории диаграмм векторных пространств эта спектральная последовательность приводит к изоморфизмам, установленным впервые Б. Паршаллом и Л. Скоттом и широко примененным рядом авторов для исследования групп расширений модулей над алгеброй инцидентности.

1. Введение

Будем придерживаться стандартных определений абелевой категории, собственного класса коротких точных последовательностей, а также групп классов расширений в смысле Ионеды. Эти определения можно найти в [1].

Каждое частично упорядоченное (ч.у.) множество $\mathscr{C}$ будем рассматривать как категорию, объектами которой служат элементы из $\mathscr{C}$, а морфизмами —

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации.

пары элементов $a \le b$ из $\mathscr{C}$. Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная категория. Обозначим через $\mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ категорию функторов $\mathscr{C} \to \mathscr{A}$ и будем называть ее *категорией диаграмм объектов* в $\mathscr{A}$.

Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория, $\mathscr{P}$ — собственный класс коротких точных последовательностей в $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}$ — ч.у. множество. Обозначим через $\mathscr{C}\mathscr{P}$ класс коротких точных последовательностей $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ в $\mathscr{A}^{\mathscr{C}}$, состоящих из функторов $F', F, F'' : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ и естественных преобразований, для которых последовательности $0 \to F'(c) \to F(c) \to F''(c) \to 0$ при всех $c \in \mathscr{C}$ принадлежат $\mathscr{P}$.

Хорошо известно [2], что класс $\mathscr{C}\mathscr{P}$ будет собственным. Пусть $Ext^n_{\mathscr{P}}(A, B)$ для произвольных объектов A и B категории $\mathscr{A}$ обозначают группы относительных расширений [1, § IX.4]. Эти группы определяют аддитивные по каждому аргументу функторы $Ext^n_{\mathscr{P}}(-,=) : \mathscr{A}^{op} \times \mathscr{A} \to Ab$ в категорию абелевых групп и гомоморфизмов.

Глобальной размерностью $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}} \mathscr{A}$ *категории* $\mathscr{A}$ *относительно* $\mathscr{P}$ называется верхняя грань натуральных чисел $n \ge 0$, для которых функтор $Ext^n_{\mathscr{P}}(-,=)$ не равен нулевому. Положим $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}} \mathscr{A} = -1$, если таких чисел $n \ge 0$ нет, и $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}} \mathscr{A} = \infty$, если среди таких чисел нет наибольшего. Если класс $\mathscr{P}$ состоит из всех коротких точных последовательностей в $\mathscr{A}$, то глобальная размерность относительно $\mathscr{P}$ называется просто *глобальной размерностью* и обозначается через $\operatorname{gl.dim} \mathscr{A}$. Например, для произвольного кольца R с 1 глобальная размерность категории Mod_R левых модулей будет равна обычной левой глобальной размерности $\operatorname{l.gl.dim} R$ кольца R.

Задача заключается в вычислении размерности $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}} \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ при заданных $\mathscr{A}$, $\mathscr{P}$ и $\mathscr{C}$. В случае, когда $\mathscr{A} = Mod_K$ — категория модулей над коммутативным кольцом K с 1, каждому ч.у. множеству $\mathscr{C}$ сопоставляется алгебра $|\mathscr{C}| \times |\mathscr{C}|$–матриц $(\alpha_{p,q})$ с коэффициентами из K, равными 0 при $p \not\le q$. Операции определяются как обычные матричные операции. Полученная алгебра называется алгеброй инцидентности $[K\mathscr{C}]$ ч.у. множества $\mathscr{C}$. Метод «гомологических крестиков-ноликов» вычисления глобальной размерности категории диаграмм модулей основан на эквивалентности категории $Mod_K^{\mathscr{C}}$ категории левых модулей $Mod_{[K\mathscr{C}]}$ над кольцом инцидентности. Современные работы, посвященные указанной задаче, используют этот метод, рассматривая алгебру инцидентности как фактор-алгебру алгебры путей в колчане [3–5].

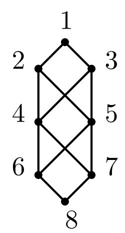
Наиболее полное решение задача получила в следующих случаях. Пусть $\mathscr{C}$ — ч.у. множество. Для любых $y, x \in \mathscr{C}$ обозначим $]y, x[= \{z \in \mathscr{C} : y < z < x\}$. Элемент $x \in \mathscr{C}$ называется *покрывающим для* $y \in \mathscr{C}$, если $y < x$ и $]y, x[= \varnothing$. *Обобщенной m-косой*, $m \ge 1$, называется объединение

$$\mathscr{C} = \bigcup_{k=0}^{m} \mathscr{C}^{(k)}$$

попарно не пересекающихся конечных множеств $\mathscr{C}^{(k)}$ таких, что

$$|\mathscr{C}^{(0)}| = |\mathscr{C}^{(m)}| = 1,$$

упорядоченное таким образом, что при любом $0 \le k \le m-1$ каждый элемент из $\mathscr{C}^{(k+1)}$ является покрывающим для всех элементов из $\mathscr{C}^{(k)}$. В случае $|\mathscr{C}^{(1)}| = \dots = |\mathscr{C}^{(m-1)}| = 2$ это объединение называется просто *m-косой* и обозначается через β_m. Ниже изображены m-коса и элемент алгебры инцидентности $[K\beta_m]$ для $m = 4$, где коэффициенты матрицы, принимающие произвольные (не обязательно равные) значения из K, указаны символами X, а остальные равны нулю:



4-Коса β_4.

$$\begin{pmatrix} X & X & X & X & X & X & X & X \\ 0 & X & 0 & X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X & 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix}.$$

Элемент алгебры $[K\beta_4]$.

Митчел доказал в [2, теорема 5.5], что для произвольных $m \geq 1$, обобщенной m-косы $\mathscr{C}$, абелевой категории $\mathscr{A}$ и собственного класса коротких точных последовательностей $\mathscr{P}$ в $\mathscr{A}$ имеет место соотношение $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}} \mathscr{A}^{\mathscr{C}} = m + \operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}} \mathscr{A}$. Он доказал также в [2] равенство $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}} \mathscr{A}^{\mathscr{C}} = 3 + \operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}} \mathscr{A}$ для n-корон, речь о которых будет идти ниже. Мы увидим, что это равенство имеет место не только для n-корон, но и для всех конечных ч.у. множеств размерности Хохшильда — Митчела 3.

Стоит отметить также результаты статьи [5] о левой глобальной размерности кольца инцидентности множества клеток регулярного клеточного разбиения сферы и об алгоритме оценки левой глобальной размерности алгебры инцидентности [6]. В работе [7] проведены наиболее общие исследования $\operatorname{gl.dim} \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$. Об относительной глобальной размерности категории диаграмм известно мало. Автор надеется, что данная работа восполнит этот пробел.

Пусть $\mathscr{C}$ — ч.у. множество, $\mathscr{A}$ — абелева категория, $A \in \mathscr{A}$ — ее объект. Для произвольного элемента $c \in \mathscr{C}$ обозначим через $A[c] : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ функтор, принимающий значения

$$A[c](x) = \begin{cases} A & \text{при } x = c, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Для произвольной абелевой группы A обозначим через $\widetilde{H}^n(\mathscr{C}, A)$ приведенные группы когомологий нерва ч.у. множества $\mathscr{C}$ с коэффициентами в A. Каждое подмножество ч.у. множества $\mathscr{C}$ будем рассматривать как упорядоченное отношением, равным ограничению отношения порядка ч.у. множества $\mathscr{C}$.

Основная теорема. *Пусть $\mathscr{C}$ — конечное ч.у. множество, $\mathscr{A}$ — абелева категория, $\mathscr{P}$ — собственный класс коротких точных последовательностей в $\mathscr{A}$. Тогда для любых объектов $A, B \in \mathscr{A}$ и элементов $a < b$ из $\mathscr{C}$ существует спектральная последовательность первой четверти типа*

$$E_2^{p,q} = \widetilde{H}^{p-2}\big(]a, b[, Ext^q_{\mathscr{P}}(A, B)\big),$$

сходящаяся к градуированной абелевой группе $\big\{Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(A[a], B[b])\big\}_{n \geq 0}$.

В частности, если $\mathscr{A}$ — категория левых модулей над кольцом K с 1, а $\mathscr{P}$ — класс всех коротких точных последовательностей в $\mathscr{A}$, то эта теорема приводит к изоморфизмам

$$\widetilde{H}^{n-2}(]a, b[, K) \cong Ext^n(K[a], K[b]) \quad \forall n \geq 2, \tag{2}$$

полученным в [3, предложение 2.1]. В случае поля эти изоморфизмы были установлены в [8]. Другое доказательство и дальнейшие приложения рассматривались П. Поло [4]. К. Игуса и Д. Захария [6] положили изоморфизмы (2) в основу исследования глобальной размерности категории диаграмм векторных пространств.

В данной работе спектральная последовательность (1) будет применена для исследования (относительной) глобальной размерности категории функторов, определенных на конечном ч.у. множестве и принимающих значения в произвольной абелевой категории.

2. Приведенные группы когомологий открытых интервалов

Для произвольных малой категории $\mathscr{C}$ и категории $\mathscr{A}$ диаграммами объектов категории $\mathscr{A}$ на $\mathscr{C}$ называются функторы $\mathscr{C} \to \mathscr{A}$. Наряду с обозначением $F : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ для диаграмм будем использовать запись $\{F(c)\}_{c\in\mathscr{C}}$ или $\{F(c)\}$.

Далее везде Ab — категория абелевых групп и гомоморфизмов, $\lim_{\mathscr{C}} : Ab^{\mathscr{C}} \to Ab$ — функтор предела. Этот функтор каждой диаграмме $\{F(c)\}_{c\in\mathscr{C}}$ сопоставляет абелеву группу, состоящую из нитей — семейств $\{x_c\}_{c\in Ob\mathscr{C}}$ элементов $x_c \in F(c)$, удовлетворяющих для каждого морфизма $\alpha : a \to b$ из $\mathscr{C}$ соотношению $F(\alpha)(x_a) = x_b$. Функтор $\lim_{\mathscr{C}}$ точен слева, категория $Ab^{\mathscr{C}}$ абелева и обладает достаточным числом инъективных объектов. Стало быть, для всех натуральных чисел $n \geq 0$ определены правые производные $\lim^n_{\mathscr{C}} : Ab^{\mathscr{C}} \to Ab$ функтора предела.

Категорией факторизаций [9] $\mathscr{C}'$ малой категории $\mathscr{C}$ называется категория, объектами которой служат все морфизмы категории $\mathscr{C}$, а множества морфизмов которой $\alpha \to \beta$ между $\alpha, \beta \in Mor\mathscr{C} = Ob\mathscr{C}'$ состоят из всех пар (f, g) морфизмов из $\mathscr{C}$ таких, что $g \circ \alpha \circ f = \beta$. Композиция и тождественные морфизмы в $\mathscr{C}'$ определяются покомпонентно. Определен функтор $(s, t) : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C}$, сопоставляющий каждому объекту $\alpha \in \mathscr{C}'$, т. е. морфизму категории $\mathscr{C}$, пару $(s\alpha, t\alpha)$, состоящую из начала $s\alpha$ и конца $t\alpha$ морфизма α. На морфизмах из $\mathscr{C}'$ функтор (s, t) действует как $(f, g) \mapsto (f, g)$. Функторы $F : \mathscr{C}' \to Ab$ называются натуральными системами на категории $\mathscr{C}$ [9].

Если $\mathscr{C}$ — ч.у. множество, то категория $\mathscr{C}'$ изоморфна упорядоченному по включению множеству замкнутых интервалов $[a, b] = \{x \in \mathscr{C} : a \leq x \leq b\}$ в $\mathscr{C}$. Пусть $\mathscr{C}$ — ч.у. множество, A — абелева группа, $a \leq b$ — элементы из $\mathscr{C}$. Тогда $A[a \leq b] : \mathscr{C}' \to Ab$ — натуральная система на $\mathscr{C}$, принимающая значения

$$A[a \leq b](x \leq y) = \begin{cases} A & \text{при } a = x \ \&\ b = y, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Выразим $\lim^n_{\mathscr{C}'} A[a \leq b]$ через приведенные группы когомологий интервала $]a, b[$. Будем придерживаться определений и обозначений из работы [7, § 3]. Напомним, что $\Delta_{\mathscr{C}} A : \mathscr{C} \to Ab$ обозначает диаграмму, принимающую постоянные значения, равные A на объектах из $\mathscr{C}$ и $1_A : A \to A$ на морфизмах. Группы $H^n(\mathscr{C}, A)$ когомологий нерва ч.у. множества $\mathscr{C}$ изоморфны группам $\lim^n_{\mathscr{C}} \Delta_{\mathscr{C}} A$. Пусть pt — ч.у. множество, состоящее из единственной точки. Существует единственное отображение $S : \mathscr{C} \to pt$. Оно определяет гомоморфизмы $H^n(pt, A) \to H^n(\mathscr{C}, A)$. Пусть $\widetilde{H}^n(\mathscr{C}, A)$ — коядра этих гомоморфизмов при $n \geq 0$. Легко видеть, что $\widetilde{H}^n(\mathscr{C}, A) \cong H^n(\mathscr{C}, A)$ при $n > 0$, а $\widetilde{H}^0(\mathscr{C}, A)$ будет коядром гомоморфизма $A \to \lim_{\mathscr{C}} \Delta_{\mathscr{C}} A$, сопоставляющего каждому $a \in A$ нить, состоящую из элементов, каждый из которых равен a. Положим по определению $\widetilde{H}^{-1}(\varnothing, A) = A$ и $\widetilde{H}^n(\varnothing, A) = 0$ при $n \neq -1$. При $n < -1$ положим $\widetilde{H}^n(\mathscr{C}, A) = 0$.

Пусть $\mathscr{C}$ — ч.у. множество. Для каждого $z \in \mathscr{C}$ обозначим $W(z, \mathscr{C}) = \{x \in \mathscr{C} : x < z\}$. Для любого подмножества $X \subseteq \mathscr{C}$ положим $X/z = \{x \in X : x \leq z\}$, $z/X = \{x \in X : z \leq x\}$. Подмножество $W \subseteq \mathscr{C}$ называется открытым, если оно вместе с любым своим элементом $z \in W$ содержит все элементы $y \in \mathscr{C}$, удовлетворяющие соотношению $y > z$. Дополнение к открытому подмножеству называется замкнутым. Если W — пересечение открытого и замкнутого подмножеств, то для произвольной абелевой группы обозначим через $A[W] : \mathscr{C} \to Ab$ диаграмму, для которой $A[W]|_W = \Delta_W A$ и $A[W]|_{\mathscr{C} \setminus W} = 0$.

Лемма 2.1. *Для любых абелевой группы A, ч.у. множества $\mathscr{C}$, элемента $z \in \mathscr{C}$ и натурального числа $n \geq 0$ существуют изоморфизмы*

$$\lim{}^n_{\mathscr{C}} A[z] \cong \widetilde{H}^{n-1}(W(z, \mathscr{C}), A).$$

Доказательство. При $n \geq 2$ утверждение доказано в [7, лемма 3.1]. Остается доказать лемму для $n = 0$ и $n = 1$. Если z — минимальный элемент из $\mathscr{C}$, то $\lim{}^n_{\mathscr{C}} A[z] = 0$ для всех $n > 0$, а $\lim_{\mathscr{C}} A[z] = A$. Если z не является минимальным, то $\lim_{\mathscr{C}} A[z] = 0$, это доказывает утверждение при $n = 0$. При $V = \mathscr{C}/z$ и $W = W(z, \mathscr{C})$ точна последовательность

$$0 \longrightarrow A[z] \longrightarrow \Delta_V A \longrightarrow A[W] \longrightarrow 0.$$

Применяя к ней функтор $\lim_V$, получим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \lim_V A[z] \longrightarrow \lim_V \Delta_V A \longrightarrow \lim_V A[W] \longrightarrow \lim{}^1_V A[z] \longrightarrow 0.$$

Так как нити из $\lim_V \Delta_V A$ исчерпываются постоянными, то $\lim_V \Delta_V A = A$. Отсюда группа $\lim{}^1_V A[z]$ будет изоморфна коядру гомоморфизма $A \to \lim_V A[W] = \lim_W A[W]$, сопоставляющего каждому $a \in A$ нить, состоящую из элементов, равных a. Значит, $\lim{}^1_V A[z] \cong \widetilde{H}^0(W, A)$. В доказательстве [7, лемма 3.1] замечено, что $\lim{}^n_V A[z] \cong \lim{}^n_{\mathscr{C}} A[z]$ для всех $n \geq 0$. Следовательно, $\lim{}^1_{\mathscr{C}} A[z] \cong \widetilde{H}^0(W, A)$. Доказательство леммы закончено.

Пусть X и Y — ч.у. множества. Их *ординальной суммой* $X + Y$ называется множество $X \coprod Y$, которое упорядочено так, что каждый элемент из X меньше всех элементов из Y, а в каждом из подмножеств X и Y порядок сохраняется. Произведение $X^{op} \times Y$ ч.у. множеств будем рассматривать как подмножество из $(X + Y)'$, состоящее из пар $x < y$ элементов $x \in X$ и $y \in Y$.

Монотонное отображение $f : X \to Y$ ч.у. множеств называется строго коинициальным, если для каждого $y \in Y$ группы целочисленных гомологий нерва подмножества $\{x \in X : f(x) \leq y\}$ изоморфны группам целочисленных гомологий точки. По теореме Оберста [10], если f — строго коинициально, то $\lim{}^n F \cong \lim{}^n F \circ f$ для любого функтора $F : Y \to Ab$.

Лемма 2.2. *Пусть X и Y — ч.у. множества. Тогда для любого функтора $T : (X + Y)' \to Ab$ такого, что $T|_{X'} = 0$ и $T|_{Y'} = 0$, имеют место изоморфизмы*

$$\lim T \cong 0, \ \lim{}^1 T \cong \lim T|_{X^{op} \times Y}, \dots, \lim{}^n T \cong \lim{}^{n-1} T|_{X^{op} \times Y} \quad \forall\, n \geq 1.$$

Доказательство. В работе [11, § 5] установлено, что вложения $X' \subseteq X' \cup (X^{op} \times Y)$ и $Y' \subseteq Y' \cup (X^{op} \times Y)$ строго коинициальны. Отсюда, применяя

[11, лемма 5.1] к покрытию ч.у. множества $\mathscr{C} = (X+Y)'$ подмножествами $U = X' \cup (X^{op} \times Y)$ и $V = Y' \cup (X^{op} \times Y)$, пользуясь строгой коинициальностью вложений $X' \subseteq U$ и $Y' \subseteq V$, приходим к точной последовательности

$$0 \longrightarrow \lim T \longrightarrow \lim T|_{X'} \oplus \lim T|_{Y'} \longrightarrow \lim T|_{X^{op}\times Y} \longrightarrow \dots$$

$$\longrightarrow \lim{}^n T \longrightarrow \lim{}^n T|_{X'} \oplus \lim{}^n T|_{Y'} \longrightarrow \lim{}^n T|_{X^{op}\times Y} \longrightarrow \dots .$$

Но по условию леммы $T|_{X'} = 0$ и $T|_{Y'} = 0$. Отсюда получаем искомые изоморфизмы.

Лемма 2.3. *Пусть $\mathscr{C}$ — ч.у. множество, A — абелева группа. Тогда для любых элементов $a < b$ из $\mathscr{C}$ имеют место изоморфизмы*

$$\lim{}^n_{\mathscr{C}'} A[a<b] \cong \widetilde{H}^{n-2}(]a,b[, A) \quad \forall n \geq 0.$$

Если $a = b$, то группы $\lim{}^n A[a \leq b]$ равны нулю при $n > 0$, а при $n = 0$ имеет место равенство $\lim A[a \leq b] = A$.

Замечание 2.1. В частности, при $]a,b[= \varnothing$ имеет место изоморфизм

$$\lim{}^1 A[a<b] \cong \widetilde{H}^{-1}(\varnothing, A) = A.$$

Доказательство. Для $n \geq 3$ утверждение доказано в работе [7, лемма 3.2]. Вновь вспомнив [7, лемма 3.1], получим $\lim{}^n_{\mathscr{C}'} A[a \leq b] \cong \lim{}^n_{[a,b]'} A[a \leq b]$. Пусть $a < b$. Положим $X = [a,b[= \{x \in \mathscr{C} : a \leq x < b\}$ и $Y = \{b\}$. Применим лемму 2.2. Получим

$$\lim{}^n_{[a,b]'} A[a<b] \cong \lim{}^{n-1}_{[a,b[^{op}\times\{b\}} A[a<b] \cong \lim{}^{n-1}_{[a,b[^{op}} A[a] \cong \widetilde{H}^{n-2}(]a,b[, A)$$

при $a \neq b$. Если $a = b$, то $\lim_{[a,b]'} A[a \leq b] = 0$ при $n > 0$. При $n = 0$ утверждение леммы очевидно, ибо $\lim_{\mathscr{C}'} A[a<b] = 0$. Лемма доказана.

Следствие 2.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — непустое недискретное конечное ч.у. множество, $d(\mathscr{C})$ — верхняя грань чисел n, для которых существуют такие интервалы $]a,b[$, что $\widetilde{H}^{n-2}(]a,b[, \mathbf{Z}) \neq 0$. Тогда $d(\mathscr{C}) = \dim \mathscr{C}$.*

3. Группы расширений в категории диаграмм

М. А. Джибладзе и Т. И. Пирашвили [12, 13] установили, что в случае категории $\mathscr{A} = Mod_R$ левых R–модулей над произвольным кольцом R с 1 для любых функторов $F, G : \mathscr{C} \to Mod_R$ существует спектральная последовательность с начальным членом

$$E_2^{p,q} = \lim{}^p_{\mathscr{C}'} \{Ext^q(F(s\alpha), G(t\alpha))\}_{\alpha \in \mathscr{C}'},$$

сходящаяся к $\{Ext^n(F,G)\}_{n \geq 0}$.

Автором в работе [14] этот факт был обобщен. Результат работы [14] применен в [15] для решения проблемы Митчела [16, с. 143]. Здесь мы дадим новое доказательство этого важного обобщения.

Для произвольных категории $\mathscr{A}$ и объектов $A, B \in \mathscr{A}$ обозначим через $\mathscr{A}(A,B)$ множество морфизмов $A \to B$. Категория называется *предаддитивной*, если $\mathscr{A}(A,B)$ — абелевы группы для любых объектов $A, B \in \mathscr{A}$, а отображения $\mathscr{A}(f,g) : \mathscr{A}(A,B) \to \mathscr{A}(A',B')$ для любых морфизмов $f : A' \to A, g : B \to B'$ категории $\mathscr{A}$, действующие как $\mathscr{A}(f,g)(\alpha) = g \circ \alpha \circ f$ на $\alpha \in \mathscr{A}(A,B)$, являются гомоморфизмами этих групп.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная предаддитивная категория. Тогда имеют место естественные по $F, G \in \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ изоморфизмы абелевых групп $\lim_{\mathscr{C}'}\{\mathscr{A}(F(s\alpha), G(t\alpha))\} \cong \mathscr{A}^{\mathscr{C}}(F, G)$.*

Доказательство. Каждый элемент предела $\lim_{\mathscr{C}'}\{\mathscr{A}(F(s\alpha), G(t\alpha))\}$ является некоторой нитью, т. е. семейством $\{x_\alpha\}_{\alpha \in Ob(\mathscr{C}')}$ морфизмов $x_\alpha : F(s\alpha) \to G(t\alpha)$, удовлетворяющих соотношениям $\mathscr{A}(F(f), G(g))(x_\alpha) = x_\beta$ для всех морфизмов $(f, g) : \alpha \to \beta$ категории $\mathscr{C}'$. Сопоставляя каждой нити $\{x_\alpha\}_{\alpha \in Ob(\mathscr{C}')}$ семейство морфизмов $x_{1_a} : F(a) \to G(a)$, $a \in Ob(\mathscr{C})$, получаем отображение

$$\phi : \lim_{\mathscr{C}'}\{\mathscr{A}(F(s\alpha), G(t\alpha))\} \to \mathscr{A}^{\mathscr{C}}(F, G).$$

Это отображение будет гомоморфизмом, ибо как сложение нитей, так и сложение естественных преобразований производятся покомпонентно. Сопоставляя каждому естественному преобразованию $\eta : F \to G$ нить $\tilde{\eta}_\alpha = \eta_{t\alpha} \circ F(\alpha) = G(\alpha) \circ \eta_{s\alpha}$, получаем обратное к ϕ отображение. Следовательно, ϕ — изоморфизм.

Пусть заданы абелева категория $\mathscr{A}$ и малая категория $\mathscr{C}$. Обозначим через $O : \mathscr{A}^{\mathscr{C}} \to \mathscr{A}^{Ob\mathscr{C}}$ функтор, сопоставляющий каждой диаграмме $F \in \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ ее ограничение $F|_{Ob\mathscr{C}}$ на дискретную подкатегорию $Ob\mathscr{C}$ категории $\mathscr{C}$. Если $\mathscr{A}$ допускает суммы (под суммами мы будем подразумевать копроизведения), то функтор O обладает левым сопряженным функтором $\Lambda : \mathscr{A}^{Ob\mathscr{C}} \to \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$. Для каждого объекта $A = \{A_c\}_{c \in Ob\mathscr{C}}$ категории $\mathscr{A}^{Ob\mathscr{C}}$ функтор $\Lambda A : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ будет равен левому расширению Кана (в смысле [17]) функтора $A : Ob\mathscr{C} \to \mathscr{A}$ вдоль функтора вложения $Ob\mathscr{C} \subseteq \mathscr{C}$. В частности, $\Lambda A(c) = \sum_{a \to c} A_a$ для всех $c \in \mathscr{C}$. Аналогично если $\mathscr{A}$ допускает произведения, то функтор O обладает правым сопряженным $V : \mathscr{A}^{Ob\mathscr{C}} \to \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$, причем при $A = \{A_c\}_{c \in Ob\mathscr{C}} \in \mathscr{A}^{Ob\mathscr{C}}$ для всех $c \in Ob\mathscr{C}$ будут верны равенства $VA(c) = \prod_{c \to a} A_a$.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория, допускающая суммы и произведения, а $\mathscr{C}$ — малая категория. Тогда для любых $A \in \mathscr{A}^{Ob\mathscr{C}}$ и $G \in \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ имеют место изоморфизмы $\lim^n_{\mathscr{C}'}\{\mathscr{A}(\Lambda A(s\alpha), G(t\alpha))\} = 0 \quad \forall n > 0$.*

Доказательство. Категория $\mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ абелева [1, § IX.3]. Пусть $\mathscr{S}$ — класс всех расщепляемых коротких точных последовательностей, тогда $\mathscr{C}\mathscr{S}$ — класс всех коротких точных последовательностей $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ в категории $\mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ таких, что последовательности $0 \to G'(c) \to G(c) \to G''(c) \to 0$ расщепляемы при всех $c \in Ob\mathscr{C}$. Пара абелевых категорий $\mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ и $\mathscr{A}^{Ob\mathscr{C}}$ вместе с функтором $O : \mathscr{A}^{\mathscr{C}} \to \mathscr{A}^{Ob\mathscr{C}}$ составляют относительную абелеву категорию в смысле Маклейна [1, § IX.5]. Класс $\mathscr{C}\mathscr{S}$ будет классом O-расщепляемых коротких точных последовательностей. Поскольку Λ — левый сопряженный к O, согласно [1, § IX.6] объекты $\Lambda A \in \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ будут относительно проективными. Отсюда любая O-расщепляемая резольвента объекта ΛA, состоящая из относительно проективных объектов категории $\mathscr{A}^{\mathscr{C}}$, расщепляема. Значит, $Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{S}}(\Lambda A, G) = 0$ при $n > 0$. Двойственно, пусть $V_{\mathscr{C}} : \mathscr{A}^{Ob\mathscr{C}} \to \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ — сопряженный справа к O функтор. Тогда для всех $B \in \mathscr{A}^{Ob\mathscr{C}}$ объекты $V_{\mathscr{C}}B \in \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ будут относительно инъективными.

Согласно [1, § IX.6] группы $Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{S}}(F, G)$ при любых $F, G \in \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ и $n \in \mathbb{N}$ изоморфны n-м группам когомологий комплекса $\mathscr{A}^{\mathscr{C}}(F_*, G)$, где F_* — произвольная O-расщепляемая состоящая из относительно проективных объектов резольвента объекта F. В частности, рассмотрим вместо $\mathscr{C}$ категорию $\mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C}$, вместо $\mathscr{A}$ категорию Ab абелевых групп. Пусть $L\mathscr{C} : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to Ab$ — функтор, сопоставляющий каждому объекту $(a, b) \in \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C}$ порожденную множеством $\mathscr{C}(a,b)$ свободную абелеву группу, каждому морфизму (f,g) категории $\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C}$ гомоморфизм, продолжающий отображение $\mathscr{C}(f,g)$. Тогда любая проективная резольвента $(L\mathscr{C})_*$ объекта $L\mathscr{C}\in Ab^{\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C}}$ будет расщепляемой на каждом $(a,b)\in\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C}$. Следовательно,

$$Ext^n_{(\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C})\mathscr{S}}(L\mathscr{C},T)\cong Ext^n(L\mathscr{C},T)$$

для любых $n\in\mathbb{N}$ и $T\in Ab^{\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C}}$. Отсюда вытекает, что если $T=V_{\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C}}D$ для некоторого $D\in Ab^{Ob(\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C})}$, то в силу O-инъективности объекта $V_{\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C}}D$ группы $Ext^n(L\mathscr{C},V_{\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C}}D)$ будут нулевыми при $n>0$. Грубо говоря, если T принимает значения $T(a,b)=\prod_{c\to a,b\to d}D_{(c,d)}$ для некоторого семейства абелевых групп $\{D_{(c,d)}\}$, то $Ext^n(L\mathscr{C},T)=0$ при $n>0$.

Вернемся к произвольным абелевой категории $\mathscr{A}$ с произведениями и суммами, малой категории $\mathscr{C}$ и объекту $A\in\mathscr{A}^{Ob\mathscr{C}}$. В соответствии с [9, предложение 8.5] для всякого функтора $H:\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C}\to Ab$ имеют место изоморфизмы $\lim{}^n_{\mathscr{C}'}(H\circ(s,t))\cong Ext^n(L\mathscr{C},H)$ при $n\in\mathbb{N}$. Стало быть, для любых $B\in\mathscr{A}^{Ob\mathscr{C}}$ и $n\in\mathbb{N}$ верно

$$\lim{}^n_{\mathscr{C}'}\{\mathscr{A}(\Lambda A(s\alpha),V_{\mathscr{C}}B(t\alpha))\}\cong Ext^n(L\mathscr{C},\mathscr{A}(\Lambda A,V_{\mathscr{C}}B)),$$

где $\mathscr{A}(\Lambda A,V_{\mathscr{C}}B):\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C}\to Ab$ — диаграмма, равная

$$\{\mathscr{A}(\Lambda A(a),V_{\mathscr{C}}B(b))\}_{(a,b)\in\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C}}.$$

Легко видеть, что диаграмма $\mathscr{A}(\Lambda A,V_{\mathscr{C}}B)$ изоморфна значению функтора $V_{\mathscr{C}^{op}\times\mathscr{C}}$ на семействе $\{\mathscr{A}(A_a,B_b)\}_{(a,b)\in Ob\mathscr{C}\times Ob\mathscr{C}}$. Отсюда

$$\lim{}^n_{\mathscr{C}'}\{\mathscr{A}(\Lambda A(s\alpha),V_{\mathscr{C}}B(t\alpha))\}=0$$

при $n>0$. Последовательность функторов $G\mapsto\lim{}^n_{\mathscr{C}'}\{\mathscr{A}(\Lambda A(s\alpha),G(t\alpha))\}$ при $n\in\mathbb{N}$ будет составлять отрицательную $\mathscr{C}\mathscr{S}$-связанную последовательность в смысле [1], причем коротким точным O-расщепляемым последовательностям соответствуют длинные точные последовательности. Поскольку для каждого объекта $G\in\mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ существует $\mathscr{C}\mathscr{S}$-мономорфизм $G\to V_{\mathscr{C}}OG$ и

$$\lim{}^n_{\mathscr{C}'}\{\mathscr{A}(\Lambda A(s\alpha),V_{\mathscr{C}}OG(t\alpha))\}=0$$

при $n>0$, то согласно [1, § XII.9, случай IIIb] эта последовательность функторов универсальна. Но по лемме 3.1 в нулевой размерности

$$\lim{}_{\mathscr{C}'}\{\mathscr{A}(\Lambda A(s\alpha),G(t\alpha))\}\cong\mathscr{A}^{\mathscr{C}}(\Lambda A,G).$$

В силу универсальности $\mathscr{C}\mathscr{S}$-связанной последовательности функторов $G\mapsto Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{S}}(\Lambda A,G)$, $n\in\mathbb{N}$, отсюда вытекают изоморфизмы

$$\lim{}^n_{\mathscr{C}'}\{\mathscr{A}(\Lambda A(s\alpha),G(t\alpha))\}\cong Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{S}}(\Lambda A,G)\quad\forall n\in\mathbb{N},$$

при $n>0$ получаем $\lim{}^n_{\mathscr{C}'}\{\mathscr{A}(\Lambda A(s\alpha),G(t\alpha))\}=0$, ибо объекты $\Lambda A\in\mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ относительно проективны.

Предложение 3.3. *Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория с произведениями, суммами и достаточным числом проективных объектов. Тогда для любых малой категории $\mathscr{C}$ и функторов $F,G:\mathscr{C}\to\mathscr{A}$ существует спектральная последовательность первой четверти типа*

$$E_2^{p,q}=\lim{}^p_{\mathscr{C}'}\{Ext^q(F(s\alpha),G(t\alpha))\},\tag{3}$$

сходящаяся к градуированной абелевой группе $\{Ext^n(F,G)\}_{n\geq 0}$.

Доказательство. Для каждого $c \in Ob\mathscr{C}$ выберем проективный объект P_c из $\mathscr{A}$ и эпиморфизм $f_c : P_c \to F(c)$. Функтор Λ как сопряженный слева к точному переводит проективный объект $P = \{P_c\}_{c\in Ob\mathscr{C}}$ категории $\mathscr{A}^{Ob(\mathscr{C})}$ в проективный. Положим $\pi(F) = \Lambda P$. Композицию морфизма

$$\Lambda(\{f_c\}_{c\in Ob\mathscr{C}}) : \Lambda P \longrightarrow \Lambda OF$$

и коединицы сопряжения $\Lambda OF \to F$ обозначим через $\epsilon(F) : \pi(F) \to F$. Положим $F_0 = \pi(F)$, $d_0 = \epsilon(F)$, $F_1 = \pi(\operatorname{Ker} d_0)$, $d_1 = k^0 \circ \epsilon(\operatorname{Ker} d_0)$, $\ldots$, $d_n = k^{n-1} \circ \epsilon(\operatorname{Ker} d_{n-1})$, $\ldots$. Здесь $k^n : \operatorname{Ker} d_n \to F_n$ — канонические инъекции ядер при $n \geq 0$. Последовательность морфизмов

$$0 \longleftarrow F \xleftarrow{d_0} F_0 \longleftarrow \ldots \xleftarrow{d_n} F_n \longleftarrow \ldots$$

будет проективной резольвентой для $F \in \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$. Соответствие $\alpha \mapsto \mathscr{A}(F_*(s\alpha), G(t\alpha))$ будет функтором из категории $\mathscr{C}'$ в категорию положительных комплексов абелевых групп, этот функтор можно рассматривать как комплекс $\{K^*(\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{C}'}$ в категории $Ab^{\mathscr{C}'}$. Рассмотрим спектральные функторы гиперкогомологий в смысле [18, п. 2.4] для функтора $\lim_{\mathscr{C}'} : Ab^{\mathscr{C}'} \to Ab$ по отношению к комплексу $\{K^*(\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{C}'}$ в категории $Ab^{\mathscr{C}'}$. Эти функторы имеют вторые члены соответственно $H^p(\lim^q_{\mathscr{C}'}\{K^*(\alpha)\})$ и $\lim^p_{\mathscr{C}'}\{H^q(K^*(\alpha))\}$ и сходятся к общему пределу.

Но для всякого $n \in \mathbb{N}$ группы $K^n(\alpha)$ равны $\mathscr{A}(F_n(s\alpha), G(t\alpha))$, причем объекты $F_n \in Ab^{\mathscr{C}}$ изоморфны объектам ΛA при некоторых $A \in Ab^{Ob\mathscr{C}}$. Значит, по лемме 3.2 при $q > 0$ группы $\lim^q_{\mathscr{C}'}\{K^n(\alpha)\}$ являются нулевыми. По лемме 3.1

$$\lim_{\mathscr{C}'}\{\mathscr{A}(F_n(s\alpha), G(t\alpha))\} \cong \mathscr{A}^{\mathscr{C}}(F_n, G),$$

откуда члены общего предела этих спектральных последовательностей равны $H^n(\mathscr{A}^{\mathscr{C}}(F_*, G)) \cong Ext^n(F,G)$. С другой стороны, группы

$$H^q(K^*(\alpha)) = H^q(\mathscr{A}(F_*(s\alpha), G(t\alpha)))$$

изоморфны группам $Ext^q(F(s\alpha), G(t\alpha))$ для каждого $\alpha \in Mor\mathscr{C}$. Таким образом, вторая спектральная последовательность будет иметь второй член $E_2^{p,q} = \lim^p_{\mathscr{C}'}\{Ext^q(F(s\alpha), G(t\alpha))\}$ и сходиться к градуированной группе $Ext^n(F,G)$, $n \in \mathbb{N}$.

В формулировке только что доказанного предложения слово «проективных» можно заменить словом «инъективных».

Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория, $\mathscr{P}$ — собственный класс коротких точных последовательностей в $\mathscr{A}$ в смысле [1, § IX.4]. Напомним, что $\mathscr{P}$-эпиморфизмами называются эпиморфизмы, содержащиеся в коротких точных последовательностях из класса $\mathscr{P}$.

Пусть $Lex_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}^{op})$ — категория контравариантных аддитивных функторов $\mathscr{A} \to Ab$, переводящая $\mathscr{P}$-эпиморфизмы в мономорфизмы. Категория $Lex_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}^{op})$ обладает достаточным числом инъективных объектов, допускает суммы и произведения. Следовательно, для любых функторов $F, G : \mathscr{C} \to Lex_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}^{op})$ существует спектральная последовательность с начальным членом

$$\lim^p_{\mathscr{C}'}\{Ext^q(F(s\alpha), G(t\alpha))\},$$

сходящаяся к $\{Ext^n(F,G)\}_{n\geq 0}$.

Предложение 3.4. *Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная абелева категория, $\mathscr{P}$ — собственный класс в $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}$ — ч.у. множество. Тогда если для всех $c \in \mathscr{C}$ множества $\mathscr{C}/c$ конечны, либо для всех $c \in \mathscr{C}$ множества $c/\mathscr{C}$ конечны, то для любых функторов $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ существует спектральная последовательность первой четверти типа*

$$E_2^{p,q} = \lim\nolimits^p_{\mathscr{C}'}\bigl\{Ext^q_{\mathscr{P}}(F(s\alpha), G(t\alpha))\bigr\}, \tag{4}$$

сходящаяся к $\bigl\{Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F, G)\bigr\}_{n\geq 0}$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ — абелева категория. Функтор $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ между абелевыми категориями называется *удовлетворяющим условию Митчела* по отношению к собственному классу $\mathscr{P}$ в $\mathscr{A}$, если прообраз любой точной последовательности из $\mathscr{B}$ принадлежит классу $\mathscr{P}$ и для любых эпиморфизма $f : B' \to B$ из $\mathscr{B}$ и морфизма $T(A) \to B$ существуют $\mathscr{P}$-эпиморфизм $g : A' \to A$ и морфизм $T(A') \to B'$, делающие коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} T(A') & \xrightarrow{T(g)} & T(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

В работе [19] показано, что если $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — удовлетворяющее условию Митчела по отношению к собственному классу $\mathscr{P}$ полное вложение абелевой категории в абелеву, то $Ext^n_{\mathscr{P}}(A, A') \cong Ext^n(T(A), T(A'))$ для всех $n \geq 0$ и $A, A' \in Ob\mathscr{A}$. В частности, вложение $T : \mathscr{A} \to Lex_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}^{op})$, где $T(A)$ — контравариантный представимый функтор $h_A \in Lex_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}^{op})$, действующий как $h_A(-) = \mathscr{A}(-, A)$, будет удовлетворять условию Митчела.

Можно доказать [14], что если для каждого $c \in \mathscr{C}$ множество $Ob(\mathscr{C}/c)$ конечное, а функтор $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ удовлетворяет условию Митчела по отношению к $\mathscr{P}$, то функтор $T \circ (-) : \mathscr{A}^{\mathscr{C}} \to \mathscr{B}^{\mathscr{C}}$ удовлетворяет условию Митчела по отношению к $\mathscr{C}\mathscr{P}$. В этом случае $Ext^n(T \circ F, T \circ G) \cong Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F, G)$ для любых функторов $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$. Стало быть, спектральная последовательность

$$\lim\nolimits^p_{\mathscr{C}'}\{Ext^q(T(F(s\alpha)), T(G(t\alpha)))\} \Rightarrow Ext^{p+q}(T \circ F, T \circ G)$$

приведет к искомой.

Пусть теперь категория $\mathscr{C}$ такова, что для всех $c \in \mathscr{C}$ множества $Ob(c/\mathscr{C})$ конечны. Тогда поскольку $\mathscr{C}^{op}/c \cong (c/\mathscr{C})^{op}$, множества $Ob(\mathscr{C}^{op}/c) \cong (c/\mathscr{C})^{op}$ конечны. Положим $\mathscr{D} = \mathscr{C}^{op}$, $\mathscr{B} = \mathscr{A}^{op}$. Для любых функторов $F, G : \mathscr{D} \to \mathscr{B}$ существует спектральная последовательность

$$\lim\nolimits^p_{\mathscr{D}'}\{Ext^q_{\mathscr{P}}(G(s\alpha), F(t\alpha))\} \Rightarrow Ext^{p+q}_{\mathscr{D}P}(G, F),$$

но $\mathscr{D}B = \mathscr{C}^{op}\mathscr{A}^{op} \cong (\mathscr{C}A^{op})$, $\mathscr{D}' = (\mathscr{C}^{op})' \cong \mathscr{C}'$, при переходе от $\mathscr{D} = \mathscr{C}^{op}$ к $\mathscr{C}$ функторы s и t меняются местами, а при переходе от $\mathscr{B} = \mathscr{A}^{op}$ к $\mathscr{A}$ меняются местами аргументы функторов Ext^q, поэтому эта спектральная последовательность и будет требуемой.

Доказательство основной теоремы. Подставляя $F = A[a]$ и $G = B[b]$ в (3), получим спектральную последовательность

$$E_2^{p,q} = \lim\nolimits^p_{\mathscr{C}'}\bigl\{Ext^q_{\mathscr{P}}(A[a](s\alpha), B[b](t\alpha))\bigr\},$$

сходящуюся к $\bigl\{Ext^n_{\mathscr{C}P}(A[a], B[b])\bigr\}_{n\geq 0}$. Так как $\bigl\{Ext^q_{\mathscr{P}}(A[a](s\alpha), B[b](t\alpha))\bigr\}$ равны нулю во всех случаях, кроме $\alpha = (a \leq b)$, то при $p > 0$ по лемме 2.3

$$E_2^{p,q} = \lim\nolimits^p_{\mathscr{C}'}\bigl(Ext^q_{\mathscr{P}}(A, B)[a \leq b]\bigr) \cong \widetilde{H}^{p-2}\bigl(]a, b[, Ext^q_{\mathscr{P}}(A, B)\bigr).$$

4. Применения к вычислению относительной глобальной размерности категории диаграмм

Б. Митчел охарактеризовал конечные ч.у. множества $\mathscr{C}$, для которых существуют такие абелевы категории $\mathscr{A}$, что разность $\mathrm{gl.\,dim}\,\mathscr{A}^{\mathscr{C}} - \mathrm{gl.\,dim}\,\mathscr{A}$ равна нулю [2, лемма 4.1], единице [2, теорема 4.2] и двум [2, теорема 4.6]. Упрощение доказательства этих результатов дано в [6] с помощью изоморфизмов (6), но в частном случае категории векторных пространств $\mathscr{A}$. В данном разделе, используя идеи работы [6], мы обобщаем результаты Б. Митчела на относительную глобальную размерность категории диаграмм.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathscr{C}$ — конечное ч.у. множество, $\mathscr{A}$ — абелева категория, $\mathscr{P}$ — собственный класс в $\mathscr{A}$. Тогда $\mathrm{gl.\,dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\,\mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ будет верхней гранью чисел n, допускающих такие $a,b \in \mathscr{C}$ и $A, B \in \mathscr{A}$, что $Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(A[a], B[b]) \neq 0$.*

Доказательство. Для произвольного собственного класса $\mathscr{P}$ и объекта $A \in \mathscr{A}$ определим относительную проективную размерность $pd_{\mathscr{P}}A$ как верхнюю грань натуральных чисел n, для которых $Ext^n_{\mathscr{P}}(A,-) \neq 0$. Пусть $n = \mathrm{gl.\,dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\,\mathscr{A}^{\mathscr{C}}$. Существуют такие функторы $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$, что $pd_{\mathscr{C}\mathscr{P}}F = n$ и $Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F,G) \neq 0$. Пусть $c \in \mathscr{C}$ минимальный среди элементов, для которых $F(c) \neq 0$. Обозначим через F' ядро канонического эпиморфизма $F \to F(c)[c]$. Применяя функтор $\mathscr{A}^{\mathscr{C}}(-,G)$ к точной последовательности $0 \to F' \to F \to F(c)[c] \to 0$, собственной в силу расщепляемости на каждом $c \in \mathscr{C}$, получим длинную точную последовательность, содержащую отрезок

$$Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F(c)[c], G) \longrightarrow Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F,G) \longrightarrow Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F',G) \longrightarrow 0.$$

Так как $Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F,G) \neq 0$, то либо $Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F',G) \neq 0$, либо $Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F(c)[c],G) \neq 0$. Отсюда по индукции видно, что существует $a \in \mathscr{C}$, для которого

$$Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F(a)[a], G) \neq 0.$$

Аналогично рассмотрим максимальный среди $c \in \mathscr{C}$, для которых $G(c) \neq 0$. Пусть G'' — коядро естественного преобразования $G(c)[c] \to G$. Тогда точна последовательность $0 \to G(c)[c] \to G \to G'' \to 0$. Обозначим функтор $F(a)[a]$ через F_a. Так как функтор $Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F_a,-)$ точен справа, получаем точную последовательность

$$Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F_a, G(c)[c]) \longrightarrow Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F_a, G) \longrightarrow Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F_a, G'') \longrightarrow 0.$$

Отсюда либо $Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F_a, G(c)[c]) \neq 0$, либо $Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F_a, G'') \neq 0$. Повторяя процесс, приходим к выводу, что $Ext^n_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F_a, G(b)[b]) \neq 0$ для некоторого $b \in \mathscr{C}$. Подставляя $F(a) = A, G(b) = B$, получаем доказываемое утверждение.

Следствие 4.2. *Пусть $\mathscr{C}$ — конечное ч.у. множество, $\mathscr{A}$ — абелева категория и $\mathscr{P}$ — собственный класс в $\mathscr{A}$ такие, что $\mathrm{gl.\,dim}_{\mathscr{P}}\,\mathscr{A} < \infty$. Тогда выполнение $\mathrm{gl.\,dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\,\mathscr{A}^{\mathscr{C}} = \mathrm{gl.\,dim}_{\mathscr{P}}\,\mathscr{A}$ равносильно дискретности ч.у. множества $\mathscr{C}$.*

Доказательство. Если $\mathscr{C}$ не дискретное, то существуют такие элементы $a < b$ в $\mathscr{C}$, что $]a,b[= \varnothing$. В этом случае выберем объекты $A, B \in \mathscr{A}$, для которых $Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B) \neq 0$. Тогда

$$Ext^{q+1}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(A[a], B[b]) \cong \widetilde{H}^{-1}(]a,b[, Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B)) = Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B) \neq 0$$

и, значит, $\mathrm{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}} \geq 1 + \mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$. Отсюда и из равенства

$$\mathrm{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}} = \mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$$

следует дискретность ч.у. множества $\mathscr{C}$. Обратная импликация очевидна, ибо в случае дискретного $\mathscr{C}$ получаем

$$\prod_{c\in\mathscr{C}} Ext^q_{\mathscr{P}}(F(c), G(c)) \cong Ext^q_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F, G).$$

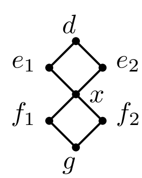
Следствие 4.3. *Пусть $\mathscr{C}$ — конечное недискретное ч.у. множество. Равенство $\mathrm{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}} = 1 + \mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$ имеет место для удовлетворяющих неравенству $\mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A} < \infty$ абелевой категории $\mathscr{A}$ и собственного в $\mathscr{A}$ класса $\mathscr{P}$ в том и только том случае, когда для каждой пары элементов $a < b$ из $\mathscr{C}$ подмножество $[a, b] \subseteq \mathscr{C}$ является линейно упорядоченным множеством.*

Доказательство. Пусть интервалы $[a, b]$ линейно упорядочены. Тогда $\widetilde{H}^i(]a, b[, A) = 0$ для всех $i \geq 0$ и, значит, $\mathrm{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}} \leq 1 + \mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$. По условию $\mathscr{C}$ не дискретная. Следовательно, если интервалы $[a, b]$ линейно упорядочены, то $\mathrm{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}} = 1 + \mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$. Наоборот, пусть существуют $a, b \in \mathscr{C}$, для которых $]a, b[$ не является линейно упорядоченным. Легко видеть, что найдется непустой интервал $]a, b[$, минимальный по отношению к этому свойству. В этом случае для любой абелевой группы G верно $H^i(]a, b[, G) = 0$ при $i > 0$ и $\widetilde{H}^0(]a, b[, G) \neq 0$. Получаем

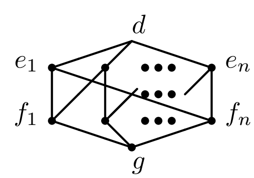
$$\widetilde{H}^0(]a, b[, Ext^q_{\mathscr{P}}(A, B)) \cong Ext^{2+q}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(A[a], B[b]) \neq 0.$$

Это доказывает обратную импликацию.

Следуя Митчелу, *n-короной* $\widehat{\mathbb{C}}_n$ при $n \geq 2$ будем называть состоящее из $2n+2$ элементов множество $\{d, e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n, g\}$, упорядоченное так, что $d < e_i < f_i < g$ при $1 \leq i \leq n$, $e_i < f_{i-1}$ при $2 \leq i \leq n$ и $e_1 < f_n$. Фигура 8 получается из 2-короны $\widehat{\mathbb{C}}_2$ добавлением элемента x, удовлетворяющего неравенствам $e_1 < x < f_1, e_2 < x < f_2$:



Фигура 8.



n-Корона $\widehat{\mathbb{C}}_n$.

Лемма 4.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — конечное ч.у. множество, $\mathscr{A}$ — абелева категория, $\mathscr{P}$ — собственный класс в $\mathscr{A}$ такой, что $\mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A} < \infty$. Тогда если*

$$\mathrm{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}} \leq 2 + \mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A},$$

то для любых элементов $x < y$ из $\mathscr{P}$ геометрическая реализация нерва ч.у. множества $]x, y[$ является несвязным объединением стягиваемых пространств.

Доказательство. В противном случае согласно [6, следствие 3.9] существуют такие пары $x < y$, что $H_1(]x, y[, \mathscr{Q}) \neq 0$. Здесь $\mathscr{Q}$ — поле рациональных чисел. В этом случае

$$H^1(]x, y[, Ext^q_{\mathscr{P}}(A, B)) \cong Hom(H_1(]x, y[), Ext^q_{\mathscr{P}}(A, B)) \neq 0,$$

ибо $H_1(]x,y[)\otimes\mathscr{Q}\neq 0$ и, значит, $H_1(]x,y[)$ бесконечна.

Рассмотрим $q=\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$ и $A,B\in Ob(\mathscr{A})$, для которых $Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B)\neq 0$. Согласно [7, предложение 2.3] x и y можно взять такими, что

$$H^i(]x,y[,Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B))=0 \quad \forall i>1.$$

Получим

$$Ext^{q+3}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(A[x],B[y])\cong H^1\bigl(]x,y[,Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B)\bigr),$$

а вместе с тем $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}}\geq 3+\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$. Это противоречит условию леммы. Значит, для каждой пары $x<y$ геометрическая реализация ч.у. множества $]x,y[$ является дизъюнктным объединением стягиваемых пространств.

Следствие 4.5. *Пусть $\mathscr{C}$ — конечное ч.у. множество. Следующие его свойства равносильны:*

1) *для некоторых абелевой категории $\mathscr{A}$ и собственного класса $\mathscr{P}$ в $\mathscr{A}$ таких, что $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}<\infty$, верно неравенство $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}}\leq 2+\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$;*

2) *для любых абелевой категории $\mathscr{A}$ и собственного класса $\mathscr{P}$ в $\mathscr{A}$ верно неравенство $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}}\leq 2+\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$;*

3) *$\mathscr{C}$ не содержит n-корону $\widehat{\mathbb{C}}_n$ ни для какого $n\geq 3$, и каждое его подмножество, изоморфное $\widehat{\mathbb{C}}_2$, содержится в фигуре 8.*

Доказательство. По лемме 4.4 в случае $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}}\leq 2+\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$ для каждой пары элементов $x<y$ геометрическая реализация нерва ч.у. множества $]x,y[$ будет объединением стягиваемых пространств. Согласно [6, следствие 3.9] это влечет неравенство $\operatorname{gl.dim} Mod^{\mathscr{C}}_K\leq 2$ для любого поля K, по [6, теорема 3.3] равносильное тому, что выполнены следующие два условия:

1) $\mathscr{C}$ не содержит подмножеств, изоморфных $\widehat{\mathbb{C}}_n$ при $n\geq 3$,

2) каждое подмножество из $\mathscr{C}$, изоморфное $\widehat{\mathbb{C}}_2$, содержится в фигуре 8.

Так как $H_i(]x,y[)=0$ для всех $i>0$, то $\widetilde{H}^{p-2}\bigl(]x,y[,Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B)\bigr)=0$ при $p>2$. Поэтому спектральная последовательность приводит к изоморфизму $Ext^{q+3}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(A[x],B[y])=0$ при $q=\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$. Следовательно, $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}}\leq 2+\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$, что и требовалось доказать.

Данный результат в частных случаях получен в [2, 21].

Следствия 4.3 и 4.5 дают характеризацию конечных ч.у. множеств $\mathscr{C}$, для которых имеет место равенство $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}}=2+\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$.

В условиях предложения 3.4 члены $E_2^{p,q}$ спектральной последовательности (4) равны 0 при $p>\dim\mathscr{C}$ и при $q>\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$. Отсюда немедленно вытекает

Следствие 4.6. *Пусть $\mathscr{C}$ — конечное ч.у. множество, $\mathscr{A}$ — абелева категория, $\mathscr{P}$ — собственный класс в $\mathscr{A}$ такой, что $\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}<\infty$. Тогда*

$$\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}}\leq\dim\mathscr{C}+\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}. \tag{5}$$

Для любых $F,G\in\mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ аналогично [7, лемма 1.1] при $p=\dim\mathscr{C}$ и $q=\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}<\infty$ устанавливаются изоморфизмы

$$\lim{}^p_{\mathscr{C}'}\bigl\{Ext^q_{\mathscr{P}}(F(s\alpha),G(t\alpha))\bigr\}\cong Ext^{p+q}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(F,G). \tag{6}$$

Следствие 4.7. *Пусть $\mathscr{C}$ — конечное ч.у. множество размерности $\dim\mathscr{C}=3$, $\mathscr{A}$ — абелева категория, $\mathscr{P}$ — собственный класс в $\mathscr{A}$. Тогда*

$$\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}}=3+\operatorname{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}.$$

Доказательство. В этом случае согласно следствию 2.4 для каждого открытого интервала вторая группа когомологий равна нулю и существует интервал $]a,b[$, для которого $H^1(]a,b[,\mathbb{Z}) \neq 0$. По формуле универсальных коэффициентов $H^1(]a,b[,E) \cong Ab(H_1(]a,b[),E)$ для любой абелевой группы E, и точна последовательность

$$0 \longrightarrow Ext(H_1(]a,b[),E) \longrightarrow H^2(]a,b[,E) \longrightarrow Ab(H_2(]a,b[),E) \longrightarrow 0.$$

Отсюда $Ext(H_1(]a,b[),E) = 0$ и, значит, $H_1(]a,b[)$ свободна. Следовательно, $H^1(]a,b[,E) \neq 0$ для всякой абелевой группы E. Рассматривая теперь такие объекты $A,B \in \mathscr{A}$, что $Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B) \neq 0$ при $q = \mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$, получаем

$$Ext^{3+q}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(A[a],B[b]) \cong H^1\bigl(]a,b[,Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B)\bigr) \neq 0.$$

Это приводит к неравенству $\mathrm{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}} \geq 3+q$, дающему вместе с неравенством (5) доказываемое равенство.

Как показали примеры Спирса [20] и Митчела [16], при $\dim\mathscr{C} \geq 4$ аналогичное утверждение может не иметь места даже для класса $\mathscr{P}$ всех точных последовательностей в абелевой категории. Установим условия, при которых это равенство справедливо.

В силу леммы 4.1 и изоморфизма (6), приводящего к

$$H^{p-2}\bigl(]a,b[,Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B)\bigr) \cong Ext^{p+q}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(A[a],B[b])$$

при $p = \dim\mathscr{C}$ и $q = \mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A} < \infty$ неравенство (5) становится строгим в том и только том случае, когда для любых $a,b \in \mathscr{C}$ и $A,B \in Ob\mathscr{A}$ группы $H^{p-2}\bigl(]a,b[,Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B)\bigr)$ равны нулю. Применяя формулу универсальных коэффициентов, получаем

Следствие 4.8. *Пусть $\mathscr{C}$ — конечное ч.у. множество, $\mathscr{A}$ — абелева категория, $\mathscr{P}$ — собственный класс в $\mathscr{A}$, для которого $q = \mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A} < \infty$. Строгое неравенство $\mathrm{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}} < \dim\mathscr{C} + \mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $\dim\mathscr{C} > 3$,

2) *$H_{p-2}(]a,b[) = 0$ при $p = \dim\mathscr{C}$, для всех $a,b \in \mathscr{C}$, и для любых объектов $A,B \in \mathscr{A}$ верно равенство $mExt^q_{\mathscr{P}}(A,B) = Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B)$ при m, равном порядку периодической части группы $H_{p-3}(]a,b[)$.*

Доказательство. Согласно следствию 4.7 неравенство (5) превращается в равенство при $\dim\mathscr{C} = 3$. В силу следствия 4.5 выполнение $\mathrm{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}} \leq 2 + \mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$ для любых абелевой категории $\mathscr{A}$ и собственного класса $\mathscr{P}$ в $\mathscr{A}$ равносильно $\mathrm{gl.dim}\,Ab^{\mathscr{C}} \leq 2 + \mathrm{gl.dim}\,Ab$. Поскольку $\mathrm{gl.dim}\,Ab^{\mathscr{C}} = 1 + \dim\mathscr{C}$ [7], последнее неравенство имеет место тогда и только тогда, когда $\dim\mathscr{C} \leq 2$. Следствия 4.2 и 4.3 дают равенство $\mathrm{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}} = \dim\mathscr{C} + \mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$ при $\dim\mathscr{C} \leq 2$. Следовательно, это равенство и доказываемое утверждение верны при $\dim\mathscr{C} \leq 3$. Осталось доказать, что в случае $\dim\mathscr{C} > 3$ строгое неравенство $\mathrm{gl.dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}\mathscr{A}^{\mathscr{C}} < \dim\mathscr{C} + \mathrm{gl.dim}_{\mathscr{P}}\mathscr{A}$ эквивалентно условию 2.

Если выполнено строгое неравенство, то для любых $a,b \in \mathscr{C}$ и $A,B \in Ob\mathscr{A}$ будет иметь место $H^{p-2}\bigl(]a,b[,Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B)\bigr) = 0$ и точная по формуле универсальных коэффициентов при $E = Ext^q_{\mathscr{P}}(A,B)$ последовательность

$$0 \longrightarrow Ext(H_{p-3}(]a,b[),E) \longrightarrow H^{p-2}(]a,b[,E) \longrightarrow Ab(H_{p-2}(]a,b[),E) \longrightarrow 0 \quad (7)$$

приведет к $Ext(H_{p-3}(]a,b[),E) = 0$, $Ab(H_{p-2}(]a,b[),E) = 0$. Так как $Ext(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, E) \cong E/mE$, свойство $Ext(H_{p-3}(]a,b[),E) = 0$ эквивалентно делимости групп

$E = Ext^q_{\mathscr{P}}(A, B)$ на порядок периодической части группы $H_{p-3}(]a, b[)$. Поскольку $p = \dim \mathscr{C}$, то $H_{p-2}(]a, b[)$ не имеет кручения по [7, лемма 4.1]. Из свойства $Ab(H_{p-2}(]a, b[), E) = 0$ получаем $H_{p-2}(]a, b[) = 0$.

Докажем теперь обратную импликацию (при $\dim \mathscr{C} > 3$). В самом деле, если $H_{p-2}(]a, b[) = 0$ для любых $a, b \in \mathscr{C}$ и $A, B \in \mathscr{A}$ и если $mExt^q_{\mathscr{P}}(A, B) = Ext^q_{\mathscr{P}}(A, B)$ при m, равном порядку периодической части группы $H_{p-3}(]a, b[)$, то по формуле (7) будет справедливо $H^{p-2}(]a, b[, E) = 0$, ибо $Ext(H_{p-3}(]a, b[), E) \cong E/mE = 0$ и $Ab(H_{p-2}(]a, b[), E) = 0$. Отсюда $Ext^{p+q}_{\mathscr{C}\mathscr{P}}(A[a], B[b]) = 0$ и, следовательно, $\mathrm{gl.\,dim}_{\mathscr{C}\mathscr{P}} \mathscr{A}^{\mathscr{C}} < p + q$. Доказательство закончено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маклейн С.* Гомология. М.: Мир, 1966.

2. *Mitchell B.* On the dimension of objects and categories. II. Finite ordered sets // J. Algebra. 1968. V. 9, N 3. P. 341–368.

3. *Cibils C.* Cohomology of incidence algebras and simplicial complexes // J. Pure Appl. Algebra. 1989. V. 56, N 3. P. 221–232.

4. *Polo P.* On Cohen — Macaulay posets, Koszul algebras and certain modules associated to Schubert varieties // Bull. London Math. Soc. 1995. V. 27, N 5. P. 425–434.

5. *Kovilyanskaya H., Mazorchuk V.* On incidence algebras associated with regular cell decomposition of S^n // Publ. Math. Debrecen. 1999. V. 54, N 3–4. P. 391–402.

6. *Igusa K., Zacharia D.* On the cohomology of incidence algebras of partially ordered sets // Comm. Algebra. 1990. V. 18, N 3. P. 873–887.

7. *Хусаинов А. А.* О глобальной размерности категории коммутативных диаграмм в абелевой категории // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 5. С. 1181–1194.

8. *Parshall B., Scott L.* Derived categories, quasi-hereditary algebras, and algebraic groups // Math. Notes Carleton Univ. 1988. V. 3. P. 1–105.

9. *Baues H.-J., Wirshing G.* Cohomology of small categories // J. Pure Appl. Algebra. 1985. V. 38, N 2–3. P. 187–211.

10. *Oberst U.* Homology of categories and exactness of direct limits // Math. Z. 1968. Bd 107. S. 89–115.

11. *Хусаинов А. А.* Размерность Хохшильда — Митчела линейно упорядоченных множеств и гипотеза континуума // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 5. С. 1171–1184.

12. *Джибладзе М. А., Пирашвили Т. И.* Некоторые линейные расширения категории конечно порожденных свободных модулей // Сообщ. АН ГССР. 1986. Т. 123, № 3. С. 481–484.

13. *Jibladze M., Pirashvili T.* Cohomology of algebraic theories // J. Algebra. 1991. V. 137, N 2. P. 253–296.

14. *Хусаинов А. А.* О группах расширений в категории абелевых диаграмм // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 1. С. 179–185.

15. *Хусаинов А. А.* О локально конечных частично упорядоченных множествах размерности 3 // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 201–205.

16. *Mitchell B.* Rings with several objects // Adv. Math. 1972. V. 8. P. 1–161.

17. *Mac Lane S.* Categories for the working mathematician. New York etc.: Springer-Verl., 1971. (Graduate Texts in Mathematics).

18. *Гротендик А.* О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

19. *Mitchell B.* On the dimension of objects and categories. I. Monoids // J. Algebra. 1968. V. 9, N 3. P. 314–340.

20. *Spears W. T.* Global dimension in categories of diagrams // J. Algebra. 1972. V. 22. P. 219–222.

21. *Cheng C. C.* Finite partially ordered sets of cohomological dimension one // J. Algebra. 1976. V. 40, N 2. P. 340–347.

Статья поступила 3 июня 1998 г.,
окончательный вариант — 22 декабря 2000 г.

Хусаинов Ахмет Аксанович
Комсомольский-на-Амуре гос. технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре
`husainov@knastu.ru`