Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 517.95

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА — ПЛАНКА С ПРОСТРАНСТВЕННО–ПЕРИОДИЧЕСКИМИ РЕШЕНИЯМИ. СУЩЕСТВОВАНИЕ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

М. М. Лаврентьев (мл.), Р. Спиглер, Д. Р. Ахметов

Аннотация: Доказано существование сильных решений в пространствах Соболева и Гёльдера для одной новой краевой задачи, возникшей недавно в физике, для нелинейного интегродифференциального уравнения с частными производными типа Фоккера — Планка, которое может рассматриваться как параболическое уравнение, вырожденное по одной из пространственных переменных. Особенностью нестандартной постановки этой задачи является сочетание неограниченности области, где ищется решение (а также области интегрирования в интегральном члене уравнения), и неограниченности коэффициентов уравнения с периодичностью граничных условий по той пространственной переменной, по которой происходит вырождение уравнения, и специальными свойствами искомых решений, диктуемыми физическим смыслом задачи. Предложено регуляризованное интегропараболическое уравнение, существование и регулярность решения которого установлены авторами ранее, и обоснован предельный переход по параметрам регуляризации. Библиогр. 23.

Введение

В работе рассматривается нелинейное интегропараболическое уравнение типа Фоккера — Планка. Оно возникает при статистическом описании динамики поведения популяции из бесконечного количества нелинейно связанных случайных резонаторов, подверженных взаимодействию типа «основного поля» (это приводит к появлению в уравнении интеграла по пространственным переменным). Эта модель обобщает и уточняет известную модель Курамото, которая описывает целый ряд явлений: эффект самосинхронизации в областях от биологии и медицины до физики и нейросетей. Вырожденный пространственный диффузионный оператор делает естественным рассмотрение *регуляризованного* уравнения, в котором в модель искусственно вводится диффузионный

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 01–05–64704, 00–07–90343, 00–15–99092 и 00–01–00912), the GNFM of the Italian INdAM, фонда ЮНЕСКО (по контракту UVO–ROSTE 875.629.9) и CASPUR–Rome.

оператор по пространственной переменной с малым параметром. Особенности задачи (не считая вырождения) включают неограниченность коэффициентов, пространственную периодичность искомого решения и нелинейный интегральный член. Оценки, равномерные по параметрам регуляризации, позволяют совершить предельный переход, в результате которого выделяется решение исходной задачи в определенных пространствах Соболева и Гёльдера. Таким образом, устанавливается *существование сильных решений*. При этом были существенно использованы точные оценки убывания сверток непрерывных функций с фундаментальными решениями линейных параболических уравнений в неограниченных областях в $\mathbb{R}^n$, полученные в [1].

Прежде всего приведем мотивацию исследования данной постановки. Многие явления, относящиеся к физике, биологии, медицине и нейросетям, вполне удовлетворительно описываются в терминах больших систем нелинейно связанных, часто зашумленных резонаторов. В этом случае математическая модель представляет собой большую систему, быть может, стохастических нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В предельном случае бесконечного числа резонаторов, когда их взаимодействие имеет так называемый тип «основного поля», Й. Курамото [2] (см. также [3, 4]) было выведено одно нелинейное параболическое уравнение, содержащее интегральный член. Однако уточнение конечномерной модели, предпринятое для учета некоторых наблюдаемых явлений, привело к появлению вторых производных в левой части вышеуказанной системы [5–7]. Таким образом, более общее, чем модель Курамото, нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных может быть получено указанной процедурой предельного перехода [8]. Это новое модельное уравнение является уравнением типа Фоккера — Планка, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t} &= \frac{\partial^2\rho}{\partial\omega^2} - \omega\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\\ &+ \frac{\partial}{\partial\omega}\left[\left(\omega - \Omega - K\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi} g(\Omega)\sin(\varphi-\theta)\rho(\varphi,\omega,t,\Omega)\,d\varphi d\omega d\Omega\right)\rho\right]. \qquad (0.1)\end{aligned}$$

Решение уравнения (0.1), удовлетворяющее соответствующим краевым и начальным условиям, должно быть положительным, 2π-периодическим по θ, где θ является угловой переменной, и нормированным. В работе исследуется вопрос существования такого решения. Эта задача нестандартна по следующим причинам.

(1) Модельное уравнение (0.1) имеет второй порядок по ω, но лишь первый порядок по θ. Поэтому, даже не принимая во внимание интегральный член, уравнение нельзя отнести ни к параболическому, ни к гиперболическому типам.

(2) Уравнение (0.1) рассматривается в слое $(\theta,\omega,t) \in [0,2\pi]\times\mathbb{R}\times[0,T]$, т. е. в области, неограниченной по ω. Это порождает эффект сингулярности, возникающий для уравнений с неограниченными коэффициентами.

(3) Уравнение (0.1) содержит интеграл по неограниченной области.

(4) В уравнении есть дополнительная переменная Ω, играющая роль естественной частоты резонаторов, по которой не происходит дифференцирования, но которая одновременно является и коэффициентом уравнения (0.1), и переменной интегрирования.

(5) Ищутся только решения, периодические по θ, несмотря на то, что уравнение содержит производные лишь первого порядка по θ (как, например, в слу-

чае «периодических по времени решений параболических уравнений»).

Поэтому известные в литературе результаты по нелинейным параболическим [9–12] или даже интегропараболическим уравнениям [13] не могут быть применены в данном случае. Мы регуляризуем уравнение (0.1), вводя дополнительно диффузионное слагаемое по переменной θ, чтобы избавиться от вырождения по этой переменной.

Работа построена следующим образом. В § 1 приведены точные постановки как исходной, так и регуляризованной задач. Затем сформулирована теорема существования для регуляризованной задачи, доказанная авторами ранее. В § 2 доказаны оценки решений, равномерные по параметрам регуляризации. Для преодоления проблем, связанных с неограниченностью области определения и коэффициентов, в § 3 получены весовые оценки. Наконец, в § 4 доказан основной результат работы — теорема существования решения исходной (вырожденной) задачи. В заключении кратко суммируется проделанная работа.

§ 1. Основное уравнение и его регуляризация

Сформулированная выше задача сводится к следующему интегродифференциальному уравнению с частными производными. В неограниченном слое $Q_T = \{(\theta,\omega,t,\Omega) \in [0,2\pi]\times\mathbb{R}\times[0,T]\times[-G,G]\}$ требуется найти решение $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ задачи

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial^2\rho}{\partial\omega^2} - \omega\frac{\partial\rho}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\rho) - \Omega\frac{\partial\rho}{\partial\omega} - \mathscr{K}_s(\theta,t)\frac{\partial\rho}{\partial\omega}, \tag{1.1}$$

$$\rho|_{\theta=0} = \rho|_{\theta=2\pi}, \tag{1.2}$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(\theta,\omega,\Omega), \tag{1.3}$$

где для сокращения записи мы положили

$$\mathscr{K}_s(\theta,t) := K\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} g(\Omega)\sin(\varphi-\theta)\rho(\varphi,\omega,t,\Omega)\,d\varphi d\omega d\Omega. \tag{1.4}$$

Ниже (в теореме 4.4) мы уточним, в каком смысле найденная функция $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ будет удовлетворять уравнению, начальным и граничным условиям.

Замечание 1.1. В силу упомянутых выше соображений прикладного характера решение задачи (1.1)–(1.3) должно быть 2π-периодическим по переменной θ, положительным ($\rho(\theta,\omega,t,\Omega) > 0$ в Q_T) и нормированным:

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(\theta,\omega,t,\Omega)\,d\omega d\theta = 1$$

при $t\in[0,T]$ и $\Omega\in[-G,G]$, где интервал $[-G,G]$ обозначает носитель функции $g(\Omega)$.

Пусть $l_0 \geq 0$ — целое число, а $\alpha_0\in(0,1)$ — вещественная константа. Всюду в дальнейшем будем предполагать выполненными следующие условия на данные задачи.

(A) Задающая начальные данные функция $\rho_0(\theta,\omega,\Omega)$ является: (a_1) непрерывной по совокупности переменных $(\theta,\omega,\Omega)\in Q = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[-G,G]$, принадлежащей пространству Гёльдера $C^{l_0+\alpha_0}(Q)$; (a_2) 2π-периодической по переменной θ; (a_3) положительной, $\rho_0(\theta,\omega,\Omega) > 0$ в Q; (a_4) нормированной для всех

$\Omega \in [-G, G]$, т. е.

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\theta, \omega, \Omega)\, d\omega d\theta = 1; \tag{1.5}$$

и (a_5) экспоненциально убывающей на бесконечности по переменной ω вместе со своими частными производными в соответствии со следующей оценкой: для данного целого $l_0 \geq 0$ выполнены неравенства

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}, \Omega \in [-G,G]} \left| D^{l_1,l_2,l_3}_{\theta,\omega,\Omega} \rho_0(\theta, \omega, \Omega) \right| \leq C_0 e^{-M_0 \omega^2} \tag{1.6}$$

при $\omega \in \mathbb{R}$ и $l_1 + l_2 + l_3 \leq l_0$, где $C_0, M_0 > 0$ — некоторые постоянные, а $l_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$) — целые числа.

Здесь и далее D^l_ξ (где l и ξ означают мультииндексы) — дифференциальный оператор порядков l_i по переменным ξ_i соответственно.

(B) Плотность распределения частот $g(\Omega)$ предполагается: (b_1) принадлежащей пространству $L^1(\mathbb{R})$; (b_2) имеющей компактный носитель $[-G, G]$ и (b_3) ограниченной, т. е. $g_0 := \sup\limits_{\Omega \in \mathbb{R}} |g(\Omega)| < \infty$.

(C) Связывающая сила $K > 0$ считается постоянной.

Предполагается также, что «свободный параметр» Ω в (1.1) принадлежит носителю функции $g(\Omega)$ (см. (1.4) и свойство (b_2) функции $g(\Omega)$). В дальнейшем в качестве параметра мы часто будем использовать L^1-норму

$$A := \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\Omega)|\, d\Omega < \infty \tag{1.7}$$

этой функции.

Для изучения задачи (1.1)–(1.3) мы вводим параболическую регуляризацию уравнения (1.1). Кроме того, чтобы избежать проблемы неограниченных коэффициентов ω в слое Q_T, мы заменяем коэффициенты ω в уравнении ограничивающей функцией

$$F_N(\omega) = \begin{cases} \omega & \text{для } |\omega| \leq N, \\ \operatorname{sgn}(\omega)(N+1) & \text{для } |\omega| \geq N + 5. \end{cases}$$

Функция F_N подбирается из $C^{3+\alpha_0}(\mathbb{R})$ с константой $\alpha_0 \in (0, 1)$ из свойства (a_1) функции ρ_0 и так, что

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} |F'_N(\omega)| \leq 1, \quad \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |F''_N(\omega)| \leq 1. \tag{1.8}$$

Таким образом, вместо уравнения (1.1) мы будем изучать его параболическую регуляризацию: семейство уравнений

$$\frac{\partial \rho^{\varepsilon,N}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \rho^{\varepsilon,N}}{\partial \omega^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \rho^{\varepsilon,N}}{\partial \theta^2} - F_N \frac{\partial \rho^{\varepsilon,N}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \omega}(F_N \rho^{\varepsilon,N}) - \Omega \frac{\partial \rho^{\varepsilon,N}}{\partial \omega} - \mathscr{K}^{\varepsilon,N}_s \frac{\partial \rho^{\varepsilon,N}}{\partial \omega} \tag{1.9}$$

в $Q_T \cap \{t > 0\}$, решение каждого из которых $\rho^{\varepsilon,N}(\theta, \omega, t, \Omega)$ при заданных $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ удовлетворяет начальным данным (1.3). Множитель $\mathscr{K}^{\varepsilon,N}_s$ определяется формулой (1.4) с функцией $\rho^{\varepsilon,N}(\theta, \omega, t, \Omega)$ вместо $\rho(\theta, \omega, t, \Omega)$. После добавления производной второго порядка по θ мы дополняем условие периодичности (1.2) следующим образом:

$$\left(\rho^{\varepsilon,N}, \rho^{\varepsilon,N}_\theta\right)\big|_{\theta=0} = \left(\rho^{\varepsilon,N}, \rho^{\varepsilon,N}_\theta\right)\big|_{\theta=2\pi} \tag{1.10}$$

для $\omega \in \mathbb{R}$, $t \in (0, T]$ и $\Omega \in [-G, G]$. Для сокращения записи в дальнейшем мы будем часто опускать мультииндекс (ε, N), обозначая $\rho^{\varepsilon,N}$ и $\mathscr{K}^{\varepsilon,N}_s$ просто как ρ и $\mathscr{K}_s$ соответственно.

Задача вида (1.9), (1.10), (1.3) изучалась в работе [1]. А именно, была доказана следующая теорема существования для регуляризованной задачи (1.9), (1.10), (1.3).

Теорема 1.1. *Пусть данные задачи* (1.9), (1.10), (1.3) *удовлетворяют всем предположениям* (A) (*с* $l_0 = 1$), (B) *и* (C), *возможно, кроме условия* (b_3). *Тогда для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $N > 0$ *существует классическое решение* $\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)$ *задачи* (1.9), (1.10), (1.3) *в* Q_T. *Это решение*

1) *является непрерывной функцией по совокупности переменных в* Q_T *и имеет непрерывные частные производные* $D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}$ *в* Q_T *при* $l_1 + l_2 = 1$ *и* $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}$ *в* $Q_T \cap \{t > 0\}$ *при* $2k + l_1 + l_2 \le 3$;

2) *в классическом смысле удовлетворяет уравнению* (1.9) *в* $Q_T \cap \{t > 0\}$, *граничным условиям* (1.10) *в* Q_T *и начальным данным* (1.3) *в* $Q_T \cap \{t = 0\}$, *а также дополнительному требованию* $\rho^{\varepsilon,N}_{\theta\theta}\big|_{\theta=0} = \rho^{\varepsilon,N}_{\theta\theta}\big|_{\theta=2\pi}$ *в* $Q_T \cap \{t > 0\}$;

3) *положительно в* Q_T;

4) *нормировано равенством*

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)\,d\omega d\theta = 1$$

для $t \in [0,T]$ *и* $\Omega \in [-G,G]$;

5) *обладает экспоненциальным убыванием на бесконечности по переменной* ω, *т. е.*

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi],t\in[0,T],\Omega\in[-G,G]}\left|D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)\right| \le Ce^{-M\omega^2}$$

при $l_1 + l_2 \le 1$ *и* $\omega \in \mathbb{R}$, *где постоянные* $C, M > 0$ *зависят лишь от* ε, N, G, T, KA, C_0 *и* M_0; *и, кроме того,*

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi],\Omega\in[-G,G]}\left|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)\right| \le \frac{C}{\sqrt{t}}e^{-M\omega^2}$$

для $2k + l_1 + l_2 = 2$, $\omega \in \mathbb{R}$ *и* $t \in (0,T]$ *с теми же самыми постоянными* $C, M > 0$;

6) *такое, что интегралы* $\mathscr{K}^{\varepsilon,N}_s(\theta,t)$ *непрерывны при* $(\theta,t) \in [0,2\pi]\times[0,T]$ *вместе со своими частными производными любого порядка по переменной* θ *и равномерно ограничены относительно* ε *и* N:

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi],t\in[0,T]}\left|\mathscr{K}^{\varepsilon,N}_s(\theta,t)\right| + \sup_{\theta\in[0,2\pi],t\in[0,T]}\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\mathscr{K}^{\varepsilon,N}_s(\theta,t)\right| \le 2KA;$$

7) *такое, что для* $l_1 + l_2 \le 1$ *функции*

$$I^{l_1,l_2}(t,\Omega) := \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}\right)^2(\theta,\omega,t,\Omega)\,d\omega d\theta$$

непрерывны при $(t,\Omega) \in [0,T]\times[-G,G]$, *и, кроме того, на множестве* $(0,T]\times[-G,G]$ *существуют непрерывные производные* $\frac{\partial I^{l_1,l_2}}{\partial t}(t,\Omega)$, *причем*

$$\frac{\partial I^{l_1,l_2}}{\partial t}(t,\Omega) = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}\right)^2(\theta,\omega,t,\Omega)\right]d\omega d\theta.$$

Замечание 1.2. Утверждение 7 теоремы 1.1 является следствием утверждений 1 и 5 теоремы 3.3 и оценки (3.38) из [1].

В дальнейшем мы будем также ссылаться на свойства сверток непрерывных функций с фундаментальными решениями линейных параболических уравнений. Эти свойства установлены авторами в [1]. Они естественны, однако их точная формулировка требует слишком много места и поэтому здесь не приводится.

§ 2. Оценки решений регуляризованных задач

В этом параграфе рассмотрим решения $\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)$ задач (1.9), (1.10), (1.3), существование которых доказано в теореме 1.1, и установим оценки для этих решений, равномерные относительно параметров регуляризации ε и N.

Для удобства мы будем часто опускать мультииндекс (ε,N) и использовать обозначения

$$B_0(\Omega) := \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0^2(\theta,\omega,\Omega)\,d\omega d\theta,$$

$$B_1(\Omega) := \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{0\theta}^2(\theta,\omega,\Omega)\,d\omega d\theta, \quad B_2(\Omega) := \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{0\omega}^2(\theta,\omega,\Omega)\,d\omega d\theta,$$

$$\mathscr{K}_c(\theta,t) := K\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} g(\Omega)\cos(\varphi-\theta)\rho(\varphi,\omega,t,\Omega)\,d\varphi d\omega d\Omega.$$

Очевидно, что если $\rho(\theta,\omega,t,\Omega) := \rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)$ — произвольная функция из теоремы 1.1, то функции $\mathscr{K}_s(\theta,t)$ и $\mathscr{K}_c(\theta,t)$ (см. (1.4)) связаны равенствами

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathscr{K}_s(\theta,t) = -\mathscr{K}_c(\theta,t), \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\mathscr{K}_c(\theta,t) = \mathscr{K}_s(\theta,t)$$

при $(\theta,t)\in[0,2\pi]\times[0,T]$.

2.1. Оценка для ρ. По теореме 1.1, т. е. используя гладкость функции $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$, ее экспоненциальное убывание при $|\omega|\to\infty$ и периодичность по θ, которые приводят к исчезновению внеинтегральных членов при интегрировании по частям, и по свойствам ограничивающей функции F_N (см. (1.8)) имеем

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho\frac{\partial}{\partial\omega}(F_N\rho)\,d\omega d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_N'\rho^2\,d\omega d\theta \le \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho^2\,d\omega d\theta, \tag{2.1}$$

$$\int_0^{2\pi}(\Omega+\mathscr{K}_s)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\rho\rho_\omega\,d\omega\right)d\theta = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty}F_N\left(\int_0^{2\pi}\rho\rho_\theta\,d\theta\right)d\omega = 0. \tag{2.2}$$

Умножая обе части уравнения (1.9) на ρ и интегрируя по ω и θ, в силу (2.1) и (2.2) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho^2\,d\omega d\theta + 2\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_\omega^2+\varepsilon\rho_\theta^2\right)d\omega d\theta \le \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho^2\,d\omega d\theta. \tag{2.3}$$

Утверждение 7 теоремы 1.1, лемма Гронуолла и неравенство (2.3) дают оценку

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho^2\,d\omega d\theta + \int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_\omega^2+\varepsilon\rho_\theta^2\right)d\omega d\theta dt \le B_0(\Omega)e^t. \tag{2.4}$$

2.2. О градиенте решения. Как и прежде, рассмотрим функции $\rho^{\varepsilon,N}$ из теоремы 1.1, опуская мультииндекс (ε, N). В силу подходящего убывания решения $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ вместе с соответствующими частными производными на бесконечности по переменной ω и периодичности по переменной θ справедливы следующие соотношения:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(F_N'\rho + F_N\rho_\omega\right)\rho_{\theta\theta}\,d\omega d\theta = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_N'\rho_\theta^2\,d\omega d\theta, \tag{2.5}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{K}_s\rho_\omega\rho_{\theta\theta}\,d\omega d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathscr{K}_c\rho_\omega\rho_\theta - \frac{1}{2}\mathscr{K}_s\frac{\partial(\rho_\theta^2)}{\partial\omega}\right)d\omega d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{K}_c\rho_\omega\rho_\theta\,d\omega d\theta, \tag{2.6}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_N\rho_\theta\rho_{\theta\theta}\,d\omega d\theta = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_\omega\rho_{\theta\theta}\,d\omega d\theta = 0. \tag{2.7}$$

Умножая обе стороны уравнения (1.9) на $\rho_{\theta\theta}$ и используя (2.5)–(2.7), заключаем, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_\theta^2\,d\omega d\theta + 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_{\omega\theta}^2 + \varepsilon\rho_{\theta\theta}^2\right)d\omega d\theta \\ = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_N'\rho_\theta^2\,d\omega d\theta + 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{K}_c\rho_\omega\rho_\theta\,d\omega d\theta.\end{aligned} \tag{2.8}$$

После простых вычислений, используя неравенство Коши — Шварца, утверждение 7 теоремы 1.1 и лемму Гронуолла, из соотношений (1.8), (2.4) и (2.8) выводим оценку

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_\theta^2\,d\omega d\theta + \int\limits_0^{t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_{\omega\theta}^2 + \varepsilon\rho_{\theta\theta}^2\right)d\omega d\theta dt \le 2(B_1(\Omega) + K^2A^2B_0(\Omega))e^{3t}. \tag{2.9}$$

Аналогично, умножая обе стороны уравнения (1.9) на $\rho_{\omega\omega}$, после несложных преобразований получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_\omega^2\,d\omega d\theta + 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_{\omega\omega}^2 + \varepsilon\rho_{\omega\theta}^2\right)d\omega d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_N'\left(\rho_\omega^2 - 2\rho_\theta\rho_\omega - 2\rho\rho_{\omega\omega}\right)d\omega d\theta.$$

В силу неравенства Коши — Шварца и (1.8) последнее соотношение дает оценку

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_\omega^2\,d\omega d\theta + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_{\omega\omega}^2 + \varepsilon\rho_{\omega\theta}^2\right)d\omega d\theta \le \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(2\rho_\omega^2 + \rho_\theta^2 + \rho^2\right)d\omega d\theta. \tag{2.10}$$

Стандартными рассуждениями из неравенств (2.4), (2.9), (2.10) и утверждения 7 теоремы 1.1 извлекаем следующий результат:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_\omega^2\,d\omega d\theta + \int\limits_0^{t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_{\omega\omega}^2 + \varepsilon\rho_{\omega\theta}^2\right)d\omega d\theta dt \\ \le 2(B_2(\Omega) + B_1(\Omega) + B_0(\Omega) + K^2A^2B_0(\Omega))e^{5t}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Суммируя (2.4), (2.9) и (2.11), заключаем, что справедлива равномерная по ε и N оценка

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho^2\, d\omega d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho_\omega^2 + \rho_\theta^2\right) d\omega d\theta + \int_0^{t}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho_{\omega\omega}^2 + \rho_{\omega\theta}^2 + \varepsilon\rho_{\theta\theta}^2\right) d\omega d\theta dt$$
$$\le 5(B_2(\Omega) + B_1(\Omega) + B_0(\Omega) + K^2A^2B_0(\Omega))e^{5t}. \quad (2.12)$$

2.3. Оценка старших производных. В этом пункте будем предполагать, что выполнены все условия (A) (с $l_0 = 2$), (B) и (C), возможно, кроме условия (b_3). Сначала установим дополнительную гладкость решения $\rho^{\varepsilon,N}$ и докажем свойства экспоненциального убывания для его старших производных (аналогично тому, как это сделано в [1] при доказательстве теоремы 3.3). При этом мы примем во внимание новые свойства начальных данных, которые диктуются условием (A) при $l_0 = 2$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены все предположения* (A) (с $l_0 = 2$), (B) *и* (C), *возможно, кроме условия* (b_3). *Тогда функции* $\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)$ *из теоремы* 1.1 *обладают следующими дополнительными свойствами:*

1) *частные производные* $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}$ *непрерывны в* Q_T *при* $2k + l_1 + l_2 \le 2$ *и непрерывны в* $Q_T \cap \{t > 0\}$ *при* $2k + l_1 + l_2 \le 4$;

2) $\rho^{\varepsilon,N}$ *обладает свойством экспоненциального убывания при* $\omega \to \pm\infty$ *вместе со своими производными:*

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi],t\in[0,T],\Omega\in[-G,G]} \left|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)\right| \le Ce^{-M\omega^2}$$

при $2k + l_1 + l_2 \le 2$, $\omega \in \mathbb{R}$ *и*

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi],\Omega\in[-G,G]} \left|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)\right| \le \frac{C}{\sqrt{t}}e^{-M\omega^2}$$

при $2k + l_1 + l_2 = 3$, $\omega \in \mathbb{R}$ *и* $t \in (0,T]$, *где постоянные* $C, M > 0$ *зависят только от* ε, N, G, T, KA, C_0 *и* M_0;

3) *для* $2k + l_1 + l_2 \le 2$ *функции*

$$I^{k,l_1,l_2}(t,\Omega) := \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N})^2(\theta,\omega,t,\Omega)\, d\omega d\theta$$

непрерывны при $(t,\Omega) \in [0,T] \times [-G,G]$, *и, кроме того, на множестве* $(0,T] \times [-G,G]$ *существуют непрерывные производные* $\frac{\partial I^{k,l_1,l_2}}{\partial t}(t,\Omega)$, *причем*

$$\frac{\partial I^{k,l_1,l_2}}{\partial t}(t,\Omega) = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}\right)^2(\theta,\omega,t,\Omega)\right] d\omega d\theta.$$

Доказательство. Обозначим $Q_T^* = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0,T] \times [-G,G]$ и рассмотрим функцию $\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)$ в полосе $\overline{Q_T^*}$ как 2π-периодическую функцию переменной θ. Ввиду утверждений 1, 2 и 5 теоремы 1.1 продолженная функция $\rho^{\varepsilon,N}$ является ограниченным классическим решением соответствующей задачи Коши для уравнения (1.9) в полосе $\overline{Q_T^*}$; здесь Ω считается произвольным фиксированным параметром из интервала $[-G,G]$. При доказательстве теоремы 3.3 в [1] показано, что коэффициенты уравнения (1.9) принадлежат классическому пространству Гёльдера $C^{\alpha,\alpha/2}_{x,t}(\overline{Q_T^*})$ для любой постоянной $\alpha \in (0,1)$; здесь $x = (\theta,\omega)$, а Ω — снова произвольный фиксированный параметр из интервала $[-G,G]$. Поэтому по теореме единственности [14] и по теореме 1 из

[15] решение $\rho^{\varepsilon,N}$ данной задачи Коши (1.9), (1.3) принадлежит пространству Гёльдера $C^{2+\alpha_0,1+\alpha_0/2}_{x,t}(\overline{Q^*_T})$, так как начальные данные ρ_0 принадлежат пространству $C^{2+\alpha_0}(Q)$. В частности это означает, что для $2k+l_1+l_2=2$ и любого фиксированного $\Omega\in[-G,G]$ частные производные $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}$ существуют и непрерывны при $(\theta,\omega,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T]$.

Для того чтобы доказать существование частных производных $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}$ при $2k+l_1+l_2=4$, будем использовать теорему 6 из [16]. Очевидно, что нам необходимо оценить лишь разность $\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{K}^{\varepsilon,N}_s(\theta,t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{K}^{\varepsilon,N}_s(\theta,t+\delta)$. Для этого заметим, что так как коэффициенты уравнения (1.9) принадлежат пространствам Гёльдера $C^{\alpha,\alpha/2}_{x,t}(\overline{Q^*_T})$ для всех $\alpha\in(0,1)$, то для фундаментального решения $Z^{\varepsilon,N}_\Omega(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)$ уравнения (1.9) справедлива оценка

$$
\begin{aligned}
&\bigl|D_tZ^{\varepsilon,N}_\Omega(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)-D_tZ^{\varepsilon,N}_\Omega(\theta,\omega,t+\delta;\eta,\xi,\tau)\bigr|\\
&\qquad\le C\delta^{\alpha/2}\biggl(\frac{1}{(t-\tau)^{2+\alpha/2}}e^{-M(|\theta-\eta|^2+|\omega-\xi|^2)/(t-\tau)}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{(t+\delta-\tau)^{2+\alpha/2}}e^{-M(|\theta-\eta|^2+|\omega-\xi|^2)/(t+\delta-\tau)}\biggr)
\end{aligned}
$$

для $\theta,\omega,\eta,\xi\in\mathbb{R}$ и $0\le\tau<t<t+\delta\le T$, где $C,M>0$ — постоянные, зависящие от $\alpha\in(0,1)$ и других параметров (см. [17]). Аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 2.1 в [1], используя последнее неравенство, выводим оценку

$$\bigl|\rho^{\varepsilon,N}_t(\theta,\omega,t,\Omega)-\rho^{\varepsilon,N}_t(\theta,\omega,t+\delta,\Omega)\bigr|\le C\frac{\delta^{\alpha/2}}{t^{1+\alpha/2}}e^{-M\omega^2}$$

для $\theta,\omega\in\mathbb{R}$ и $0<t<t+\delta\le T$, где $C,M>0$ — некоторые новые постоянные. Отсюда

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{K}^{\varepsilon,N}_s(\theta,t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{K}^{\varepsilon,N}_s(\theta,t+\delta)\right|\le C\frac{\delta^{\alpha/2}}{t^{1+\alpha/2}}$$

при $\theta\in\mathbb{R}$ и $0<t<t+\delta\le T$, где постоянная C зависит, вообще говоря, от выбора $\alpha\in(0,1)$ и других параметров.

Значит, $\rho^{\varepsilon,N}$ принадлежит весовому пространству Гёльдера $H^{4+\alpha_0}_0$ (см. теорему 6 в [16]). В частности, это означает, что для $2k+l_1+l_2=4$ и любого фиксированного $\Omega\in[-G,G]$ частные производные $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}$ существуют и непрерывны при $(\theta,\omega,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,T]$.

Случай $2k+l_1+l_2\le1$ в утверждении 2 теоремы доказан в теореме 1.1. Утверждение 2 для $2k+l_1+l_2=2$ устанавливается применением теорем 2.1 и 2.3 из [1] к соответствующим задачам Коши для функций $\rho^{\varepsilon,N}_\theta$ и $\rho^{\varepsilon,N}_\omega$ (оценка для $\rho^{\varepsilon,N}_t$ будет следовать из уравнения (1.9)). В результате мы также имеем оценку

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{K}^{\varepsilon,N}_s(\theta,t)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{K}^{\varepsilon,N}_s(\theta,t)\right|\le C$$

для $\theta\in\mathbb{R}$ и $t\in[0,T]$ с постоянной C, зависящей, вообще говоря, от ε и N.

Ввиду установленных выше свойств можно рассмотреть соответствующие задачи Коши для функций $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}$ с $2k+l_1+l_2=2$ и установить утверждение 2 теоремы в случае $2k+l_1+l_2=3$, используя теоремы 2.1 и 2.2 из [1].

Для того чтобы доказать непрерывность частных производных $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}$ в $\overline{Q^*_T}$ для $2k+l_1+l_2=2$ и в Q^*_T для $2k+l_1+l_2=4$, нужно использовать рассуждения, подобные использованным при доказательстве теоремы 3.3 в [1], уже доказанное утверждение 2 теоремы и оценки (3.39) из [1]. Наконец, утверждение 3 теоремы непосредственно следует из утверждений 1 и 2 и оценки

$$\left|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)\right| \le \frac{C}{t}$$

в Q^*_T для $2k+l_1+l_2=4$, где C — некоторая постоянная, устанавливаемой аналогично (3.38) в [1]. Теорема доказана.

Заметим, что в предположениях (A) с $l_0=2$ существуют функции

$$B_3(\Omega) := \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho^2_{0\theta\theta}(\theta,\omega,\Omega)\,d\omega d\theta, \quad B_4(\Omega) := \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho^2_{0\omega\omega}(\theta,\omega,\Omega)\,d\omega d\theta \tag{2.13}$$

при $\Omega\in[-G,G]$.

Дифференцируя обе части уравнения (1.9) по переменной θ и умножая их на $\rho_{\theta\theta\theta}$, после простых вычислений в силу теоремы 2.1 получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho^2_{\theta\theta}\,d\omega d\theta + 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho^2_{\omega\theta\theta}+\varepsilon\rho^2_{\theta\theta\theta}\right)d\omega d\theta$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F'_N\rho^2_{\theta\theta}\,d\omega d\theta + 4\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{K}_c\rho_{\omega\theta}\rho_{\theta\theta}\,d\omega d\theta + 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{K}_c\rho_{\omega}\rho_{\theta}\,d\omega d\theta.$$

Ввиду неравенства Коши — Шварца и (1.8) находим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho^2_{\theta\theta}\,d\omega d\theta + 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\rho^2_{\omega\theta\theta}+\varepsilon\rho^2_{\theta\theta\theta})\,d\omega d\theta \le 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho^2_{\theta\theta}\,d\omega d\theta$$

$$+ 4K^2A^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho^2_{\omega\theta}\,d\omega d\theta + K^2A^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho^2_{\omega}\,d\omega d\theta + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho^2_{\theta}\,d\omega d\theta.$$

Затем, пользуясь (2.4), (2.9), утверждением 3 теоремы 2.1 и леммой Гронуолла (см. также (2.13)), получаем неравенство

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho^2_{\theta\theta}\,d\omega d\theta + \int\limits_0^{t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho^2_{\omega\theta\theta}+\varepsilon\rho^2_{\theta\theta\theta}\right)d\omega d\theta dt$$

$$\le 12(B_3(\Omega)+B_1(\Omega)+K^2A^2B_1(\Omega)+K^2A^2B_0(\Omega)+K^4A^4B_0(\Omega))e^{5t}. \tag{2.14}$$

Аналогично, дифференцируя обе части уравнения (1.9) по переменной ω, после умножения на $\rho_{\omega\omega\omega}$ и несложных преобразований приходим к равенству

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho^2_{\omega\omega}\,d\omega d\theta + 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho^2_{\omega\omega\omega}+\varepsilon\rho^2_{\omega\omega\theta}\right)d\omega d\theta$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F'_N\left(\rho^2_{\omega\omega}+2\rho_\theta\rho_{\omega\omega\omega}-2\rho_{\omega\theta}\rho_{\omega\omega}-4\rho_\omega\rho_{\omega\omega\omega}\right)d\omega d\theta - 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F''_N\rho\rho_{\omega\omega\omega}\,d\omega d\theta.$$

Применяя затем неравенство Коши — Шварца и (1.8), выводим оценку

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho^2_{\omega\omega}\,d\omega d\theta + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho^2_{\omega\omega\omega}+\varepsilon\rho^2_{\omega\omega\theta}\right)d\omega d\theta$$

$$\leq \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(2\rho_{\omega\omega}^2+\rho_{\omega\theta}^2+16\rho_\omega^2+4\rho_\theta^2+4\rho^2\right)d\omega d\theta.$$

Таким образом, в силу неравенств (2.4), (2.9), утверждения 3 теоремы 2.1 и леммы Гронуолла (см. также (2.13)) заключаем, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_{\omega\omega}^2\,d\omega d\theta+\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_{\omega\omega\omega}^2+\varepsilon\rho_{\omega\omega\theta}^2\right)d\omega d\theta dt$$
$$\leq 28(B_4(\Omega)+B_1(\Omega)+K^2A^2B_0(\Omega)+B_0(\Omega))e^{5t}. \quad (2.15)$$

Заметим, что функции $B_k(\Omega)$ при $k=0,1,\dots,4$ непрерывны в замкнутом интервале $[-G,G]$ и, следовательно, ограничены (см. утверждение 3 теоремы 2.1). Объединяя оценки (2.12), (2.14) и (2.15), получаем следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены все предположения* (A) (*с* $l_0=2$), (B) *и* (C), *возможно, кроме условия* (b_3). *Тогда при любых фиксированных значениях параметров* $t\in[0,T]$ *и* $\Omega\in[-G,G]$ *функции* $\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)$ *из теоремы* 1.1 *удовлетворяют оценке*

$$\|\rho^{\varepsilon,N}\|_{W_2^{2,2}}\leq C$$

для $(\theta,\omega)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}$, *где постоянная* C *не зависит от* ε, N, t *и* Ω.

Замечание 2.1. Неравенства (2.12), (2.14) и (2.15) дают бóльшую информацию о функциях $\rho^{\varepsilon,N}$, чем та, которая сформулирована в теореме 2.2. Однако в дальнейшем мы будем ссылаться именно на эту теорему.

2.4. Гладкость по переменной Ω. При таких же условиях на данные задачи, как и в п. 2.3 (а именно, $l_0=2$ в (A)), установим определенную гладкость решения $\rho^{\varepsilon,N}$ по параметру Ω. Точнее, будет доказана непрерывность частных производных $\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\Omega}$ и $\frac{\partial^2\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\Omega^2}$ в Q_T. Кроме того, будут установлены L^2-оценки, равномерные относительно параметров регуляризации ε и N.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены все предположения* (A) (*с* $l_0=2$), (B) *и* (C), *возможно, кроме условия* (b_3). *Тогда функции* $\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)$ *из теоремы* 1.1 *обладают следующими свойствами:*

1) *производные* $D_{t,\omega,\theta}^{k,l_1,l_2}\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\Omega}$ *непрерывны в* Q_T *при* $2k+l_1+l_2\leq 1$ *и непрерывны в* $Q_T\cap\{t>0\}$ *при* $2k+l_1+l_2\leq 3$;

2) *частные производные* $\rho_{\Omega\Omega}^{\varepsilon,N}$ *непрерывны в* Q_T *и* $D_{t,\omega,\theta}^{k,l_1,l_2}\rho_{\Omega\Omega}^{\varepsilon,N}$ *непрерывны в* $Q_T\cap\{t>0\}$ *при* $2k+l_1+l_2\leq 2$;

3) *имеют место неравенства*

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi],t\in[0,T],\Omega\in[-G,G]}\left|D_{\omega,\theta}^{l_1,l_2}\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\Omega}(\theta,\omega,t,\Omega)\right|\leq Ce^{-M\omega^2}$$

при $l_1+l_2\leq 1$ *и* $\omega\in\mathbb{R}$,

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi],\Omega\in[-G,G]}\left|D_{t,\omega,\theta}^{k,l_1,l_2}\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\Omega}(\theta,\omega,t,\Omega)\right|\leq\frac{C}{\sqrt{t}}e^{-M\omega^2}$$

при $2k+l_1+l_2=2$, $\omega\in\mathbb{R}$ *и* $t\in(0,T]$,

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi],\Omega\in[-G,G]}\left|D_{\omega,\theta}^{l_1,l_2}\frac{\partial^2\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\Omega^2}(\theta,\omega,t,\Omega)\right|\leq\frac{C}{t^{(l_1+l_2)/2}}e^{-M\omega^2}$$

при $l_1+l_2\leq 1$, $\omega\in\mathbb{R}$ *и* $t\in(0,T]$, *где постоянные* $C,M>0$ *зависят только от* ε, N, G, T, KA, C_0 *и* M_0;

4) *для функций* $\rho(\theta,\omega,t,\Omega) := \rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)$ *справедливы оценки*

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_\Omega^2\,d\omega d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_{\Omega\omega}^2+\rho_{\Omega\theta}^2\right)d\omega d\theta+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_{\Omega\omega\omega}^2+\rho_{\Omega\omega\theta}^2+\varepsilon\rho_{\Omega\theta\theta}^2\right)d\omega d\theta dt\le C,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_{\Omega\Omega}^2\,d\omega d\theta+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_{\Omega\Omega\omega}^2+\varepsilon\rho_{\Omega\Omega\theta}^2\right)d\omega d\theta dt\le C$$

при $t\in(0,T]$ *и* $\Omega\in[-G,G]$, *где постоянная* C *не зависит от* ε, N, t *и* Ω.

Доказательство. Продолжим сначала функцию $\rho^{\varepsilon,N}$ из теоремы 1.1 2π-периодически относительно переменной θ в $\mathbb{R}$. Ясно, что разностное отношение

$$\rho_{\Delta\Omega}^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega) := \frac{\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega+\Delta\Omega)-\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)}{\Delta\Omega} \tag{2.16}$$

является решением задачи Коши (см. (1.3) и (1.9))

$$\frac{\partial\rho_{\Delta\Omega}^{\varepsilon,N}}{\partial t}=\frac{\partial^2\rho_{\Delta\Omega}^{\varepsilon,N}}{\partial\omega^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\rho_{\Delta\Omega}^{\varepsilon,N}}{\partial\theta^2}-F_N\frac{\partial\rho_{\Delta\Omega}^{\varepsilon,N}}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial\omega}\left(F_N\rho_{\Delta\Omega}^{\varepsilon,N}\right)-\left(\Omega+\mathscr{K}_s^{\varepsilon,N}\right)\frac{\partial\rho_{\Delta\Omega}^{\varepsilon,N}}{\partial\omega}$$
$$-\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\omega}(\theta,\omega,t,\Omega+\Delta\Omega)\quad\text{при }(\theta,\omega,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,T],$$
$$\rho_{\Delta\Omega}^{\varepsilon,N}\big|_{t=0}=\frac{\rho_0(\theta,\omega,\Omega+\Delta\Omega)-\rho_0(\theta,\omega,\Omega)}{\Delta\Omega}\quad\text{при }(\theta,\omega)\in\mathbb{R}^2$$

при любом выборе параметров $\Omega\in[-G,G]$ и $\Delta\Omega\neq0$ таком, что $\Omega+\Delta\Omega\in[-G,G]$. Поэтому [14, 18] при $t\in(0,T]$ справедливо следующее представление:

$$\rho_{\Delta\Omega}^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)=\int_{\mathbb{R}^2}Z_\Omega^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,0)\frac{\rho_0(\eta,\xi,\Omega+\Delta\Omega)-\rho_0(\eta,\xi,\Omega)}{\Delta\Omega}\,d\eta d\xi$$
$$-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}Z_\Omega^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\omega}(\eta,\xi,\tau,\Omega+\Delta\Omega)\,d\eta d\xi d\tau, \tag{2.17}$$

где $Z_\Omega^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения (1.9) в полосе $\mathbb{R}^2\times(0,T]$ переменных (θ,ω,t). Это фундаментальное решение удовлетворяет неравенству

$$\left|D_{t,\omega,\theta}^{k,l_1,l_2}Z_\Omega^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)\right|\le\frac{C}{(t-\tau)^{1+k+(l_1+l_2)/2}}e^{-M(|\theta-\eta|^2+|\omega-\xi|^2)/(t-\tau)} \tag{2.18}$$

для $\theta,\omega,\eta,\xi\in\mathbb{R}$, $0\le\tau<t\le T$ и $2k+l_1+l_2\le2$, где $C,M>0$ — некоторые постоянные.

Кроме того, по теореме Лагранжа и (1.6) существует мажоранта

$$\frac{\rho_0(\theta,\omega,\Omega+\Delta\Omega)-\rho_0(\theta,\omega,\Omega)}{\Delta\Omega}\le C_0e^{-M_0\omega^2}. \tag{2.19}$$

Отсюда в силу свойства (a_1) функции ρ_0, утверждения 5 теоремы 1.1, (2.18), (2.19) и непрерывности $\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\omega}$ в $\overline{Q_T^*}$ (установленной в теореме 1.1) следует, что разностное отношение (2.16) имеет ограниченный предел при $\Delta\Omega\to0$, который может быть вычислен переходом к пределу при $\Delta\Omega\to0$ под знаками интегралов в (2.17). Это означает, что существует частная производная функции $\rho^{\varepsilon,N}$ по переменной Ω и справедливо представление

$$\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\Omega}(\theta,\omega,t,\Omega)=\int_{\mathbb{R}^2}Z_\Omega^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,0)\frac{\partial\rho_0}{\partial\Omega}(\eta,\xi,\Omega)\,d\eta d\xi$$

$$
-\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} Z_\Omega^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\omega}(\eta,\xi,\tau,\Omega)\,d\eta d\xi d\tau \quad (2.20)
$$

в Q_T^*.

Далее, поскольку $\frac{\partial\rho_0}{\partial\Omega}$ и $\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\omega}$ непрерывны и ограничены и, кроме того, по теореме Лагранжа и теореме 2.1 функция $\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\omega}$ удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных θ и ω, заключаем (из (2.20)), что для любого фиксированного значения $\Omega\in[-G,G]$ функция $v(\theta,\omega,t,\Omega):=\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\Omega}(\theta,\omega,t,\Omega)$ является классическим решением задачи Коши

$$
v_t = v_{\omega\omega}+\varepsilon v_{\theta\theta}-F_Nv_\theta+(F_Nv)_\omega-\Omega v_\omega-\mathscr{K}_s^{\varepsilon,N}v_\omega-\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\omega} \quad \text{при } (\theta,\omega,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,T],
$$

$$
v|_{t=0}=\frac{\partial\rho_0}{\partial\Omega}(\theta,\omega,\Omega) \quad \text{при } (\theta,\omega)\in\mathbb{R}^2.
$$

Затем, используя теоремы 2.1 и 2.3 из [1] и рассуждения, подобные использованным при доказательстве теоремы 3.1 в [1], выводим первые две оценки утверждения 3 теоремы. Наконец, действуя так же, как и при доказательстве теоремы 3.3 в [1], находим, что производные $D_{t,\omega,\theta}^{k,l_1,l_2}v$ непрерывны в $\overline{Q_T^*}$ при $2k+l_1+l_2\le 1$ и непрерывны в Q_T^* при $2k+l_1+l_2\le 3$. Этим завершается доказательство утверждения 1 теоремы. Ясно также, что $v(\theta,\omega,t,\Omega)$ — 2π-периодическая функция по переменной θ, так как $\rho^{\varepsilon,N}$ — 2π-периодическая по θ. Поэтому, используя вышеупомянутые свойства функции v и оценку (2.12), получаем (так же, как (2.12)) первую оценку утверждения 4 теоремы.

В дальнейшем мы будем использовать следующий важный факт. В силу непрерывности в $\overline{Q_T^*}$ производных $\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\omega}$, $\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\Omega}$ и $\frac{\partial}{\partial\omega}(\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\Omega})$ существует частная производная $\frac{\partial}{\partial\Omega}(\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\omega})$ и справедливо равенство

$$
\frac{\partial}{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\omega}\right)=\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\Omega}\right) \quad (2.21)
$$

в $\overline{Q_T^*}$ (см. [19]). Таким образом, производная $\frac{\partial}{\partial\Omega}(\frac{\partial\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\omega})$ тоже непрерывна и ограничена в $\overline{Q_T^*}$, и изменение порядка дифференцирования по переменным ω и Ω законно.

Теперь рассмотрим разностное отношение

$$
v_{\Delta\Omega}(\theta,\omega,t,\Omega):=\frac{v(\theta,\omega,t,\Omega+\Delta\Omega)-v(\theta,\omega,t,\Omega)}{\Delta\Omega} \quad (2.22)
$$

для $\Omega\in[-G,G]$ и $\Delta\Omega\ne 0$ таких, что $\Omega+\Delta\Omega\in[-G,G]$. Точно так же, как это сделано для разностного отношения (2.16), используя дополнительно (2.21), можно показать, что функция (2.22) имеет конечный предел при $\Delta\Omega\to 0$. Значит, существует частная производная функции v по переменной Ω, т. е. $\frac{\partial^2\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\Omega^2}(\theta,\omega,t,\Omega)$. Кроме того, представление

$$
\frac{\partial^2\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\Omega^2}(\theta,\omega,t,\Omega)=\Phi(\theta,\omega,t,\Omega):=\int_{\mathbb{R}^2} Z_\Omega^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,0)\frac{\partial^2\rho_0}{\partial\Omega^2}(\eta,\xi,\Omega)\,d\eta d\xi
$$

$$
-2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2} Z_\Omega^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)\frac{\partial^2\rho^{\varepsilon,N}}{\partial\omega\partial\Omega}(\eta,\xi,\tau,\Omega)\,d\eta d\xi d\tau \quad (2.23)
$$

имеет место во всей полосе Q_T^*. Анализируя функцию $\Phi(\theta,\omega,t,\Omega)$ в (2.23), ввиду свойств подынтегральных функций в (2.23) (см. свойство (a_1) функции ρ_0, равенство (2.21) и уже доказанные утверждение 1 теоремы и первые две оценки утверждения 3) заключаем [14, 18], что для любого фиксированного значения $\Omega \in [-G, G]$ функция $f(\theta, \omega, t, \Omega) := \frac{\partial^2 \rho^{\varepsilon,N}}{\partial \Omega^2}(\theta, \omega, t, \Omega)$ является классическим решением задачи Коши

$$f_t = f_{\omega\omega} + \varepsilon f_{\theta\theta} - F_N f_\theta + (F_N f)_\omega - \Omega f_\omega - \mathscr{K}_s^{\varepsilon,N} f_\omega - 2\frac{\partial^2 \rho^{\varepsilon,N}}{\partial\omega\partial\Omega}$$
$$\text{при } (\theta, \omega, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T],$$

$$f|_{t=0} = \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial \Omega^2}(\theta, \omega, \Omega) \quad \text{при } (\theta, \omega) \in \mathbb{R}^2.$$

Третья оценка утверждения 3 верна в силу: (a) предположения (1.6), (b) первой оценки утверждения 3 теоремы (уже доказанной), (c) теорем 2.1 и 2.2 из [1].

Таким образом, утверждение 3 теоремы полностью доказано. Стандартными рассуждениями (см. доказательство теоремы 3.3 в [1]) доказывается утверждение 2 теоремы. Ясно также, что $f(\theta, \omega, t, \Omega)$ — 2π-периодическая функция по переменной θ. Поэтому, действуя аналогично доказательству неравенства (2.4) и используя дополнительно первую оценку утверждения 4 теоремы (уже доказанную), приходим ко второй оценке утверждения 4. Теорема доказана.

Относительно оценок, равномерных по ε и N, теоремы 2.2 и 2.3 могут быть переформулированы как

Теорема 2.4. *Пусть выполнены все предположения* (A) (*с* $l_0 = 2$), (B) *и* (C), *возможно, кроме условия* (b_3). *Тогда при любом фиксированном значении* $t \in [0, T]$ *функции* $\rho^{\varepsilon,N}(\theta, \omega, t, \Omega)$ *из теоремы* 1.1 *удовлетворяют равномерным оценкам*

$$\|\rho^{\varepsilon,N}\|_{W_2^{2,2,2}} \le C$$

для $(\theta, \omega, \Omega) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \times [-G, G]$, *где постоянная* C *не зависит от* ε, N *и* t.

§ 3. Весовые оценки для решения регуляризованной задачи

В этом параграфе будут установлены некоторые дополнительные свойства решений $\rho^{\varepsilon,N}(\theta, \omega, t, \Omega)$ задач (1.9), (1.10), (1.3) (из теоремы 1.1) в предположении, что выполнены все свойства (A) (с $l_0 = 2$), (B) и (C), возможно, кроме (b_3). Для краткости мы будем часто опускать мультииндекс (ε, N) внутри этого параграфа и писать ρ вместо $\rho^{\varepsilon,N}$.

3.1. Оценка функции $\mathscr{K}_s^{\varepsilon,N}(\theta, t)$. Для дальнейших целей (в частности, чтобы получить оценку производной ρ_t в пространстве L^2) очень важно оценить интегральный член уравнения — функцию $\mathscr{K}_s^{\varepsilon,N}(\theta, t)$ в норме пространства C^1. Эта оценка будет получена посредством предварительного анализа первого весового свойства функции $\rho(\theta, \omega, t, \Omega)$, а именно после установления оценки нормы функции $\omega^2 \rho$ в пространстве L^1. Таким путем доказывается следующая

Теорема 3.1. *Пусть выполнены все предположения* (A) (*с* $l_0 = 2$), (B) *и* (C), *возможно, кроме условия* (b_3). *Тогда для любых фиксированных параметров* $k = 1, 2, \dots$ *и* $p \in [1, \infty)$ *функции* $\mathscr{K}_s^{\varepsilon,N}(\theta, t)$ *из теоремы* 1.1 *удовлетворяют оценке*

$$\left\|\mathscr{K}_s^{\varepsilon,N}(\theta, t)\right\|_{C^1([0,2\pi]\times[0,T])} + \left\|\mathscr{K}_s^{\varepsilon,N}(\theta, t)\right\|_{W_p^{k,1}([0,2\pi]\times[0,T])} \le C,$$

где постоянная C не зависит от $\varepsilon \in (0,1)$ и $N > 0$.

Доказательство. Умножая обе части уравнения (1.9) на ω^2 и интегрируя по переменным ω и θ, в силу свойств функции ρ, доказанных в теореме 1.1, заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho\,d\omega d\theta = 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+(\Omega+\mathscr{K}_s)\omega-\omega F_N)\rho\,d\omega d\theta. \tag{3.1}$$

Используя утверждения 3 и 4 теоремы 1.1, неравенства

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi],t\in[0,T]}|\mathscr{K}_s(\theta,t)| \le KA, \quad |\Omega|\le G, \quad 2|\omega|\le 1+\omega^2 \tag{3.2}$$

и тот факт, что

$$0\le \omega F_N(\omega)\le\omega^2 \quad \text{при } \omega\in\mathbb{R}, \tag{3.3}$$

из (3.1) получаем оценку

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho\,d\omega d\theta \le (G+KA+2)+(G+KA)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho\,d\omega d\theta. \tag{3.4}$$

По утверждению 3 теоремы 1.1 и лемме Гронуолла неравенство (3.4) означает, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho\,d\omega d\theta \le C, \tag{3.5}$$

где постоянная C не зависит от $\varepsilon > 0$, $N > 0$, $t\in(0,T]$ и $\Omega\in[-G,G]$.

Согласно теореме 2.1 соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{K}_s(\theta_0,t) = K\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi} g(\Omega)\sin(\theta-\theta_0)\rho_t(\theta,\omega,t,\Omega)\,d\theta d\omega d\Omega \tag{3.6}$$

справедливо для всех $\theta_0\in[0,2\pi]$ и $t\in[0,T]$. Подставим правую часть уравнения (1.9) в интеграл (3.6) вместо ρ_t. В силу теоремы 1.1 все члены, содержащие производные по ω в правой части (1.9), исчезают после интегрирования в (3.6). Следовательно, после интегрирования по частям по переменной θ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{K}_s(\theta_0,t) = K\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi} g(\Omega)(F_N\cos(\theta-\theta_0)-\varepsilon\sin(\theta-\theta_0))\rho\,d\theta d\omega d\Omega. \tag{3.7}$$

Вследствие неравенства $|F_N(\omega)|\le 1+\omega^2$ при $\omega\in\mathbb{R}$, соотношений (1.7), (3.5) и утверждений 3 и 4 теоремы 1.1 равенство (3.7) дает оценку $\sup\limits_{\theta,t}|\frac{\partial\mathscr{K}_s}{\partial t}(\theta,t)|\le C$, где постоянная C не зависит от $\varepsilon\in(0,1)$ и $N>0$. Ввиду этого факта и утверждения 6 теоремы 1.1 справедливо неравенство $\|\mathscr{K}_s(\theta,t)\|_{C^1}\le C$, равномерное относительно $\varepsilon\in(0,1)$ и $N>0$. Ясно также, что $\sup\limits_{\theta,t}|\frac{\partial^k\mathscr{K}_s}{\partial\theta^k}(\theta,t)|\le KA$ для каждого $k=1,2,\dots$ (см. (1.7) и утверждения 3 и 4 теоремы 1.1). Теорема доказана.

3.2. Оценка производной ρ_t. Теперь на основе результата предыдущего пункта можно получить оценку функции ρ_t в пространстве L^2 и тем самым установить оценку нормы функции $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ в анизотропном пространстве Соболева $W_2^{2,3,1}$ при любом фиксированном значении параметра $\Omega\in[-G,G]$. Справедлива следующая

Теорема 3.2. *Пусть выполнены все предположения* (A) (*с* $l_0 = 2$), (B) *и* (C), *возможно, кроме условия* (b_3). *Тогда при любом фиксированном значении* $\Omega \in [-G, G]$ *функции* $\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)$ *из теоремы* 1.1 *удовлетворяют оценке*

$$\|\rho^{\varepsilon,N}\|_{W_2^{2,3,1}} \le C$$

для $(\theta,\omega,t) \in [0,2\pi]\times\mathbb{R}\times[0,T]$, *где постоянная* C *не зависит от* $\varepsilon \in (0,1)$, $N > 0$ *и* Ω.

Доказательство. В силу теоремы 2.2 и оценки (2.15) необходимо только показать, что производная ρ_t ограничена в L^2. Дифференцируя обе части уравнения (1.9) по t, затем умножая их на ρ_t и интегрируя, ввиду теоремы 2.1 после простых вычислений приходим к равенству

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_t^2\,d\omega d\theta + 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_{\omega t}^2 + \varepsilon\rho_{\theta t}^2\right)d\omega d\theta$$
$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_N'\rho_t^2\,d\omega d\theta - 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\mathscr{K}_s}{\partial t}\rho_\omega\rho_t\,d\omega d\theta.$$

Следовательно, по неравенству Коши — Шварца, теореме 3.1 и (1.8) находим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_t^2\,d\omega d\theta + 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_{\omega t}^2 + \varepsilon\rho_{\theta t}^2\right)d\omega d\theta \le C\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_\omega^2 + \rho_t^2\right)d\omega d\theta$$

для $\varepsilon \in (0,1)$ и $N > 0$. Затем, используя (2.11), утверждение 3 теоремы 2.1 и лемму Гронуолла, получаем оценку

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_t^2\,d\omega d\theta + \int\limits_0^{t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\rho_{\omega t}^2 + \varepsilon\rho_{\theta t}^2\right)d\omega d\theta dt \le C,$$

где постоянная C не зависит от $\varepsilon \in (0,1)$, $N > 0$, $t \in (0,T]$ и $\Omega \in [-G,G]$. Теорема доказана.

3.3. Оценка функции $\omega\rho$ в пространстве $W_2^{2,3,1,2}(Q_T)$. Следующая теорема дает основную весовую оценку для функции $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены все предположения* (A) (*с* $l_0 = 2$), (B) *и* (C), *возможно, кроме условия* (b_3). *Тогда функции* $\rho^{\varepsilon,N}(\theta,\omega,t,\Omega)$ *из теоремы* 1.1 *удовлетворяют оценке*

$$\|\rho^{\varepsilon,N}\|_{W_2^{2,3,1,2}(Q_T)} + \|\omega\rho^{\varepsilon,N}\|_{W_2^{2,3,1,2}(Q_T)} \le C,$$

где постоянная C *не зависит от* $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $N > 0$.

Доказательство. Умножая обе части уравнения (1.9) на $\omega^2\rho$, находим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho^2\,d\omega d\theta + 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2(\rho_\omega^2 + \varepsilon\rho_\theta^2)\,d\omega d\theta$$
$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(2 + \omega^2F_N' + 2(\Omega + \mathscr{K}_s)\omega - 2\omega F_N)\rho^2\,d\omega d\theta. \quad (3.8)$$

Используя соотношения (1.8), (3.2) и (3.3), из (3.8) выводим оценку

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho^2\,d\omega d\theta+2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\big(\rho_\omega^2+\varepsilon\rho_\theta^2\big)\,d\omega d\theta$$
$$\le(G+KA+2)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho^2\,d\omega d\theta+(G+KA+1)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho^2\,d\omega d\theta. \quad (3.9)$$

В силу леммы Гроноулла неравенства (2.4) и (3.9) означают, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho^2\,d\omega d\theta+\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\big(\rho_\omega^2+\varepsilon\rho_\theta^2\big)\,d\omega d\theta dt\le C, \quad (3.10)$$

где постоянная C не зависит от $\varepsilon>0$, $N>0$, $t\in(0,T]$ и $\Omega\in[-G,G]$.

Далее, умножая обе части уравнения (1.9) на $\omega^2\rho_{\theta\theta}$, после интегрирования и несложных преобразований получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho_\theta^2\,d\omega d\theta+2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\big(\rho_{\omega\theta}^2+\varepsilon\rho_{\theta\theta}^2\big)\,d\omega d\theta$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(2+\omega^2F_N'+2(\Omega+\mathscr{K}_s)\omega-2\omega F_N)\rho_\theta^2\,d\omega d\theta+2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\mathscr{K}_c\rho_\omega\rho_\theta\,d\omega d\theta. \quad (3.11)$$

С помощью простых вычислений, использующих неравенство Коши — Шварца, (1.8), (3.2) и (3.3), из (3.11) извлекаем оценку

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho_\theta^2\,d\omega d\theta+2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\big(\rho_{\omega\theta}^2+\varepsilon\rho_{\theta\theta}^2\big)\,d\omega d\theta\le(G+KA+2)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_\theta^2\,d\omega d\theta$$
$$+KA\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho_\omega^2\,d\omega d\theta+(G+2KA+1)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho_\theta^2\,d\omega d\theta. \quad (3.12)$$

Следовательно, ввиду неравенств (2.9), (3.10) и леммы Гроноулла соотношение (3.12) приобретает вид

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho_\theta^2\,d\omega d\theta+\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\big(\rho_{\omega\theta}^2+\varepsilon\rho_{\theta\theta}^2\big)\,d\omega d\theta dt\le C \quad (3.13)$$

для $t\in(0,T]$ и $\Omega\in[-G,G]$, где постоянная C опять не зависит ни от $\varepsilon>0$, ни от $N>0$.

Затем, умножая обе части уравнения (1.9) на $\omega^2\rho_{\omega\omega}$ и интегрируя, приходим к равенству

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho_\omega^2\,d\omega d\theta+2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\big(\rho_{\omega\omega}^2+\varepsilon\rho_{\omega\theta}^2\big)\,d\omega d\theta$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big(\rho_\omega^2-2\rho_\theta\rho_\omega\big)\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega^2F_N)\,d\omega d\theta$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(2\varepsilon\rho_\theta^2-4\omega\rho_t\rho_\omega-2\omega^2F_N'\rho\rho_{\omega\omega}-2(\Omega+\mathscr{K}_s)\omega\rho_\omega^2\big)\,d\omega d\theta.$$

Ввиду неравенства Коши — Шварца, (1.8), (3.2) и (3.3) последнее соотношение легко переходит в оценку

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho_\omega^2\,d\omega d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\big(\rho_{\omega\omega}^2+\varepsilon\rho_{\omega\theta}^2\big)\,d\omega d\theta\le(G+KA+8)\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho_\omega^2\,d\omega d\theta$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(2\varepsilon\rho_\theta^2+(G+KA)\rho_\omega^2+2\rho_t^2+\omega^2\rho^2+3\omega^2\rho_\theta^2\big)\,d\omega d\theta. \quad (3.14)$$

Из (3.10), (3.13), (3.14) и теоремы 3.2 с помощью стандартных рассуждений выводим, что

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho_\omega^2\,d\omega d\theta+\int_0^{t}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2(\rho_{\omega\omega}^2+\varepsilon\rho_{\omega\theta}^2)\,d\omega d\theta dt\le C \quad (3.15)$$

равномерно относительно $\varepsilon\in(0,1)$, $N>0$, $t\in(0,T]$ и $\Omega\in[-G,G]$.

Аналогично можно установить оценку

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\big(\rho_{\theta\theta}^2+\rho_{\omega\omega}^2+\rho_t^2+\rho_\Omega^2+\rho_{\Omega\Omega}^2\big)\,d\omega d\theta+\int_0^{t}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho_{\omega\omega\omega}^2\,d\omega d\theta dt\le C, \quad (3.16)$$

равномерную относительно $\varepsilon\in(0,1)$, $N>0$, $t\in(0,T]$ и $\Omega\in[-G,G]$. Мы опускаем доказательство этого неравенства.

Суммируя результаты (3.10), (3.13), (3.15), (3.16) и теоремы 2.4 и 3.2, заключаем, что теорема доказана.

§ 4. Разрешимость исходной задачи

Для точной формулировки и доказательства основного результата нам понадобится ряд вспомогательных обозначений и фактов. Пусть $\mathscr{Q}$ — область в $\mathbb{R}^n$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ — мультииндекс с компонентами $\lambda_i\in(0,1]$ для $i=1,2,\dots,n$ и $[x,y]$ — отрезок прямой, соединяющий точки $x,y\in\mathbb{R}^n$. Пусть e_i обозначает единичный вектор в $\mathbb{R}^n$ с i-й компонентой, равной 1. Для функции $u(x)$ и параметра $h\in\mathbb{R}$ положим

$$\Delta_i(h)u(x)=\begin{cases}u(x+he_i)-u(x), & \text{если } [x,x+he_i]\subset\mathscr{Q},\\ 0, & \text{если } [x,x+he_i]\not\subset\mathscr{Q}.\end{cases}$$

Через $C^\lambda(\mathscr{Q})$ будем обозначать множество функций $u(x)\in C(\mathscr{Q})$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C^\lambda(\mathscr{Q})}=\|u\|_{C(\mathscr{Q})}+\sum_{i=1}^n\sup_{x\in\mathscr{Q},h>0}\frac{|\Delta_i(h)u(x)|}{h^{\lambda_i}}.$$

Как известно [20–22], справедливы следующие теоремы вложения.

Теорема 4.1. *Пусть $1<p<\infty$ и $\mathscr{Q}$ — ограниченная область, удовлетворяющая сильному условию l-рога [20] с мультииндексом $l=(l_1,l_2,\dots,l_n)$, где $l_i>0$ — натуральные числа для всех $i=1,2,\dots,n$. Если величина*

$$\theta=1-\frac{1}{p}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}+\dots+\frac{1}{l_n}\right) \quad (4.1)$$

положительна, то анизотропное пространство Соболева $W_p^l(\mathscr{Q})$ вкладывается в анизотропное пространство Гёльдера $C^\lambda(\mathscr{Q})$ с мультииндексом $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $\lambda_i = \theta l_i$ при $\theta l_i < 1$ и $\lambda_i < 1$ при $\theta l_i \geq 1$. Кроме того, каждая функция $u(x) \in W_p^l(\mathscr{Q})$ удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{C^\lambda(\mathscr{Q})} \leq C\|u\|_{W_p^l(\mathscr{Q})}$$

с константой C, не зависящей от u.

Теорема 4.2. *Пусть $1 \leq p < \infty$ и $\mathscr{Q}$ — область, удовлетворяющая условию l-рога [20] (в частности, область $\mathscr{Q}$ может быть неограниченной). Если $\theta > 0$ в (4.1), то анизотропное пространство Соболева $W_p^l(\mathscr{Q})$ вкладывается в пространство $C(\mathscr{Q})$. Кроме того, каждая функция $u(x) \in W_p^l(\mathscr{Q})$ удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{C(\mathscr{Q})} \leq C\|u\|_{W_p^l(\mathscr{Q})}$$

с константой C, не зависящей от u.

Рассмотрим подобласть $\mathscr{Q}_{R,T_0,\Omega_0} = Q_T \cap \{\omega \in [-R, R]\} \cap \{t = T_0\} \cap \{\Omega = \Omega_0\}$. Согласно теоремам 2.2 и 4.1 для любых фиксированных значений параметров $T_0 \in [0, T]$ и $\Omega_0 \in [-G, G]$ функции $\rho^{\varepsilon,N}(\theta, \omega, T_0, \Omega_0)$ из теоремы 1.1 удовлетворяют равномерной оценке

$$\|\rho^{\varepsilon,N}\|_{C^{\lambda_1,\lambda_2}(\mathscr{Q}_{R,T_0,\Omega_0})} \leq C$$

для любых фиксированных $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$, где константа C не зависит от ε, N, T_0 и Ω_0. Эта постоянная C зависит лишь от λ_1, λ_2, R и константы C из теоремы 2.2. В частности, это означает, что

$$\|\rho^{\varepsilon,N}\|_{C(\mathscr{Q}_R)} \leq C, \tag{4.2}$$

$$\frac{|\rho^{\varepsilon,N}(\theta_1, \omega, t, \Omega) - \rho^{\varepsilon,N}(\theta_2, \omega, t, \Omega)|}{|\theta_1 - \theta_2|^{\lambda_1}} \leq C, \quad \frac{|\rho^{\varepsilon,N}(\theta, \omega_1, t, \Omega) - \rho^{\varepsilon,N}(\theta, \omega_2, t, \Omega)|}{|\omega_1 - \omega_2|^{\lambda_2}} \leq C \tag{4.3}$$

при всех $(\theta_i, \omega, t, \Omega), (\theta, \omega_i, t, \Omega) \in \mathscr{Q}_R$, $i = 1, 2$, где $\mathscr{Q}_R = Q_T \cap \{\omega \in [-R, R]\}$ и величина C не зависит от ε и N.

Аналогично по теоремам 1.1, 2.4 и 4.1 имеем

$$\frac{|\rho^{\varepsilon,N}(\theta, \omega, t, \Omega_1) - \rho^{\varepsilon,N}(\theta, \omega, t, \Omega_2)|}{|\Omega_1 - \Omega_2|^{1/2}} \leq C \tag{4.4}$$

для всех $(\theta, \omega, t, \Omega_i) \in \mathscr{Q}_R$, $i = 1, 2$, с константой C, не зависящей от ε и N.

Наконец, теоремы 1.1, 3.2 и 4.1 означают, что

$$\frac{|\rho^{\varepsilon,N}(\theta, \omega, t_1, \Omega) - \rho^{\varepsilon,N}(\theta, \omega, t_2, \Omega)|}{|t_1 - t_2|^{1/12}} \leq C \tag{4.5}$$

для всех $(\theta, \omega, t_i, \Omega) \in \mathscr{Q}_R$, $i = 1, 2$, и эта постоянная C не зависит от $\varepsilon \in (0, 1)$ и $N > 0$.

Суммируя оценки (4.2)–(4.5), заключаем, что

$$\|\rho^{\varepsilon,N}\|_{C^{\lambda,\lambda,\frac{1}{12},\frac{1}{2}}(\mathscr{Q}_R)} \leq C$$

для любых фиксированных значений $\lambda \in (0, 1)$ и $R > 0$, где величина C не зависит от $\varepsilon \in (0, 1)$ и $N > 0$, но, вообще говоря, зависит от λ и R.

Аналогично, используя теоремы 1.1, 2.2 и 4.2, находим, что $\|\rho^{\varepsilon,N}\|_{C(Q_T)} \leq C$, где постоянная C не зависит от $\varepsilon > 0$ и $N > 0$.

Отметим, что по теореме о продолжении из [20] и теореме 3.3 существуют функции $u^{\varepsilon,N}(\theta, \omega, t, \Omega) \in W_2^{2,3,1,2}(\mathbb{R}^4)$ такие, что $u^{\varepsilon,N}(\theta, \omega, t, \Omega) = \rho^{\varepsilon,N}(\theta, \omega, t, \Omega)$ в Q_T и $\|u^{\varepsilon,N}\|_{W_2^{2,3,1,2}(\mathbb{R}^4)} \leq C$, где константа C не зависит от $\varepsilon \in (0, 1)$ и $N > 0$. Следующее утверждение является частным случаем теоремы 7.7 из [23].

Теорема 4.3. *Пусть последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что*

$$\|u_n\|_{W_2^{2,3,1,2}(\mathbb{R}^4)} \le C$$

для всех $n = 1, 2, \dots$, где постоянная C не зависит от n. Тогда существуют подпоследовательность $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и функция $u \in W_2^{2,3,1,2}(\mathbb{R}^4)$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \|u_{n_k} - u\|_{W_2^{1,2,0,1}(\mathscr{Q})} = 0$$

в любой ограниченной области $\mathscr{Q} \subset \mathbb{R}^4$.

При помощи стандартных соображений о компактности из теорем 1.1–4.3 вытекает следующий результат.

Теорема 4.4. *Пусть выполнены все предположения* (A) (*с* $l_0 = 2$), (B) *и* (C), *возможно, кроме условия* (b_3). *Тогда существуют последовательности ε_n и N_n, имеющие соответственно пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} N_n = \infty$, и функция $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ такие, что последовательность решений $\rho_n(\theta,\omega,t,\Omega) := \rho^{\varepsilon_n,N_n}(\theta,\omega,t,\Omega)$ из теоремы* 1.1 *и функция $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ обладают следующими свойствами:*

1) *последовательность $\rho_n(\theta,\omega,t,\Omega)$ равномерно ограничена в пространстве Соболева $W_2^{2,3,1,2}(Q_T)$ и в пространстве Гёльдера $C^{\lambda,\lambda,\frac{1}{12},\frac{1}{2}}(\mathscr{Q}_R)$ при любом выборе фиксированных $\lambda \in (0,1)$ и $R > 0$, где $\mathscr{Q}_R = Q_T \cap \{\omega \in [-R,R]\}$; более того, последовательность $\omega\rho_n$ равномерно ограничена в $W_2^{2,3,1,2}(Q_T)$;*

2) *функция $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^{2,3,1,2}(Q_T)$ и пространствам Гёльдера $C^{\lambda,\lambda,\frac{1}{12},\frac{1}{2}}(\mathscr{Q}_R)$ для всех $\lambda \in (0,1)$ и $R > 0$; кроме того, функция $\omega\rho$ принадлежит $W_2^{2,3,1,2}(Q_T)$;*

3) *последовательность $\rho_n(\theta,\omega,t,\Omega)$ сходится к функции $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ в следующем смысле:*

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n - \rho\|_{C(\mathscr{Q}_R)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|\rho_n - \rho\|_{W_2^{1,2,0,1}(\mathscr{Q}_R)} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} \to \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial \theta^2} \to \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} \quad \text{слабо в } L^2(\mathscr{Q}_R) \text{ при } n \to \infty$$

для всех $R > 0$;

4) *существует функция $\mathscr{K}^*(\theta,t)$, принадлежащая пространству Липшица $C^{1,1}(\Pi)$ на множестве $\Pi = \{(\theta,t) \in [0,2\pi] \times [0,T]\}$ и пространствам Соболева $W_p^{k,1}(\Pi)$ для всех $k = 1,2,\dots$ и всех $p \in [1,\infty)$, такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathscr{K}_s^{\varepsilon_n,N_n} - \mathscr{K}^*\|_{C(\Pi)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|\mathscr{K}_s^{\varepsilon_n,N_n} - \mathscr{K}^*\|_{W_p^{k,0}(\Pi)} = 0.$$

Теперь, используя теорему 4.4, докажем основное утверждение данной работы.

Теорема 4.5. *Пусть данные задачи* (1.1)–(1.3) *удовлетворяют всем предположениям* (A) (*с* $l_0 = 2$), (B) *и* (C), *сформулированным в* § 1. *Тогда существует сильное решение $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ задачи* (1.1)–(1.3), *а именно:*

1) *$\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ является непрерывной и ограниченной в Q_T функцией, принадлежащей пространству Соболева $W_2^{2,3,1,2}(Q_T)$ и пространствам Гёльдера $C^{\lambda,\lambda,\frac{1}{12},\frac{1}{2}}(\mathscr{Q}_R)$ для всех $\lambda \in (0,1)$ и $R > 0$, где $\mathscr{Q}_R = Q_T \cap \{\omega \in [-R,R]\}$; кроме того, $\omega\rho$ принадлежит $W_2^{2,3,1,2}(Q_T)$;*

2) *$\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ удовлетворяет уравнению* (1.1) *почти всюду в Q_T, а также граничным условиям* (1.2) *и начальным данным* (1.3) *как функция, непрерывная в Q_T;*

3) *$\rho(\theta,\omega,t,\Omega)\geq 0$ в Q_T и*

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(\theta,\omega,t,\Omega)\,d\omega d\theta=1 \tag{4.6}$$

для всех $t\in[0,T]$ и $\Omega\in[-G,G]$;

4) *соответствующая функция $\mathscr{K}_s(\theta,t)$ в (1.4) принадлежит пространству Липшица $C^{1,1}(\Pi)$ на множестве $\Pi=\{(\theta,t)\in[0,2\pi]\times[0,T]\}$ и пространствам Соболева $W_p^{k,1}(\Pi)$ для всех $k=1,2,\dots$ и всех $p\in[1,\infty)$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность ρ_n и функции ρ и $\mathscr{K}^*$ из теоремы 4.4. Покажем, что $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду в Q_T, нормирована и

$$\mathscr{K}^*(\theta,t)\equiv\mathscr{K}_s(\theta,t). \tag{4.7}$$

Все остальные утверждения теоремы являются следствиями теорем 1.1 и 4.4. Основную сложность представляет доказательство свойства (4.7). Основная идея состоит в обосновании (4.6) и затем получении (4.7) при помощи уже известного свойства (4.6).

Итак, начнем с доказательства свойства нормированности (4.6). Из утверждений 3 и 4 теоремы 1.1, утверждения 3 теоремы 4.4 и леммы Фату следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\rho(\theta,\omega,t,\Omega)\,d\theta d\omega\leq 1 \tag{4.8}$$

для $t\in[0,T]$ и $\Omega\in[-G,G]$, поэтому

$$\int\limits_{-G}^{G}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\rho(\theta,\omega,t,\Omega)\,d\theta d\omega d\Omega\leq 2G \tag{4.9}$$

при $t\in[0,T]$. Умножая обе части уравнения (1.9) для $\varepsilon=\varepsilon_n$ и $N=N_n$ на произвольную тестовую функцию $\varphi(\theta,\omega,t,\Omega)\in C^\infty(Q_T)$, имеющую компактный носитель по переменной ω (т. е. $\varphi(\theta,\omega,t,\Omega)=0$ в $Q_T\backslash\mathscr{Q}_{R_\varphi}$ при некотором значении $R_\varphi>0$), интегрируя по Q_T и переходя к пределу при $n\to\infty$, заключаем, что функция ρ из теоремы 4.4 удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{Q_T}\frac{\partial\rho}{\partial t}\varphi\,d\mu=\int\limits_{Q_T}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial\omega^2}-\omega\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\rho)-\Omega\frac{\partial\rho}{\partial\omega}-\mathscr{K}^*(\theta,t)\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right)\varphi\,d\mu. \tag{4.10}$$

Через $d\mu$ здесь обозначена мера Лебега в Q_T. Обоснуем подробно лишь предельный переход в нелинейном слагаемом из (1.9):

$$\left|\int\limits_{Q_T}\left(\mathscr{K}_s^{\varepsilon_n,N_n}\frac{\partial\rho_n}{\partial\omega}-\mathscr{K}^*\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right)\varphi\,d\mu\right|=\left|\int\limits_{\mathscr{Q}_R}\left(\mathscr{K}_s^{\varepsilon_n,N_n}\frac{\partial\rho_n}{\partial\omega}-\mathscr{K}^*\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right)\varphi\,d\mu\right|$$

$$\leq\|\varphi\|_{C(\mathscr{Q}_R)}\int\limits_{\mathscr{Q}_R}\left|\mathscr{K}_s^{\varepsilon_n,N_n}-\mathscr{K}^*\right|\left|\frac{\partial\rho_n}{\partial\omega}\right|d\mu+\|\varphi\|_{C(\mathscr{Q}_R)}\int\limits_{\mathscr{Q}_R}|\mathscr{K}^*|\left|\frac{\partial\rho_n}{\partial\omega}-\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right|d\mu$$

$$\leq\|\varphi\|_{C(\mathscr{Q}_R)}\|\mathscr{K}_s^{\varepsilon_n,N_n}-\mathscr{K}^*\|_{L^2(\mathscr{Q}_R)}\left\|\frac{\partial\rho_n}{\partial\omega}\right\|_{L^2(\mathscr{Q}_R)}$$

$$+\|\varphi\|_{C(\mathscr{Q}_R)}\|\mathscr{K}^*\|_{L^2(\mathscr{Q}_R)}\left\|\frac{\partial\rho_n}{\partial\omega}-\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\right\|_{L^2(\mathscr{Q}_R)}\to 0$$

при $n \to \infty$. Аналогично ввиду гладкости (а именно, $\rho_n, \mathscr{K}_s^{\varepsilon_n, N_n} \in C^1(Q_T)$ и $\frac{\partial^2 \rho_n}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial \omega^2} \in C(Q_T)$, см. теоремы 2.1, 2.3 и 3.1), умножая обе части (1.9) на ту же функцию $\varphi(\theta, \omega, t, \Omega)$, используя формулу Остроградского и переходя к пределу при $n \to \infty$, получим другое представление

$$\int_{-G}^{G} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} \rho(\theta, \omega, T_0, \Omega)\varphi \, d\theta d\omega d\Omega - \int_{-G}^{G} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} \rho(\theta, \omega, 0, \Omega)\varphi \, d\theta d\omega d\Omega - \int_{Q_{T_0}} \rho\varphi_t \, d\mu$$
$$= \int_{Q_{T_0}} (\varphi_{\omega\omega} + \omega\varphi_\theta - \omega\varphi_\omega + \Omega\varphi_\omega + \mathscr{K}^*\varphi_\omega)\rho \, d\mu \quad (4.11)$$

для всех $T_0 \in (0, T]$.

Теперь рассмотрим последовательность $\varphi_m(\omega) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $m = 1, 2, \dots$, определяемую следующим образом:

$$\varphi_m(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{для } |\omega| \le m, \\ 0 & \text{для } |\omega| \ge m + 5, \end{cases} \qquad \|\varphi_m\|_{C^2(\mathbb{R})} \le 1. \quad (4.12)$$

При таком выборе φ_m тождество (4.11) принимает вид

$$\int_{-G}^{G} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} \rho(\theta, \omega, T_0, \Omega)\varphi_m(\omega) \, d\theta d\omega d\Omega - \int_{-G}^{G} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} \rho(\theta, \omega, 0, \Omega)\varphi_m(\omega) \, d\theta d\omega d\Omega$$
$$= \int_{Q_{T_0}} \big(\varphi_m'' - \omega\varphi_m' + \Omega\varphi_m' + \mathscr{K}^*\varphi_m'\big)\rho \, d\mu. \quad (4.13)$$

Поскольку ρ и $\omega\rho$ принадлежат $L^2(Q_T)$ и $\mathscr{K}^*(\theta, t)$ ограничена, благодаря наличию в (4.9) суммируемой мажоранты, переходя к пределу при $m \to \infty$ в (4.13) и используя неравенство Гёльдера и (4.12), приходим к соотношению

$$\int_{-G}^{G} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} \rho(\theta, \omega, T_0, \Omega) \, d\theta d\omega d\Omega - \int_{-G}^{G} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} \rho(\theta, \omega, 0, \Omega) \, d\theta d\omega d\Omega = 0$$

для $T_0 \in (0, T]$. Следовательно (см. (1.5)),

$$\int_{-G}^{G} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} \rho(\theta, \omega, t, \Omega) \, d\theta d\omega d\Omega = 2G \quad (4.14)$$

при $t \in [0, T]$. Согласно (4.8) и (4.14) равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} \rho(\theta, \omega, t, \Omega) \, d\theta d\omega = 1 \quad (4.15)$$

справедливо при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ для почти всех $\Omega \in [-G, G]$.

Замечание 4.1. Можно показать, что интеграл (4.15) является непрерывной функцией на множестве $(t, \Omega) \in [0, T] \times [-G, G]$.

Таким образом, согласно (4.15) и замечанию 4.1 свойство нормированности (4.6) теоремы доказано. Теперь мы готовы доказать соотношение (4.7). В самом деле, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $M(\varepsilon, t) > 0$ такое, что

$$\int_{-G}^{G} \int_{|\omega| > M} \int_{0}^{2\pi} \rho(\theta, \omega, t, \Omega) \, d\theta d\omega d\Omega < \varepsilon, \quad (4.16)$$

и найдется такое $N_0(\varepsilon,t)>0$, что

$$\|\rho_n-\rho\|_{C(\mathscr{Q}_M)}<\frac{\varepsilon}{4\pi M(\varepsilon,t)} \tag{4.17}$$

для всех $n>N_0(\varepsilon,t)$. Следовательно,

$$\begin{gathered}\left|\mathscr{K}_s^{\varepsilon_n,N_n}(\theta,t)-\mathscr{K}_s(\theta,t)\right|\le g_0\int\limits_{-G}^{G}\int\limits_{-M}^{M}\int\limits_{0}^{2\pi}|\rho_n-\rho|\,d\theta d\omega d\Omega+g_0\int\limits_{-G}^{G}\int\limits_{|\omega|>M}\int\limits_{0}^{2\pi}\rho_n\,d\theta d\omega d\Omega\\ +g_0\int\limits_{-G}^{G}\int\limits_{|\omega|>M}\int\limits_{0}^{2\pi}\rho\,d\theta d\omega d\Omega\le g_0(1+2G)\varepsilon+g_0\int\limits_{-G}^{G}\int\limits_{|\omega|>M}\int\limits_{0}^{2\pi}\rho_n\,d\theta d\omega d\Omega,\end{gathered} \tag{4.18}$$

где g_0 — константа из свойства (b_3) функции $g(\Omega)$. Кроме того, в силу (4.14), (4.16) и (4.17) имеем оценку

$$\int\limits_{-G}^{G}\int\limits_{-M}^{M}\int\limits_{0}^{2\pi}\rho_n\,d\theta d\omega d\Omega=\int\limits_{-G}^{G}\int\limits_{-M}^{M}\int\limits_{0}^{2\pi}\rho\,d\theta d\omega d\Omega-\int\limits_{-G}^{G}\int\limits_{-M}^{M}\int\limits_{0}^{2\pi}(\rho-\rho_n)\,d\theta d\omega d\Omega$$
$$>2G-(1+2G)\varepsilon,$$

поэтому (см. утверждение 4 теоремы 1.1)

$$\int\limits_{-G}^{G}\int\limits_{|\omega|>M}\int\limits_{0}^{2\pi}\rho_n\,d\theta d\omega d\Omega<(1+2G)\varepsilon. \tag{4.19}$$

Объединяя (4.18) и (4.19), заключаем, что для каждого $\varepsilon>0$ найдется $N_0(\varepsilon,t)>0$ такое, что

$$\left|\mathscr{K}_s^{\varepsilon_n,N_n}(\theta,t)-\mathscr{K}_s(\theta,t)\right|<2g_0(1+2G)\varepsilon$$

при $n>N_0(\varepsilon,t)$ и $(\theta,t)\in[0,2\pi]\times[0,T]$, что означает справедливость искомого равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\mathscr{K}_s^{\varepsilon_n,N_n}(\theta,t)-\mathscr{K}_s(\theta,t)\right|\equiv 0$ в Π. Значит, формула (4.7) доказана (см. утверждение 4 теоремы 4.4). Наконец, согласно (4.10), (4.7) и лемме Дюбуа-Реймона [22] функция $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду в Q_T. Теорема доказана.

Заключение

Доказано существование сильных решений в пространствах Соболева и Гёльдера для нелинейного интегродифференциального уравнения (1.1) с периодическими граничными условиями (1.2) и начальными данными (1.3). Такое уравнение обладает рядом особенностей. В частности, оно может рассматриваться как параболическое уравнение, вырожденное по одной из пространственных переменных (как уравнение Фоккера — Планка, возникающее в теории переноса), и, кроме того, оно рассматривается в неограниченной области и имеет неограниченные коэффициенты. Предложено регуляризованное интегропараболическое уравнение, существование и регулярность решения которого изучены в [1]. В настоящей работе обоснован предельный переход по параметрам регуляризации, в результате чего доказано существование сильных решений исходной задачи (1.1)–(1.3). Подчеркнем, что новые и представляющие самостоятельный интерес точные оценки убывания сверток непрерывных функций с фундаментальными решениями линейных параболических уравнений получены в [1] как необходимый инструмент обоснования предельного перехода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. М. (мл.), Спиглер Р., Ахметов Д. Р.* Нелинейные интегропараболические уравнения в неограниченных областях. Существование классических решений со специальными свойствами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 585–609.
2. *Kuramoto Y.* Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators // Intern. sympos. on mathematical problems in theoretical physics. 1975. New York: Springer-Verl., P. 420–422. (Lecture Notes in Phys.; 39).
3. *Sakaguchi H.* Cooperative phenomena in coupled oscillator systems under external fields // Progr. Theoret. Phys. 1998. V. 79. P. 39–46.
4. *Lavrentiev M. M. Jr., Spigler R.* Existence and uniqueness of solutions to the Kuramoto — Sakaguchi nonlinear parabolic integrodifferential equation // Differential Integral Equations. 2000. V. 13, N 4–6. P. 649–667.
5. *Ermentrout B.* An adaptive model for synchrony in the firefly Pteroptix malaccae // J. Math. Biol. 1991. V. 29. P. 571–585.
6. *Tanaka H. A., Lichtenberg A. J., Oishi S.* First order phase transitions resulting from finite inertia in coupled oscillator systems // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 2104–2107.
7. *Tanaka H. A., Lichtenberg A. J., Oishi S.* Self-synchronization of coupled oscillators with hysteretic responses // Phys. Dokl. 1997. V. 100. P. 279–300.
8. *Acebrón J. A., Spigler R.* Adaptive frequency model for phase-frequency synchronization in large populations of globally coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81, N 11. P. 2229–2232.
9. *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. New York: Prentice-Hall, 1964.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
11. *Белоносов В. С.* Оценки решений параболических систем в весовых классах Гёльдера и некоторые их приложения // Мат. сб. 1979. Т. 110, № 2. С. 163–188.
12. *Белоносов В. С.* Классические решения квазиэллиптических уравнений // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 9. С. 21–40.
13. *Pao C. V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York: Plenum, 1992.
14. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, № 3. С. 3–146.
15. *Ахметов Д. Р.* Об изоморфизме, порождаемом линейным параболическим уравнением // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 493–511.
16. *Белоносов В. С.* Внутренние оценки решений квазипараболических систем // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 20–35.
17. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-Параболические системы // Тр. семинара по функциональному анализу. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. Т. 1. С. 3–175.
18. *Ахметов Д. Р.* О необходимых и достаточных условиях классической разрешимости задачи Коши для линейных параболических уравнений // Мат. труды. 1998. Т. 1, № 1. С. 3–28.
19. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т. 1.
20. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
21. *Успенский С. В, Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и их приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
22. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
23. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

Статья поступила 22 декабря 2000 г.

Лаврентьев Михаил Михайлович (мл.)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
mmlavr@nsu.ru

Спиглер Ренато (Spigler Renato)
Università degli Studi Roma Tre, Dipartimento di Matematica
Largo San Leonardo Murialdo, 1, 00146 Roma (Italia)
spigler@dmsa.unipd.it

Ахметов Денис Робертович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
adr@math.nsc.ru