Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 517.51

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ АБЕЛЯ — ПУАССОНА

Л. П. Фалалеев

Аннотация: Найдено точное значение постоянной в главном члене уклонения функций из класса Зигмунда Z_α от обобщенных операторов Абеля — Пуассона, определяемых множителями суммирования $\lambda_\nu(r) = r^{\nu^l}$ рядов Фурье по тригонометрической системе в случае $\alpha \in (0,2)$, $l \in (0,2]$. Библиогр. 14.

Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$,

$$A_{r,l}(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)P_{r,l}(t)\,dt, \tag{1}$$

$$P_{r,l}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu^l}\cos\nu t, \quad 0 < r < 1,\ l > 0,$$

— обобщенный оператор Абеля — Пуассона.

Если $l = 1$, то оператор (1) — линейный положительный оператор Абеля — Пуассона. При $l = 2$ оператор (1) является линейным положительным оператором Якоби — Вейерштрасса и, как показал П. П. Коровкин [1], осуществляет наилучшее асимптотическое приближение функций класса Z_2,

$$Z_\alpha = \{f(x) \in C_{2\pi} : |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \le 2|h|^\alpha\}, \quad 0 < \alpha \le 2,\ |h| \le 2\pi,$$

среди операторов с ядром вида

$$\frac{1}{2} + r\cos t + \sum_{\nu=2}^{\infty}\lambda_\nu(r)\cos\nu t.$$

Положительность операторов (1) для $0 < l \le 1$ следует из выпуклости коэффициентов ядра $P_{r,l}(t)$, при $1 < l < 2$ она вытекает из положительности соответствующих косинус-преобразований и формулы обращения Пуассона, как установлено В. А. Баскаковым [2]. В этой работе приведены разложения в ряд по степеням $\beta = \ln\frac{1}{r} < \pi$ уклонений

$$\sup_f \|f(x) - A_{r,l}(\cdot)\|_{C_{2\pi}} \tag{2}$$

при $l = 1$, $l = 2$ для функций из классов $\mathrm{Lip}_1\,\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, и $W^{(p)}$, $p = 1, 2, \dots$. При $l = 1$ для $f(x) \in \mathrm{Lip}_1\,\alpha$, $0 < \alpha < 1$, нахождению точных асимптотических постоянных в разложении (2) посвящен ряд работ (см. обзор в [3–5]). Для $l = 1$ и $f \in Z_1$ ($\mathrm{Lip}_1\, 1$) полное асимптотическое разложение вида

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k(1-r)^k\ln\frac{1}{1-r}+\beta_k(1-r)^k\right\},$$

$$\alpha_k=\frac{1}{k},\quad \beta_k\frac{1}{k}\left\{\ln 2+\frac{1}{k}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i\cdot 2^i}\right\},\quad k=1,2,\dots,$$

получено в [6], позднее оно было передоказано в [3].

При рассмотрении операторов $A_{r,l}(f,x)$ как полигармонических ($l = 1, 2, \dots$) в [7] дан точный порядок приближения

$$\sup_{f\in \mathrm{Lip}_1\,\alpha}\|f(x)-A_{r,l}(f,x)\|_{C_{2\pi}}\le C(1-r)^{\alpha/l},\quad C>0,$$

без исследования вопроса о положительности ядра $P_{r,l}(t)$ в зависимости от l.

При $l = 2$, $f \in Z_1$ задача (2) рассматривалась в [1] и для $l = 2$, $f \in Z_\alpha$, $0 < \alpha < 2$, — в работе [8].

Целью нашей заметки является расширение шкалы значений параметров $0 < \alpha \le 2$, $0 < l \le 2$, при которых возможно нахождение асимптотически точной константы в главном члене верхней грани уклонения функций из класса Зигмунда Z_α от обобщенных операторов Абеля — Пуассона.

Рассмотрим более общую постановку задачи. Поставим в соответствие каждой $f(x) \in C_{2\pi}$ оператор

$$U(f,\lambda,r)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu(r)(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{\nu+1}^{\infty}\lambda_\nu(r)\cos\nu t\right\}dt,$$

a_0, a_ν, b_ν, $\nu = 1, 2, \dots$, — коэффициенты Фурье функции f, $\lambda_\nu(r)$ — некоторая функция переменной r такая, что

$$\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu(r)\cos\nu t\ge 0,\quad t\in[-\pi,\pi],$$

и ряд равномерно сходится. Для таких положительных операторов хорошо известно (см. [8–10]), что

$$\sup_{f\in Z_\alpha}\|f(x)-U(f,\lambda,r)\|_{C_{2p}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^\alpha\left\{\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu(r)\cos\nu t\right\}dt,\quad 0<\alpha\le 1,\quad (3)$$

причем точная верхняя грань достигается для четной функции $\varphi_1(t) = |t|^\alpha \in Z_\alpha$, $t \in [-\pi, \pi]$. Эта же оценка справедлива и на классе $\mathrm{Lip}_1\,\alpha$, $0 < \alpha \le 1$. Для $1 < \alpha \le 2$ в (3) экстремальной функцией является $\varphi_2(t) = |\sin t|^\alpha \in Z_\alpha$, но так как $|\sin t|^\alpha - |t|^\alpha = O(t^{\alpha+2})$, можно использовать приведенную в [8] общую асимптотическую оценку вида

$$\sup_{f\in Z_\alpha}\|f(x)-U(f,\lambda,r)\|_{C_{2\pi}}=\frac{2}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Delta\lambda_\nu(r)}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^\alpha}O\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{|\Delta\lambda_\nu(r)|}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2}\right),\quad (4)$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, $0 < \alpha < 2$, $\Delta\lambda_\nu(r) = \lambda_\nu(r) - \lambda_{\nu+1}(r)$, $\nu = 1, 2, \ldots, \lambda_0(r) = 1$. В случае $\alpha = 2$ остаточный член в (4) совпадает в порядковом отношении с главным членом, поэтому для множителей $\lambda_\nu(r) = r^{\nu^l}$ при решении задачи (3) применяют свертку ядра, как, например, это проделано в работе [2].

В дальнейшем нам понадобятся стандартные представления ядра оператора (1), которые получаются применением преобразования Абеля:

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu(r) \cos \nu t = \lim_{N\to\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{N} \Delta\lambda_\nu(r) \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos \nu t \right) + r^{\nu^N} \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos Nt \right) \right\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta\lambda_\nu(r) D_\nu(t), \quad (5)$$

где

$$D_\nu(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos \nu t = \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

— ядро Дирихле. Учитывая, что

$$\frac{1}{\nu+1} \sum_{k=0}^{\nu} D_k(t) = \frac{1}{2(\nu+1)} \frac{\sin^2(\nu+1)\frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} = K_\nu(t), \quad \nu = 0, 1, \ldots,$$

$K_\nu(t)$ — ядро Фейера, после повторного преобразования Абеля получим

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu(r) \cos \nu t = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2\lambda_\nu(r) \frac{\sin^2(\nu+1)\frac{t}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}}, \quad (6)$$

$$\Delta^2\lambda_\nu(r) = \Delta\lambda_\nu(r) - \Delta\lambda_{\nu+1}(r), \quad \nu = 0, 1, \ldots.$$

Поскольку положительные ядра операторов легко представимы в виде линейных комбинаций ядер Фейера, удобно использовать соответствующие моменты этих ядер. Так, в [10] при $0 < \alpha \leq 1$ установлено полное асимптотическое представление ($\nu \to \infty$) момента порядка α ядра Фейера (см. также [9]):

$$I_1(\alpha, \nu) = \int_0^{\pi/2} \frac{t^\alpha \sin^2(\nu+1)t}{\sin^2 t} \, dt.$$

Для $0 < \alpha < 1$ мы будем использовать его в упрощенной форме:

$$I_1(\alpha, \nu) = \frac{\Gamma(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{2^\alpha(1-\alpha)} (\nu+1)^{1-\alpha} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} t^\alpha \left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2} \right) dt - \frac{1}{2^\alpha(1-\alpha)\pi^{1-\alpha}} + O(\nu^{-1-\alpha}). \quad (7)$$

Равенство (7) легко следует из [11, формула 858.813] и соотношения

$$\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2} = O(1), \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

В случае, когда степень полинома Фейера не зафиксирована, первый момент этого ядра удобно представлять в виде (см. [12])

$$\begin{aligned} I_1(1,\nu) &= \int\limits_0^{\pi/2} \frac{t\sin^2(\nu+1)t}{\sin^2 t}\,dt \\ &= I_2(\nu) + \frac{1}{2}\left\{1 + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k+2}B_{2k+2}}{(2k+1)!}\int\limits_0^{\pi/2} t^{2k+1}\cos^2(\nu+1)t\,dt\right\}, \end{aligned}$$

где B_{2k} — числа Бернулли,

$$\int\limits_0^{\pi/2} t^{2k+1}\cos^2(\nu+1)t\,dt = O((\nu+1)^{-2}), \quad \nu\to\infty,\ k=1,2,\dots,$$

$$\begin{aligned} I_2(\nu) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos t\sin^2(\nu+1)t\,dt}{\sin t} &= \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^{\nu}\frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{(-1)^{\nu+1}-1}{2\nu+2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k+1} + O(1). \qquad (8) \end{aligned}$$

Последнее равенство получается из тождества

$$\sum_{k=1}^{\nu}\sin(2k-1)t = \frac{\sin^2(\nu+1)t}{\sin t}$$

после умножения его на $\cos t$ и последующего интегрирования в пределах от 0 до $\pi/2$. Обозначим

$$\Delta_l(r,\alpha) = \sup_{f\in Z_\alpha}\|f(x) - A_{r,l}(f,x)\|_{C_{2\pi}}.$$

Теорема. *При* $0<\alpha<l\le 2$ *справедливо асимптотическое равенство* $(r\to 1-)$

$$\Delta_l(r,\alpha) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{l-\alpha}{l}\right)(1-r)^{\alpha/l} + \Lambda(r,\alpha),$$

где

$$\Delta(r,\alpha) = \begin{cases} O(1-r), & 0<\alpha<1,\ 0<\alpha<l<\alpha+1;\ \alpha=1,\ 1<l<2; \\ O\big((1-r)\ln\frac{1}{1-r}\big), & 1<\alpha<2,\ \alpha<l\le 2; \\ & \qquad 0<\alpha<1,\ l=\alpha+1;\ \alpha=1,\ l=2; \\ O\left((1-r)\frac{\alpha+1}{l}\right), & 0<\alpha<1,\ 1+\alpha<l\le 2; \end{cases} \qquad (9)$$

кроме того,

$$\begin{cases} \Delta_\alpha(r,\alpha) = \frac{2}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}(1-r)\ln\frac{1}{1-r} + O(1-r), & 0<\alpha<2, \\ \Delta_l(r,\alpha) = O(1-r), & 0<l<\alpha<2. \end{cases} \qquad (9a)$$

Доказательство. Представим уклонение $f(x)$ от обобщенного оператора Абеля — Пуассона в виде

$$f(x) - A_{r,l}(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x+t)-f(x)\}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu^l}\cos\nu t\right\}dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)\}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu^l}\cos\nu t\right\}dt.$$

Воспользовавшись определением класса Зигмунда Z_α и равенством (3), получим $(0<\alpha\le 1)$

$$\Delta_l(r,\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^\alpha \left\{\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu^l}\cos\nu t\right\}dt,$$

что с учетом преобразований (5), (6) дает

$$\Delta_l(r,\alpha) = \frac{2^{1+\alpha}}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^2 r^{\nu^l}\frac{t^\alpha \sin^2(\nu+1)t}{\sin^2 t}\,dt.$$

В силу равенства (7) для $0<\alpha<1$ имеем

$$\Delta_l(r,\alpha) = \frac{2^{1+\alpha}}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^2 r^{\nu^l}\left\{\frac{\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{2^\alpha(1-\alpha)}(\nu+1)^{1-\alpha}+O(1)\right\} = \Sigma_1+\Sigma_2.$$

Оценим в отдельности Σ_1 и Σ_2. Совершая обратное преобразование Абеля и учитывая асимптотическое равенство $(n\to\infty)$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^\beta = \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}+O(n^\beta), \quad \beta>-1,$$

получим

$$\Sigma_1 = \frac{2}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta r^{\nu^l}\frac{1}{(\nu+1)^\alpha}+O\left(\sum_{\nu=2}^{\infty}\Delta^2 r^{\nu^l}\frac{1}{(\nu+1)^\alpha}\right). \tag{10}$$

Поскольку

$$\Sigma_2 = C\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^2 r^{\nu^l}\right) = C\Delta r^0 = C(1-r)$$

(здесь и далее $C>0$ — постоянная, не зависящая от r, символ $O((1-r)^\gamma)$ обозначает величины, имеющие указанный порядок при $r\to 1-$), из (10) следует

$$\Delta_l(r,\alpha) = \frac{2}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta r^{\nu^l}\frac{1}{(\nu+1)^\alpha}+O(1-r). \tag{11}$$

Заметим, что

$$\Delta r^{\nu^l} = r^{\nu^l}-r^{(\nu+1)^l} = r^{\nu^l}(1-r^{(\nu+1)^l-\nu^l})$$
$$= (1-r)r^{\nu^l}\cdot l\cdot\nu^{l-1}+C(1-r)^2 r^{\nu^l}\cdot\nu^{2l-2}+C(1-r)r^{\nu^l}\cdot\nu^{l-2}. \tag{12}$$

Перепишем равенство (11) с учетом (12):

$$\Delta_l(r,\alpha)=\frac{2}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\cdot l(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^l}(\nu+1)^{l-\alpha-1}$$
$$+C(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^l}(\nu+1)^{l-\alpha-2}+C(1-r)^2\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^l}(\nu+1)^{2l-2-\alpha}. \quad (13)$$

Пусть $0<\alpha<l\le 1$. Тогда функция

$$\varphi_3(x)=r^{x^l}\cdot x^{l-\alpha-1},\quad x\ge 1,$$

монотонно убывает, откуда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^l}(\nu-1)^{l-\alpha-1}=\int_0^{\infty}r^{x^l}x^{l-\alpha-1}\,dx+O(1)$$
$$=\frac{1}{l}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\frac{\alpha}{l}-1}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)-1}\,dt+O(1)=\frac{1}{l}\Gamma\left(\frac{l-\alpha}{l}\right)\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\frac{\alpha}{l}-1}+O(1),$$

что с учетом асимптотического равенства

$$\ln\frac{1}{r}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-r)^k}{k},\quad r\to 1-, \quad (14)$$

дает

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^l}(\nu+1)^{l-\alpha-1}=\frac{1}{l}\Gamma\left(\frac{l-\alpha}{l}\right)(1-r)^{\frac{\alpha}{l}-1}+O(1). \quad (15)$$

Оценим оставшиеся слагаемые в равенстве (13):

$$(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^l}(\nu+1)^{l-2-\alpha}<(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)^{2-l+\alpha}}=C(1-r),$$
$$(1-r)^2\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^l}(\nu+1)^{-\alpha+2l-2}<C(1-r)^2\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^l}(\nu+1)^{l-\alpha-1}=C(1-r)^{\frac{\alpha}{l}+1}.$$

Из этих оценок и (13), (15) следует справедливость равенства (9) для $0<\alpha<l\le 1$. В дальнейшем нам понадобятся следующие общие асимптотические оценки. Введем функцию

$$\varphi_4(x)=r^{x^l}x^{\beta},\quad x\ge 0,\ 0<r<1,\ \beta>0,\ l>0.$$

Она имеет единственный максимум в точке

$$x_0=\left(-\frac{\beta}{l\ln r}\right)^{\frac{1}{l}},$$

при этом

$$\varphi_4(x_0)=r^{\frac{\beta}{l\ln\frac{1}{r}}}\left(\frac{\beta}{l\ln\frac{1}{r}}\right)^{\frac{\beta}{l}}<C\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{\beta}{l}},$$

что с учетом асимптотического равенства (14) дает равенство

$$\varphi_4(x_0)=C(1-r)^{-\frac{\beta}{l}}+O((1-r)^{-\frac{\beta}{l}+1}). \quad (16)$$

Из (16) следует, что

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l}(\nu+1)^\beta = \int\limits_0^\infty e^{-\ln\frac{1}{r}x^l} x^\beta\,dx + O((1-r)^{-\frac{\beta}{l}})$$
$$= \frac{1}{l}\Gamma\left(\frac{\beta+1}{l}\right)(1-r)^{-\frac{\beta+1}{l}} + O((1-r)^{-\frac{\beta}{l}}). \quad (17)$$

Пусть $0 \le \gamma < 1$. Тогда функция

$$\varphi_5(x) = r^{x^l}/x^\gamma, \quad x \ge 1,\ 0 < r < 1,\ l > 0,$$

монотонно убывает, откуда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l}\frac{1}{(\nu+1)^\gamma} = \int\limits_0^\infty \frac{r^{x^l}}{x^\gamma}\,dx + O(1) = \frac{1}{l}\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{l}\right)\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\frac{\gamma-1}{l}} + O(1)$$
$$= \frac{1}{l}\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{l}\right)(1-r)^{\frac{\gamma-1}{l}} + O((1-r)^{\frac{\gamma-1}{l}+1}). \quad (18)$$

Мы будем использовать также известное биномиальное разложение

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\alpha x^\nu, \quad \alpha > -1, \quad (19)$$

где A_ν^α — числа Чезаро, для которых выполняется асимптотическое равенство

$$A_\nu^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+\nu)}{\nu!} = \frac{(\nu+1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + O(\nu^{\alpha-1}), \quad \nu\to\infty. \quad (20)$$

Пусть $1 < l < \alpha+1$. В этом случае функция $\varphi_3(x)$ также монотонно убывает и справедливо равенство (15). Кроме того,

$$(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l}(\nu+1)^{l-\alpha-2} < C(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)^{2+(\alpha-l)}} = O(1-r).$$

Для оценки последней суммы в равенстве (13) будем различать два случая, так как $-\alpha < 2l-2-\alpha < \alpha$:

(а) $l > 1+\frac{\alpha}{2}$, $\beta = 2l-2-\alpha > 0$,

(б) $l \le 1+\frac{\alpha}{2}$, $0 \le \gamma = 2+\alpha-2l < 1$.

В случае (а) из (17) найдем

$$(1-r)^2\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l}(\nu+1)^{2l-2-\alpha}$$
$$= C(1-r)^2\left\{(1-r)^{-2+\frac{\alpha+1}{l}} + (1-r)^{-2+\frac{\alpha+2}{l}}\right\} = O((1-r)^{\frac{\alpha+1}{l}}).$$

В силу (б) и равенства (18)

$$(1-r)^2\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l}\frac{1}{(\nu+1)^{2+\alpha-2l}} < C(1-r)^2\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} = O(1-r).$$

Таким образом, равенство (9) для рассмотренного случая доказано. Пусть $l = \alpha+1$. Как следует из (18), при $\gamma = 0$

$$(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} = \frac{1}{l}\Gamma\left(\frac{1}{l}\right)(1-r)^{\frac{l-1}{l}} + O((1-r)^{2-\frac{1}{l}}) = \frac{1}{l}\Gamma\left(\frac{l-\alpha}{l}\right)(1-r)^{\frac{\alpha}{l}} + O(1-r).$$

Для суммы

$$S(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2\varepsilon}}{n},\quad \varepsilon>0,$$

в [13, с. 13] установлено асимптотическое равенство ($\varepsilon\to 0+$)

$$S(\varepsilon)=-\frac{1}{2}\ln\varepsilon+\frac{\delta}{2}+O(\sqrt{\varepsilon}),$$

δ — постоянная Эйлера. Полагая $\varepsilon=\ln\frac{1}{r}$ ($\varepsilon\to 0+$ при $r\to 1-$), из (14) получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^2}\frac{1}{\nu+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-r}+O(1). \tag{21}$$

Из известного разложения

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu}\frac{1}{\nu+1}=\ln\frac{1}{1-r}+O(1) \tag{22}$$

найдем

$$(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^l}\frac{1}{\nu+1}<C(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu}\frac{1}{\nu+1}=O\left((1-r)\ln\frac{1}{1-r}\right).$$

Из (21), (22) следует, что этот порядок остаточного члена является точным. Учитывая равенство (17), имеем

$$(1-r)^2\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^l}(\nu+1)^{\alpha}=C(1-r)^2\{(1-r)^{-\frac{\alpha+1}{l}}+(1-r)^{-\frac{\alpha}{l}}\}=O(1-r),$$

тем самым равенство (9) для $l=\alpha+1$ доказано.

Пусть $l=\alpha$, $0<\alpha<1$. Тогда из (13) следует, что

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha}(r,\alpha)&=\frac{2}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\alpha(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^{\alpha}}\frac{1}{\nu+1}\\&\quad+C(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^{\alpha}}\frac{1}{(\nu+1)^2}+C(1-r)^2\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^{\alpha}}\frac{1}{(\nu+1)^{2-\alpha}}\\&=\frac{2}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\alpha(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^{\alpha}}\frac{1}{\nu+1}+O(1-r)\\&=\frac{2}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\cdot(1-r)\ln\frac{1}{1-r}+O(1-r),\end{aligned}$$

как это можно получить из [13, с. 36] и равенства (14). Если $l<\alpha$, $0<\alpha<1$, то

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^l}(\nu+1)^{l-\alpha-1}<\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)^{1+(\alpha-l)}}=O(1),$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^l}(\nu+1)^{l-2-\alpha}<\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)^{2+(\alpha-l)}}=O(1),$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}r^{\nu^l}(\nu+1)^{2l-2-\alpha}<\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)^{1+(\alpha-l)+(1-l)}}=O(1),$$

т. е. равенство (9а) справедливо. Пусть теперь $\alpha = 1$, $1 < l \le 2$. Из равенств (8) (см. [12]) имеем

$$\Delta_l(r,1) = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^2 r^{\nu^l} I_3(\nu) = \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^2 r^{\nu^l}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k+1} + C\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^2 r^{\nu^l}\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta r^{\nu^l}\frac{1}{(\nu+1)} + C(1-r) = \frac{2l(1-r)}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l}(\nu+1)^{l-2}$$
$$+ C(1-r)^2\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l}(\nu+1)^{2l-3} + C(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l}(\nu+1)^{l-3}, \quad (23)$$

что при $l = 2$ с учетом равенств (18), (21) дает

$$\Delta_2(r,1) = \frac{4(1-r)}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} + C(1-r)^2\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^2}\frac{1}{\nu+1} + C(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^2}\frac{1}{\nu+1}$$
$$= \frac{2}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(1-r)\left\{\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} + C\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\} + C(1-r)\ln\frac{1}{1-r}.$$

Подставляя приведенные оценки в (13), получим равенство (9) для рассмотренного случая.

Пусть $1 < \alpha < 2$. Так как $\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^{-\alpha} - \nu^{-\alpha} = O(\nu^{-\alpha-1})$, оценку Л. И. Баусова (4) будем использовать в виде

$$\sup_{f\in Z_\alpha}\|f(x) - U(f,\lambda,r)\|_{C_{2\pi}} = \frac{2}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Delta\lambda_\nu(r)}{(\nu+1)^\alpha} + O\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{|\Delta\lambda_\nu(r)|}{(\nu+1)^{1+\alpha}}\right). \quad (24)$$

Полагая в (24) $\lambda_\nu(r) = r^{\nu^l}$ и применяя разложения (11), (12), получим аналог равенства (13):

$$\Delta_l(r,\alpha) = \frac{2}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2} l(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l}(\nu+1)^{l-\alpha-1}$$
$$+ C(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l}(\nu+1)^{l-\alpha-2} + C(1-r)^2\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l}(\nu+1)^{2l-2-\alpha}. \quad (25)$$

Оценим суммы в равенстве (25) для $1 < \alpha < 2$, $\alpha < l \le 2$. Положим $\gamma = 1+\alpha-l$. Тогда $0 < \gamma < 1$ и из равенства (18) имеем

$$(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l}\frac{1}{(\nu+1)^{1+\alpha-l}} = (1-r)\left\{\frac{1}{l}\Gamma\left(\frac{l-\alpha}{l}\right)(1-r)^{\frac{\alpha}{l}-1} + C(1-r)^{\frac{\alpha}{l}}\right\}$$
$$= \frac{1}{l}\Gamma\left(\frac{l-\alpha}{l}\right)(1-r)^{\frac{\alpha}{l}} + O((1-r)^{\frac{\alpha}{l}+1})(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l}(\nu+1)^{l-\alpha-2}C(1-r)$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu}\frac{1}{(\nu+1)^{(2-l)+\alpha}} = O(1-r).$$

Для оценки суммы

$$(1-r)^2\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l}(\nu+1)^{2l-2-\alpha}$$

будем различать два случая:

(а) $\beta = 2l - 2 - \alpha > 0$, т. е. $l > 1 + \frac{\alpha}{2}$, тогда из (17) следует, что

$$(1-r)^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} (\nu+1)^{2l-2-\alpha}$$
$$= C(1-r)^2 \{(1-r)^{-2+\frac{\alpha+1}{l}} + (1-r)^{-2+\frac{\alpha+2}{l}}\} = O((1-r)^{\frac{\alpha+1}{l}});$$

(б) $2l - 2 - \alpha \le 0$, т. е. $l \le 1 + \frac{\alpha}{2}$, в этом случае из (22) легко найдем

$$(1-r)^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} (\nu+1)^{2l-2-\alpha} \le C(1-r)^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} = O(1-r).$$

Тем самым справедливость оценки (9) доказана полностью. Пусть $1 < \alpha < 2$, $l = \alpha$, тогда аналогично случаю $0 < \alpha < 1$ из (25) получим первую асимптотическую оценку равенства (9а), при этом если $\alpha = l = 1$, то из нее вытекает асимптотическое равенство И. П. Натансона:

$$\Delta_1(r,1) = \frac{2}{\pi}(1-r)\ln\frac{1}{1-r} + O(1-r).$$

Если $l < \alpha$, $1 < \alpha < 2$, то согласно (25)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} (\nu+1)^{l-\alpha-1} < \sum_{\nu=0}^{\infty} r \frac{r^\nu}{(\nu+1)^{1+(\alpha-l)}} = O(1),$$
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} (\nu+1)^{l-2-\alpha} < \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^\nu}{(\nu+1)^{2+(\alpha-l)}} = O(1),$$
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu^l} (\nu+1)^{2l-2-\alpha} \le \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^\nu}{(\nu+1)^{(2-l)+(\alpha-l)}} = O\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Учитывая соответствующие множители в (25), получим оценку (9а).

По ходу доказательства теоремы мы привели результаты П. П. Коровкина ($l = 2$, $\alpha = 1$) и И. П. Натансона ($l = \alpha = 1$). Добавим к ним еще два. Из формулы Лагранжа

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

и доказанной теоремы при $l = 1$ вытекает (И. П. Натансон)

$$\Delta_1(r,\alpha) = \frac{(1-r)^\alpha}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}} + O(1-r).$$

Пусть $l = 1$, тогда $\Delta^{r^\nu} = r^\nu(1-r)$ и из разложения (7) при детальном рассмотрении свойств чисел Чезаро (20) можно получить асимптотические постоянные более высокого порядка для $\Delta_1(r,\alpha)$, как это проделано в работе [14] (см. также [12]). Из формул (9), (9а) и тождества Лежандра

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2a-\frac{1}{2}}}\Gamma(2a), \quad a > 0,$$

при $l = 2$, $0 < \alpha < 2$ следует результат Л. И. Баусова [8]

$$\Delta_2(r,\alpha) = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)(1-r)^{\frac{\alpha}{2}}\Delta_1(r,\alpha),$$

$$\Delta_1(r,\alpha) = \begin{cases} O((1-r)^{\frac{\alpha+1}{2}}), & 0 < \alpha < 1, \\ O((1-r)^{1-\varepsilon}), & \varepsilon > 0,\ 1 \le \alpha < 2, \end{cases}$$

с более точным порядком остаточного члена для $1 \le \alpha < 2$:

$$\Delta_1(r,\alpha) = O\left((1-r)\ln\frac{1}{1-r}\right).$$

В силу положительности обобщенного оператора Абеля — Пуассона утверждение теоремы справедливо и в метрике $L^1_{2\pi}$ (см. [4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коровкин П. П.* О наилучшем приближении функций класса Z_2 некоторыми линейными операторами // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 3. С. 513–515.
2. *Баскаков В. А.* О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля — Пуассона // Мат. заметки. 1975. Т. 17, № 2. С. 169–180.
3. *Штарк Э. Л.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip 1 от сингулярного интеграла Абеля — Пуассона // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 1. С. 21–28.
4. *Stark E. L.* Nikol′skij-Konstanten und Approximationsmasse im Hilbert — Raum. Aachen: RWTH, 1978.
5. *Баскаков В. А.* Линейные операторы в теории приближения функций: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Тбилиси, 1987. 28 с.
6. *Малей Л. В.* Точная оценка приближения квазигладких функций интегралами Пуассона // Докл. АН БССР. Сер. физ.-техн. 1961. № 3. С. 25–32.
7. *Бугов Я. С.* Неравенства типа неравенств Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка // Math. Cluj. 1963. V. 5, N 1. P. 5–25.
8. *Баусов Л. И.* О приближении функций класса Z_α положительными методами суммирования рядов Фурье // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 143–149.
9. *Никольский С. М.* Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1940. Т. 4, № 6. С. 501–508.
10. *Теляковский С. А.* О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Укр. мат. журн. 1969. Т. 21, № 3. С. 334–343.
11. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М: Наука, 1966.
12. *Фалалеев Л. П.* Суммирование рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами // Тр. Ин-та математики и механики АН КАЗ. ССР. 1971. Т. 2. С. 97–103.
13. *Федорюк Н. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. М: Наука, 1987.
14. *Čen Tjan-pin.* Approximation of a function by its Poisson integral // Fujian Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban. 1966. V. 11, N 23. P. 143–150.

Статья поступила 11 ноября 1998 г.

Фалалеев Леонид Петрович
Институт математики МОиН РК, Пушкина, 125, Алматы 480100, Казахстан
alex@math.kz