Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 519.14

ПСЕВДОДВОЙСТВЕННЫЕ РЕШЕТКИ И РАСШИРЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

А. А. Махнев

Аннотация: Подмножество вершин Δ обобщенного четырехугольника $\mathscr{S}$ порядка (s,t) называется *гиперовалом*, если каждая прямая пересекает Δ по 0 или 2 точкам. Гиперовал Δ называется *псевдодвойственной решеткой*, если $|\Delta| = 2t+4$. Заметим, что если $\mathscr{S}$ содержит псевдодвойственную решетку, то $s=2$, $t=4$ или $s \geq t$. Если при этом $\mathscr{S}$ является классическим обобщенным или двойственным к классическому четырехугольником, то либо $t=2$ и $\mathscr{S} = W(2)$ или $H_3(2^2)$, либо $t=3$ и $\mathscr{S} = Q_4(3)$, либо $t=4$ и $\mathscr{S} = Q_5(2)$ или $H_4(2^2)^*$. Доказано, что вполне регулярный локально $GQ(s,t)$ граф с $\mu = 2t+4$ либо имеет $s=t=2$ и является графом Тэйлора, либо имеет $s=2$, $t=4$ и является единственным сильно регулярным локально $GQ(2,4)$ графом с параметрами $(64,27,10,12)$. Библиогр. 9.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Пусть X — некоторое множество вершин графа Γ. В данной работе *подграф* X будет обозначать подграф, индуцированный Γ на X. Если a,b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначим расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф на множестве всех вершин графа Γ, которые находятся на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ будем называть *окрестностью* вершины a и обозначать через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначим подграф $\{a\} \cup [a]$.

Валентностью вершины назовем число вершин в ее окрестности. Граф Γ регулярен валентности k, если валентность любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным* с параметрами (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен валентности k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф* с параметрами (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a,b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным.* Полный многодольный граф с n долями порядка m назовем *$K_{n\times m}$-графом.* Подграф $[a] \cap [b]$ назовем (λ-) *μ-подграфом*, если вершины a,b (смежны) находятся на расстоянии 2.

Геометрией ранга 2 называется система инцидентности $\mathscr{S} = (P,B)$ с множеством точек P и семейством подмножеств B из P (называемых *блоками*). Две точки из P называются *коллинеарными*, если они лежат в общем блоке (заметим, что точка коллинеарна себе). Коллинеарность точек x и y (двойственно, факт пересечения блоков L и M) мы будем обозначать как $x \sim y$ (соответственно $L \sim M$). Для точки x положим $x^\perp = \{y \in P \mid y \sim x\}$. *Вычетом геометрии* $\mathbf{S}$ *в точке* x называется геометрия $\mathscr{S}_x = (P_x, B_x)$, где $P_x = x^\perp - \{x\}$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00462).

$B_x = \{L - \{x\} \mid x \in L, L \in B\}$. Геометрия называется *треугольной*, если любые ее три попарно коллинеарные точки лежат в общем блоке. Пусть $\mathscr{F}$ — класс геометрий ранга 2. Геометрия $\mathscr{S}$ называется $\mathscr{F}$-расширением, если вычет $\mathscr{S}$ в каждой точке принадлежит $\mathscr{F}$. Если в некоторой геометрии любые два различных блока пересекаются не более чем по одной точке, то множество блоков будем называть множеством прямых.

Геометрия, состоящая из точек и прямых, называется *обобщенным четырехугольником порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точек, каждая точка лежит на $t+1$ прямых и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется единственная прямая, проходящая через a и пересекающая L. Через $GQ(s,t)$ будем обозначать класс всех обобщенных четырехугольников порядка (s,t).

Пусть $\mathscr{S}$ является обобщенным четырехугольником порядка (s,t). *Точечным графом* $\mathscr{S}$ называется граф, вершинами которого являются точки $\mathscr{S}$, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф Γ для $\mathscr{S}$ сильно регулярен с параметрами $v=(s+1)(st+1)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=s-1$, $\mu=t+1$. Подграф Δ из Γ называется *гиперовалом*, если каждая прямая пересекает Δ по 0 или 2 точкам (при этом прямая называется *внешней* или *секущей* соответственно). Гиперовал из Γ — регулярный граф без треугольников валентности $t+1$ с четным числом вершин. Хорошо известно [1], что $\min\{2(t+1),(s+1)(t+2-s)\} \le |\Delta| \le 2(st+1)$. Если $|\Delta| = 2(t+1)$, то Δ является двойственной решеткой $K_{2\times(t+1)}$, если же $|\Delta| = 2(st+1)$, то Δ называется *двойным овоидом*. Следуя А. Пазини [2], гиперовал Δ назовем *псевдодвойственной решеткой*, если Δ получается удалением максимального паросочетания из $K_{2\times(t+2)}$. В этом случае Δ — двудольный граф с однозначно определяемыми долями порядка $t+2$, и для каждой точки $u \in \Delta$ найдется единственная вершина u^*, принадлежащая $\Delta_3(u)$, называемая антиподом u.

Изучение треугольных $GQ(s,t)$-расширений эквивалентно изучению локально $GQ(s,t)$ графов, т. е. графов, в которых окрестности вершин изоморфны точечным графам обобщенных четырехугольников порядка (s,t). Обзор результатов по расширениям обобщенных четырехугольников можно найти в [1]. Особенно просто устроены $GQ(1,t)$-расширения. Это геометрии вершин и 3-клик графов $K_{3\times(t+1)}$. Пусть $\mathscr{S}$ — треугольное $GQ(s,t)$-расширение с точечным графом Γ. Тогда любой μ-подграф $\Delta = [a] \cap [b]$ является гиперовалом в обобщенных четырехугольниках $[a]$ и $[b]$. Экстремальные случаи $|\Delta| = 2(t+1)$ и $|\Delta| = 2(st+1)$ рассматривались в работах [3, 4].

Пример 1. Пусть геометрия $\mathscr{G}$ — флаг-транзитивное $GQ(s,t)$-расширение с $s>2$. Тогда возможны следующие случаи:

(1) μ-подграфы являются двойственными решетками $K_{2\times(t+1)}$, и $\mathscr{G}$ либо локально $W(3)$ с группой автоморфизмов $U_5(2)\cdot 2$, либо локально $H_3(p^2)$, $p=2$ или 3, с группой автоморфизмов $3\cdot(O_6^-(3)\cdot 2)$ или $Suz\cdot 2$ соответственно;

(2) μ-подграфы являются двойными овоидами, и $\mathscr{G}$ либо локально $Q_5(3)$ с группой автоморфизмов $McL\cdot 2$, либо локально $H_3(2^2)$ с группой автоморфизмов $O_6^-(3)\cdot 2$.

В нашей работе исследуется один из двух ближайших к рассмотренным случаев, а именно $|\Delta| = 2t+4$ для любого μ-подграфа Δ.

Предложение. *Пусть обобщенный четырехугольник $\mathscr{S}$ порядка (s,t) содержит гиперовал Δ на $2t+4$ вершинах. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) Δ *является псевдодвойственной решеткой, и либо* $s = 2$, $t = 4$, *либо* $s \geq t$;

(2) *если* $\mathscr{S}$ *является классическим обобщенным или двойственным к классическому четырехугольником, то либо*

(a) $t = 2$, $\mathscr{S} = W(2)$ *или* $H_3(2^2)$, *где* $H_3(2^2)$ *содержит подчетырехугольник* $W(2)$ *и* $\Delta = W(2) - a^{\perp}$ *для подходящей вершины* $a \in W(2)$;

либо

(b) $t = 3$ *и* $\mathscr{S} = Q_4(3)$;

либо

(c) $t = 4$, $\mathscr{S} = Q_5(2)$ *или* $H_4(2^2)^*$, *где* $H_4(2^2)^*$ *содержит подчетырехугольник* $H_3(2^2)^* \simeq Q_5(2)$ *и* Δ — *дополнение подчетырехугольника порядка* $(2, 2)$ *в* $Q_5(2)$ *соответственно.*

Этот результат является расширением одного утверждения Пазини [2, предложение 4], в котором предполагалось, что обобщенный четырехугольник является классическим, а в заключение были пропущены случаи $t = 3$, $\mathscr{S} = Q_4(3)$ и $t = 4$, $\mathscr{S} = Q_5(2)$. Определение и свойства известных обобщенных четырехугольников можно найти в [5].

Теорема. *Пусть* Γ — *вполне регулярный локально* $GQ(s,t)$ *граф,* $t > 1$. *Если* μ-*подграфы из* Γ *являются псевдодвойственными решетками, то либо* $s = t = 2$ *и* Γ — *граф Тэйлора (2-антиподальное накрытие клики), либо* Γ — *единственный сильно регулярный локально* $GQ(2,4)$ *граф с параметрами* $(64, 27, 10, 12)$.

Приступим к доказательству предложения. Сначала приведем один вспомогательный результат.

Лемма 1. *Пусть* Γ — *регулярный граф без треугольников валентности* k *на* $2k + 2$ *вершинах. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Γ *получается удалением из* $K_{2\times(k+1)}$ *максимального паросочетания;*

(2) Γ *является* 2-*кокликовым расширением пятиугольника;*

(3) $k = 3$, *и* Γ — *однозначно определенный граф, в котором* $\Gamma_2(a)$ *является* 3-*путем для любой вершины* a.

Доказательство. Если $\Gamma_3(a)$ содержит некоторую вершину a^*, то $a^{\perp} \cup b^{\perp}$ содержит все вершины из Γ и выполняется утверждение (1).

Пусть Γ — граф диаметра 2. Предположим, что $[a] = [b]$ для различных вершин $a, b \in \Gamma$. Положим $\Sigma = \Gamma - (a^{\perp} \cup b^{\perp})$. Тогда $|\Sigma| = k$, причем $[c] \cap \Sigma$ является $(k-2)$-кокликой из Σ для $c \in [a]$. Поэтому $|\Sigma(x)| \leq 2$ для любой вершины $x \in \Sigma$. Значит, $[x]$ содержит не менее $k - 2$ вершин из $[a]$. С другой стороны, число ребер между $[a]$ и Σ равно $k(k-2)$, поэтому Σ — регулярный граф валентности 2. Если xy — ребро из Σ, то $[x] \cap [y]$ не пересекает $[a]$ (иначе получится треугольник), следовательно, $2(k-2) \leq k$. Отсюда $k = 4$, причем легко понять, что Γ представляет собой 2-кокликовое расширение пятиугольника.

Пусть теперь $|[a] \cap [b]| < k$ для несмежных вершин $a, b \in \Gamma$. Так как $[c] \cap \Gamma_2(a)$ является $(k-1)$-кокликой для любой вершины $c \in [a]$, то $|[x] \cap \Gamma_2(a)| \leq 2$ для любой вершины $x \in \Gamma_2(a)$. Пусть β_i — число вершин валентности i в $\Gamma_2(a)$. Тогда $\beta_1 + \beta_2 = k+1$, $(k-1)\beta_1 + (k-2)\beta_2 = k(k-1)$, поэтому $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = k-1$. Пусть xy — ребро из $\Gamma_2(a)$, где $|[x] \cap \Gamma_2(a)| = 1$. Тогда $[x] \cap [y]$ не пересекает $[a]$ и $2k - 3 \leq k$. Отсюда $k = 3$, и $\Gamma_2(a)$ является 3-путем для любой вершины a. Лемма доказана.

Пусть обобщенный четырехугольник $\mathscr{S}$ порядка (s,t) содержит гиперовал Δ порядка $2t + 4$. Через $K_i = K_i(\Delta)$ обозначим множество точек из $\mathscr{S}$ −

Δ, смежных точно с i точками из Δ, и положим $x_i = |K_i|$. По определению гиперовала $[a] \cap \Delta$ состоит из $i(a)$ изолированных ребер для любой вершины $a \in \mathscr{S} - \Delta$, поэтому $x_i = 0$ для нечетных i.

Лемма 2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) Δ *являются псевдодвойственной решеткой;*

(2) $s = 2,\ t = 4$ *или* $s \geq t$*;*

(3) $x_{2i} = 0$ *для* $i > 2$, $x_2 = (t+2)(t+1)(s-2)$, $x_4 = (t+2)(t+1)/2$, $x_0 = s^2t - t^2s - 2st - s + 3t^2/2 + 5t/2$.

Доказательство. Допустим, что Δ является графом из пунктов (2) или (3) заключения леммы 1 с $k = t+1$. Пусть ab — ребро из Δ, L — прямая, проходящая через ab. В случае (2) $\Delta - (a^{\perp} \cup b^{\perp})$ является 2-кокликой. Противоречие с тем, что для любой точки x из $L - (K_0 \cup \{a, b\})$ $[x] \cap \Delta$ состоит из изолированных ребер. В случае (3) пусть $\Delta_2(a)$ является 3-путем $xyzu$, $\{b\} = [a] \cap [x] \cap [u]$ и $\{b, c\} = [a] \cap [x]$. Тогда $[b] \cap [c] = \{a, x, d\}$, где d — точка из $\Gamma - \Delta$, смежная с ребрами cz, bu. Противоречие с тем, что zu — ребро в Δ. Утверждение (1) доказано.

Напомним, что $(s+1)(t+2-s) \leq 2t+4$, поэтому $t(s-1) \leq s^2 - s + 2$, и $t \leq s + 2/(s-1)$. Если $s < t$, то либо $s = 2,\ t = 4$, либо $s = 3,\ t = 4$. Но в последнем случае не выполнено условие целочисленности: $s + t$ делит $st(s+1)(t+1)$. Утверждение (2) доказано.

Подсчитав число точек в $\Gamma - \Delta$ и число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$, получим уравнения $x_0 + x_2 + x_4 = s^2t + st - 2t + s - 3$, $x_2 + 2x_4 = (t+2)(s-1)(t+1)$. С другой стороны, если u, w — несмежные вершины из Δ, то $[u] \cap [w]$ содержит t точек из Δ и единственную точку a из $\Gamma - \Delta$. Так как $[a] \cap \Delta$ состоит из изолированных ребер, то $[a] \cap \Delta = \{u, w^*\} \cup \{u^*, w\}$, где x^* — антипод x в Δ. Значит, любым двум точкам из $\{u^*\} \cup \Delta(u)$ отвечает единственная точка из K_4, и $x_4 = (t+2)(t+1)/2$. Отсюда $x_2 = (t+2)(t+1)(s-2)$ и $x_0 = s^2t - st^2 - 2st - s + (3t^2 + 5t)/2$.

Лемма 3. *Если* $\mathscr{S}$ *— классический или двойственный к классическому четырехугольник, то либо* $t = 2$ *и* $\mathscr{S} = W(2)$ *или* $H_3(2^2)$*, либо* $t = 3$ *и* $\mathscr{S} = Q_4(3)$*, либо* $t = 4$ *и* $\mathscr{S} = Q_5(2)$ *или* $H_4(2^2)^*$.

Доказательство. Заметим сначала, что в обобщенном четырехугольнике $W(2)$ подграф $W(2) - a^{\perp}$, $a \in W(2)$, является гиперовалом порядка 8. Далее, $Q_4(3)$ содержит гиперовал порядка 10 (см., например, [6]). Наконец, дополнение подчетырехугольника порядка $(2, 2)$ в $Q_5(2)$ является гиперовалом порядка 12.

Теперь по лемме 2 можно считать, что $s \geq t \geq 3$ и $\mathscr{S}$ — это $W(t)$, $Q_4(t)$, $H_3(t^2)$ или четырехугольник, двойственный к $H_4(q^2)$, где $s = q^3,\ t = q^2$. Пусть u, w — несмежные вершины из Δ. Если $\mathscr{S} = W(t)$, то пара (u, w) регулярна, и найдется третья точка a такая, что $[u] \cap [w] \subset [a]$. Противоречие с леммой 2. Если $\mathscr{S} = Q_4(t)$, то пара (u, w) антирегулярна, т. е. для любой точки $a \in Q_4(t) - (u^{\perp} \cup w^{\perp})$ необходимо $|[a] \cap [u] \cap [w]|$ равно 0 или 2. Однако если $a \in \Delta - (a^{\perp} \cup b^{\perp})$, то $[a] \cap \Delta$ содержит $t - 1$ точек из $[u] \cap [w]$. Значит, $t - 1 \leq 2$.

Если $\mathscr{S} = H_3(t^2)$, то каждая точка из $\mathscr{S}$ регулярна, и мы получим противоречие, как и в случае $W(t)$.

Пусть теперь $\mathscr{S}$ — четырехугольник, двойственный к $H_4(q^2)$. Напомним, что $\mathscr{S}^* = H_4(q^2)$ естественно вложен в $PG(4, q^2)$, и его пересечение с некасательной гиперплоскостью является подчетырехугольником $\mathscr{S}_0^* = H_3(q^2)$. При этом четырехугольник $\mathscr{S}_0$, двойственный к $\mathscr{S}_0^*$, — это подчетырехугольник из $\mathscr{S}$, содержащий μ-подграфы любых пар своих несмежных вершин. Если мы выберем гиперплоскость, содержащую прямые из $\mathscr{S}^*$, отвечающие u и w, то $\mathscr{S}_0$ содержит Δ. Значит, $\mathscr{S}_0^* = H_3(2^2)^*$ и $\mathscr{S} = H_4(2^2)^*$. Лемма, а вместе с ней и предложение доказаны.

Пусть $\mathscr{G}$ — треугольное $GQ(s,t)$-расширение с точечным графом Γ и $t > 1$. Для вершин x, y, находящихся на расстоянии 2 в Γ, через $\Delta(x,y)$ обозначим подграф $[x] \cap [y]$. Предположим, что μ-подграф $\Delta = [a] \cap [b]$ из Γ является псевдодвойственной решеткой с долями $\{u_1, u_2, \dots, u_{t+2}\}$ и $\{w_1, w_2, \dots, w_{t+2}\}$, где w_i — антипод u_i. Для точки y из $\{a, b\}$ через y_{ij} обозначим точку из $[y] \cap K_4(\Delta)$, смежную с $\{u_i, u_j, w_i, w_j\}$. Положим $K_i = K_i(\Delta) \cap [b]$, $\Delta_{ij} = [b] \cap [a_{ij}]$.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если подграф $[u_1] \cap [w_1]$ — псевдодвойственная решетка, то каждая вершина a_{1i} не смежна с единственной точкой из $\{b_{12}, b_{13}, \dots, b_{1,t+2}\}$;*

(2) *если подграф Δ_{12} является псевдодвойственной решеткой, то точка b_{1i} смежна с b_{2j} для $i, j \geq 3$, $i \neq j$; далее, $\Delta - \Delta_{12}$ содержится в $K_4(\Delta_{12})$ и $t \neq 3$.*

Доказательство. Допустим, что подграф $[u_1] \cap [w_1]$ — псевдодвойственная решетка. Тогда он содержит доли $\{a, b_{12}, \dots, b_{1,t+2}\}$ и $\{b, a_{12}, \dots, b_{1,t+2}\}$. Поэтому выполняется утверждение (1).

Пусть подграф Δ_{12} является псевдодвойственной решеткой. Так как $[u_1] \cap [u_2]$ содержит не более одной вершины из Δ_{12}, то u_1 — антипод u_2 в Δ_{12}, и подграф Δ_{12} содержит доли $\{u_1, w_1, b_{23}, \dots, b_{2,t+2}\}$ и $\{u_2, w_2, b_{13}, \dots, b_{1,t+2}\}$, поэтому $b_{1i} \sim b_{2j}$ для $i, j > 2$, $i \neq j$. Далее, каждая вершина из $\Delta - \Delta_{12}$ смежна с двумя вершинами из каждой доли Δ_{12}, поэтому $\Delta - \Delta_{12}$ содержится в $K_4(\Delta_{12})$. Заметим, что в случае $t = 3$ каждая прямая содержит не более одной точки из K_4, поэтому $t \neq 3$.

Лемма 5. *Если подграфы Δ_{1i} и Δ_{1j} являются псевдодвойственными решетками для некоторых $i \neq j$, то $t \leq 4$.*

Доказательство. Пусть для определенности Δ_{12} и Δ_{13} — псевдодвойственные решетки. По лемме 4 $[b_{14}] \cap [b_{15}]$ содержит t точек $u_1, w_1, b_{23}, b_{26}, \dots, b_{2,t+2}$ из Δ_{12}. Аналогично $[b_{14}] \cap [b_{15}]$ содержит точки $b_{36}, \dots, b_{3,t+2}$ из Δ_{13}, поэтому $|\{6, \dots, t+2\}| \leq 1$ и $t \leq 4$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Из условий теоремы и лемм 4, 5 следует, что t равно 2 или 4, причем подграфы $\{a_{ij}\}$ и $\{b_{ij}\}$ изоморфны $\overline{T(t+2)}$. В случае $t = 2$ получим $s = 2$ или 4. Если $s = 2$, то Γ является графом Тэйлора, а если $s = 4$, то по теореме из [7] графа Γ не существует. Пусть в дальнейшем $t = 4$, $K_i = K_i(\Delta) \cap [b]$, $x_i = |K_i|$. Тогда по лемме 2 $x_0 = 4s^2 - 25s + 34$, $x_2 = 30(s-2)$, $x_4 = 15$. Кроме того, подграфы $\{a_{ij}\}$ и $\{b_{ij}\}$ суть точечные графы $GQ(2,2)$.

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *подграф $\Sigma(b) = \{b_{ij}\} \cup \Delta$ является точечным графом обобщенного четырехугольника порядка $(2,4)$;*

(2) *$\Sigma = \cup\{K_4(\Delta_{ij}) \cap [a_{ij}] \mid i, j = 1, \dots, 6\} \cup \{b\} \cup \Sigma(b)$ — сильно регулярный локально $GQ(2,4)$ граф с параметрами $(64, 27, 10, 12)$;*

(3) *любая пара $\{x, y\}$ вершин, находящихся на расстоянии 2 в Γ, содержится в единственном подграфе $\Sigma(x,y)$ из Γ, который представляет собой сильно регулярный локально $GQ(2,4)$ граф с параметрами $(64, 27, 10, 12)$.*

Доказательство. Ясно, что каждая точка из $\Sigma(b)$ лежит точно на пяти прямых, а каждая прямая (максимальная клика) из $\Sigma(b)$ содержит точно три точки. Так как $|\Sigma(b)| = 27$, то $\Sigma(b)$ — точечный граф обобщенного четырехугольника порядка $(2,4)$. Утверждение (1) доказано.

Положим $\Lambda = \Sigma - b^{\perp}$. Тогда $\Lambda(a)$ является обобщенным четырехугольником порядка $(2,2)$. Отождествим $\Lambda(a)$ с котреугольным графом на множестве $\{1,\dots,6\}$. Без ограничения общности псевдодвойственная решетка $K_4(\Delta) \cap ([a]-[a_{12}])$ совпадает с подграфом $\{13,34,35,36;23,24,25,26\}$. Тогда каждая точка c из $K_4(\Delta) \cap ([a_{12}]-[a])$ смежна с 3-кокликой в $\{34,56;35,46;36,45\}$. Допустим, что указанная 3-коклика не входит в $\overline{T(3)}$, например, $[c]$ содержит $34,35,36$. Тогда $[c]$ содержит 3-коклику $\{34,35,36\}$ из μ-подграфа $[a_{12}] \cap [3]$; противоречие. Напомним, что любой гиперовал из обобщенного четырехугольника порядка $(2,2)$ — это двойственная решетка на 6 вершинах, куб или граф Петерсена. Легко понять, что подграф $\{a_{12},34,45,46\}$ не вкладывается в куб или в подграф Петерсена. Поэтому $|[c] \cap \Lambda(a)| = 6$ и $|\Lambda - a^{\perp}| = 20$. Таким образом, Σ является сильно регулярным локально $GQ(2,4)$ графом с параметрами $(64,27,10,12)$. Утверждение 2 доказано.

Заметим, что $[x]\cap[y]$ содержится в Σ для любых несмежных точек $x,y \in \Sigma$. Поэтому подграф, построенный по паре $\{x,y\}$, аналогично Σ, построенному по паре $\{a,b\}$, совпадает с Σ. Отсюда следует утверждение (3).

Лемма 7. *Параметр s равен 2 или 8, причем в случае $s=2$ граф Γ совпадает с Σ.*

Доказательство. Покажем сначала, что для каждой точки d из $\Gamma - \Sigma$, смежной с точками из Σ, $|[d] \cap \Sigma|$ равно 1 или 4. По лемме 6 подграф $[d] \cap \Sigma$ является кликой. Допустим, что uw — ребро из $[d]\cap\Sigma$. Тогда $[u]\cap[w]$ состоит из 5 изолированных s-клик, каждая из которых пересекает Σ по ребру. Поэтому d принадлежит одной из этих клик и $|[d] \cap \Sigma(b)| = 4$.

По условию целочисленности для $GQ(s,4)$ имеем $s = 1,2,4,8,11,12$ или 16. Если $s=2$, то по лемме 6 граф Γ совпадает с Σ. Допустим, что $s>2$. Так как $[b]$ содержит подчетырехугольник $\Sigma(b)$ порядка $(2,4)$, то по [5, теорема 2.2.1] $s \geq 8$. Из прямоугольного соотношения $k(k-\lambda-1) = \mu|\Gamma_2(a)|$ следует, что s равно 8, 11 или 12.

Покажем, что $s \neq 11$. Пусть uw — ребро из Σ. Тогда $[u] \cap [w]$ состоит из 5 изолированных s-клик $L_1,\dots,L_5$. Пусть $L_i \cap \Sigma = \{c_i, d_i\}$. Если $e_2 \in L_2 - \Sigma$, то по лемме 6 пара $\{d_1,e_2\}$ лежит в подграфе $\Sigma(d_1,e_2)$, который является сильно регулярным локально $GQ(2,4)$ графом с параметрами $(64,27,10,12)$. Как показано в первом абзаце доказательства, $L_2 \cap \Sigma(d_1,e_2) = \{e_2,f_2\}$ для некоторой точки $f_2 \in L_2 - \Sigma$. Таким образом, $L_2 - \Sigma$ разбивается на пары вершин, попадающие вместе с d_2 в общий Σ-подграф. Поэтому s четно.

Если $x \in \Gamma_2(a)$, то $\Sigma(a,x)$ содержит 36 вершин из $\Gamma_2(a)$, причем разные подграфы $\Sigma(a,x)$ и $\Sigma(a,y)$ не содержат общих вершин из $\Gamma_2(a)$. Поэтому 36 делит $|\Gamma_2(a)|$. Однако в случае $s=12$ имеем $|\Gamma_2(a)| = 13\cdot 49\cdot 48$; противоречие.

Лемма 8. *Если $s=8$, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *обобщенный четырехугольник $[b]$ содержит*

(i) *30 секущих для Δ, на каждой из которых находятся ребро из Δ, точка из K_4 и 6 точек из K_2;*

(ii) *15 внешних прямых для Δ, на каждой из которых находятся 3 точки из K_4 и 6 точек из K_0;*

(iii) *120 внешних прямых для Δ, на каждой из которых находятся 6 точек из K_2 и 3 точки из K_0;*

(2) *верны равенства* $x_0 = 90,\ x_2 = 180,\ x_4 = 15$, *причем любая точка из* K_0 *лежит на одной прямой типа* (ii) *и на четырех прямых типа* (iii);

(3) *диаметр графа* Γ *больше* 2.

Доказательство. Если $s = 8$, то число прямых в $[b]$ равно 165. Так как валентность Δ равна 12, то $[b]$ содержит 30 секущих и строение секущей определено в лемме 2.

Если внешняя прямая L содержит точку из K_4, то по лемме 6 L содержит 3 точки из K_4 и 6 точек из K_0. Отсюда число прямых типа (ii) равно 15.

Если внешняя прямая M не содержит точек из K_4, то M содержит 6 точек из K_2 и 3 точки из K_0, причем число прямых типа (iii) равно 120. Утверждение (1) доказано.

Равенства для x_i получаются подстановкой значения $s = 8$. По теореме 2.2.1 из [5] каждая точка из $K_0 - \Sigma$ смежна с тремя точками из $[b] \cap \Sigma$. Это влечет утверждение (2).

Если диаметр Γ равен 2, то граф Γ сильно регулярен и число $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$ является квадратом. Для локально $GQ(8, 4)$ графа с $\mu = 12$ это число равно $28^2 + 4 \cdot 295$. Отсюда $4 \cdot 7^2 + 295$ должно быть квадратом. Противоречие с тем, что это число сравнимо с 3 по модулю 4.

Лемма 9. *Каждое ребро из* Γ *содержится в* 16 *подграфах, изоморфных* Σ.

Доказательство. Докажем утверждение леммы для ребра ac. Напомним, что $|[c] \cap \Gamma_2(a)| = 256$, причем $|[c] \cap \Sigma_2(a)| = 16$. Так как каждая точка y из $\Gamma_2(a)$ содержится в единственном подграфе вида $\Sigma(a, y)$, то ребро ac содержится в 16 подграфах, изоморфных Σ. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Ввиду лемм 7, 8 можно считать, что $s = 8$ и диаметр Γ больше 2. Зафиксируем геодезический 3-путь $acbd$ в Γ и положим $\Sigma = \Sigma(a, b)$, $\Sigma' = \Sigma(c, d)$. Пусть $\Lambda = [b] \cap [c]$. Тогда Λ состоит из пяти изолированных 8-клик $L_1, \dots, L_5$. Пусть L_i содержит точки u_i, e_i из $[a]$, $[d]$ соответственно. Тогда $u_1 \in \Sigma$, поэтому найдутся такие различные $i, j \in \{2, \dots, 5\}$, что $\Sigma_i = \Sigma_j$. В этом случае $\Sigma' \cap \Sigma_j$ содержит 2-коклику $\{e_i . e_j\}$, поэтому $\Sigma' = \Sigma_j$. Аналогично получим, что $u_i \in \Sigma'$ для всех $i \in \{1, \dots, 5\}$. Противоречие с тем, что $\Sigma \cap \Sigma'$ является кокликой. Теорема доказана.

В связи с данной теоремой и предложением вызывает интерес следующая

Проблема. *Описать класс геометрий* $\mathscr{F}$, *состоящий из треугольных* $GQ(q + 1, q - 1)$-*расширений с точечным графом* Γ, *содержащим* μ-*подграф, являющийся псевдодвойственной решеткой.*

Накрытия следующих геометрий удовлетворяют условиям, перечисленным в этой проблеме.

Пример 2. Геометрии $\mathscr{Y}_q(K)$ суть треугольные расширения $GQ(q{+}1, q{-}1)$, имеющие диаметр 3 и $q^3(q + 3)$ точек, где K является $(q + 1)$-дугой в $PG(2, q)$, $q = 2^h$ (см. [8]).

Можно считать, что $K = \{(0, 0, 0, 1)\} \cup \{(1, a, a^{2^m}, a^{2^m+1}) \mid a \in GF(q)\}$, где $1 \le m \le h - 1$ и m взаимно просто с h. При этом K будет скрученной кубикой, только если $m = 1$ или $h - 1$. Конструкция впервые была предложена С. Ешиарой в других терминах. Геометрии Ешиары отвечают случаю, когда K — скрученная кубика.

А. Дель Фра и А. Пазини сформулировали вопрос о существовании $q/2$-накрытия геометрии $\mathscr{Y}_q(K)$. В таком накрытии мощности μ-подграфов принимают точно два значения: $2q{+}2$ и q^2. В случае $q = 4$ такое накрытие существует

[9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cameron P., Hughes D. R., Pasini A.* Extended generalized quadrangles // Geom. Dedicata. 1990. V. 35. P. 193–228.
2. *Pasini A.* Remarks on double ovoids in finite classical generalized quadrangles, with an application to extended generalized quadrangles // Quart J. Pure Appl. Math. 1992. V. 66. P. 41–68.
3. *Fisher P., Hobart S.* Triangular extended generalized quadrangles // Geom. Dedicata. 1991. V. 37. P. 339–344.
4. *Del Fra A., Ghinelli D., Meixner T., Pasini A.* Flag-transitive extensions of C_n geometries // Geom. Dedicata. 1992. V. 37. P. 253–273.
5. *Pain S., Thas J. A.* Finite generalized quadrangles. Boston: Pitman, 1984.
6. *Pasechnik D. V.* The triangular extensions of a generalized quadrangle of order (3,3) // Bull. Belg. Math. Soc. 1995. V. 2. P. 509–518.
7. *Махнев А. А. Падучих Д. В.* Вполне регулярные локально GQ(4,2) графы // Междунар. алгебр. конф. памяти А. Г. Куроша: Тез. докл. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. С. 188–189.
8. *Thas J. A.* Some new classes of extended generalized quadrangles of order $(q+1, q-1)$ // Bull. Belg. Math. Soc. 1998. V. 5. P. 461–467.
9. *Yoshiara S.* On some flag-transitive non-classical $c.C_2$-geometries // European J. Combin. 1993. V. 14. P. 59–77.

Статья поступила 14 апреля 1999 г.

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620219
makhnev@imm.uran.ru