Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 512.8

О РАЗРЕШИМОСТИ КОЛЕЦ ЛИ С АВТОМОРФИЗМОМ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Е. И. Хухро

Аннотация: Доказывается, что существует такая функция $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, что для любого $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированного кольца Ли L его $f(m,n)$-й коммутант $L^{(f(m,n))}$ содержится в подалгебре, порожденной множеством $[L,\underbrace{L_0,\dots,L_0}_{m}]$, где L_0 — нулевая компонента градуировки. Следствие: если алгебра Ли L допускает полупростой автоморфизм φ конечного порядка n, то для любого m ее $f(m,n)$-й коммутант $L^{(f(m,n))}$ содержится в подалгебре, порожденной множеством $[L,\underbrace{C_L(\varphi),\dots,C_L(\varphi)}_{m}]$. Ранее были известны (как для градуированных колец, так и для колец с автоморфизмами) более слабые результаты (Д. Винтер, Е. И. Хухро — П. В. Шумяцкий, Дж. Берген — П. Гржещук) со включениями в идеал, порожденный такого сорта множеством. Все эти результаты восходят к теореме В. А. Крекнина о разрешимости кольца Ли с регулярным автоморфизмом конечного порядка ($C_L(\varphi)=0$ или $L_0=0$). Библиогр. 6.

Памяти Алексея Ивановича Кострикина

По теореме В. А. Крекнина [1] если кольцо Ли допускает регулярный (т. е. без нетривиальных неподвижных точек) автоморфизм конечного порядка n, то оно разрешимо ступени $\le 2^n-2$. Д. Винтер [2] обобщил теорему Крекнина, доказав, в частности, разрешимость конечномерной алгебры Ли L, допускающей такой полупростой автоморфизм φ, что $[L,\underbrace{C_L(\varphi),\dots,C_L(\varphi)}_{m}]=0$ для какого-то числа m, где $C_L(\varphi)$ — подалгебра неподвижных точек. Независимо и одновременно в работах Е. И. Хухро и П. В. Шумяцкого [3] и Дж. Бергена и П. Гржещука [4] доказательство Винтера было эффективизировано: была найдена функция, ограничивающая ступень разрешимости L в зависимости от (конечного) порядка φ и числа m. Тем самым был получен положительный ответ на вопрос Винтера из [2], а его результат был распространен на бесконечномерные алгебры с автоморфизмом конечного порядка.

Эта эффективизация может быть сформулирована и так: существует такая функция $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, что если алгебра Ли L допускает полупростой автоморфизм φ конечного порядка n, то для любого m ее $g(m,n)$-й коммутант $L^{(g(m,n))}$ содержится в идеале, порожденном множеством $[L,\underbrace{C_L(\varphi),\dots,C_L(\varphi)}_{m}]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00576) и Министерства образования Российской федерации в области фундаментального естествознания (грант Е00–1.0–77).

В настоящей работе доказывается, что существует функция $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такая, что если алгебра Ли L допускает полупростой автоморфизм φ конечного порядка n, то для любого m ее $f(m,n)$-й коммутант $L^{(f(m,n))}$ содержится в *подалгебре*, порожденной множеством $[L,\underbrace{C_L(\varphi),\dots,C_L(\varphi)}_{m}]$.

Все эти результаты, по существу, имеют комбинаторный характер и доказываются в терминах $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированных колец Ли. В частности, в настоящей работе результат об автоморфизмах получается как следствие результата о градуированных кольцах Ли: существует такая функция $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, что для любого $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированного кольца Ли

$$L=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}L_k,\quad [L_i,L_j]\subseteq L_{i+j(\operatorname{mod}n)},$$

его $f(m,n)$-й коммутант $L^{(f(m,n))}$ содержится в *подалгебре*, порожденной множеством $[L,\underbrace{L_0,\dots,L_0}_{m}]$.

Можно надеяться, что полученный результат позволит доказывать разрешимость колец Ли в каких-то новых ситуациях. Конечно, если удается (как, например, в [3, 5, 6]) доказать, что $[L,\underbrace{C_L(\varphi),\dots,C_L(\varphi)}_{m}]=0$ для полупростого автоморфизма φ конечного порядка, то тривиальны и подалгебра, и идеал, порожденные этим множеством. В более общей ситуации, однако, может оказаться проще доказывать разрешимость подалгебры, порожденной множеством $[L,\underbrace{C_L(\varphi),\dots,C_L(\varphi)}_{m}]$, чем идеала, чтобы получить разрешимость кольца L.

Для подмножеств M, N кольца Ли через $[M,N]$ мы обозначаем аддитивную подгруппу, порожденную всеми произведениями $[m,n]$ при $m\in M$, $n\in N$. Если M и N — идеалы, то $[M,N]$ — тоже идеал; если, скажем, H — (под)кольцо Ли, то $[H,H]$ — его идеал и, в частности, подкольцо. *Простым коммутатором* $[a_1,a_2,a_3,\dots,a_s]$ называется коммутатор (произведение в кольце Ли) вида $[\dots[[a_1,a_2],a_3],\dots,a_s]$. Если кольцо Ли порождается множеством M, то его аддитивная группа порождается всевозможными простыми коммутаторами от элементов из M. Аналогичным образом для подмножеств обозначаем

$$[A_1,A_2,A_3,\dots,A_s]=[...[[A_1,A_2],A_3],\dots,A_s].$$

Члены ряда коммутантов кольца Ли L определяются по индукции:

$$L^{(0)}=L,\quad L^{(i+1)}=[L^{(i)},L^{(i)}].$$

Если кольцо Ли L является $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированным, то коммутанты $L^{(k)}$ также $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированы относительно индуцированной градуировки $L_i^{(k)}=L^{(k)}\cap L_i$, причем

$$L_i^{(k+1)}=\sum_{u+v\equiv i(\operatorname{mod}n)}\bigl[L_u^{(k)},L_v^{(k)}\bigr].$$

Мы будем также использовать следующее сокращенное обозначение:

$$[\alpha,\beta^r]=[\alpha\underbrace{\beta,\dots,\beta}_{r}],$$

где α и β — элементы или подмножества кольца Ли. В этих обозначениях отметим следствие тождества Якоби: $[a,[b,c^r]]=\sum_{j=0}^{r}(-1)^jC_r^j[[[a,c^j],b],c^{r-j}]$ для любых элементов a,b,c кольца Ли.

Теорема 1. *Существует такая функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для любого $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированного кольца Ли L его $f(m,n)$-й коммутант $L^{(f(m,n))}$ содержится в подалгебре, порожденной множеством $[L, \underbrace{L_0, \dots, L_0}_{m}]$, где L_0 — нулевая компонента градуировки.*

Доказательство. Докажем, что для некоторых функций $h_i : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, при $k = 1, 2, \dots, n$ выполняются следующие два включения:

$$L^{(h_1(m,k))} \cap L_k \subseteq \big\langle [L_1, L_0^{m2^{n-k}}], [L_2, L_0^{m2^{n-k}}], \dots, [L_{k-1}, L_0^{m2^{n-k}}], L_{k+1}, L_{k+2}, \dots, L_{n-1} \big\rangle + [L_k, L_0^{m2^{n-k}}], \quad (1)$$

$$L^{(h_2(m,k))} \subseteq \big\langle [L_1, L_0^{m2^{n-k}}], [L_2, L_0^{m2^{n-k}}], \dots, [L_k, L_0^{m2^{n-k}}], L_{k+1}, L_{k+2}, \dots, L_{n-1}, L_n \big\rangle, \quad (2)$$

где в правых частях угловые скобки означают подкольца Ли, порожденные соответствующими множествами. В правой части (2) мы специально использовали обозначение L_n вместо L_0, чтобы случай $k = n$ укладывался в общую схему. (Можно было бы всюду писать L_n вместо L_0, однако в других местах мы предпочитаем использовать L_0, так как это делает совершенно ясным, например, что $[L_j, L_0^r] \subseteq L_j$ для любых j, r.)

Будем доказывать (1) и (2) одновременно индукцией по $k = 1, 2, \dots, n$, по ходу дела рекурсивно определяя требуемые функции $h_i(m,k)$.

На каждом шаге для данного k мы сначала докажем (1), при $k \geq 2$ опираясь на предположение индукции для (2), а при $k = 1$ опираясь на равенство $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$, выполняющееся по условию. Затем утверждение (2) выводится из уже доказанного утверждения (1) для k и из предположения индукции для (2) или того же равенства $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$ при $k = 1$. Таким образом, удобно распространить утверждение (2) и на случай $k = 0$ и считать равенство $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$ базой индукции для утверждения (2) со значением $h_2(m,0) = 0$. База же для (1) нам не потребуется.

Мы используем одну элементарную теоретико-числовую лемму В. А. Кренина [1].

Лемма 1. *Если $i + j \equiv k \pmod{n}$ при $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq n-1$, то либо оба числа i и j больше k, либо оба они меньше или равны k.*

Итак, докажем (1). Для этого используем индукцию по r, чтобы доказать включение

$$L^{(r(h_2(m,k-1)+1))} \cap L_k \subseteq \big\langle [L_1, L_0^{m2^{n-k}}], [L_2, L_0^{m2^{n-k}}], \dots, [L_{k-1}, L_0^{m2^{n-k}}], L_{k+1}, L_{k+2}, \dots, L_{n-1} \big\rangle + [L_k, L_0^{r}]. \quad (3)$$

Рассмотрим случай $r = 1$. Если $a \in L^{(h_2(m,k-1)+1)} \cap L_k$, то элемент a равен линейной комбинации произведений вида $[b,c]$, где $b, c \in L^{(h_2(m,k-1))}$. По предположению индукции выполняется включение (2) для $k-1$; значит, элементы b и c, а потому и $[b,c]$ лежат в подкольце

$$\big\langle [L_1, L_0^{m2^{n-k+1}}], [L_2, L_0^{m2^{n-k+1}}], \dots, [L_{k-1}, L_0^{m2^{n-k+1}}], L_k, L_{k+1}, \dots, L_{n-1}, L_n \big\rangle.$$

Тогда элемент $a = [b, c]$, лежащий в L_k, может быть выражен в виде линейной комбинации простых коммутаторов из L_k от элементов из тех подмножеств, которые здесь указаны внутри угловых скобок. Каждый из этих простых коммутаторов имеет вид $[u, v]$, где u — его начальный отрезок, а v — последний элемент, причем v лежит в одном из указанных подмножеств. Если $v \in L_t$ при $t \in \{k, k+1, \dots, n-1, n\}$, то $u \in L_s$ при $s + t \equiv k (\operatorname{mod} n)$, где $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Если $k < t < n$, то $k < s < n$ по лемме 1 и тогда $[u, v]$ содержится в $\langle L_{k+1}, L_{k+2}, \dots, L_{n-1}\rangle$, а значит, и в правой части (3). Если $t = k$ или $t = n$, то соответственно $s = 0$ или $s = k$; в обоих случаях тогда $[u, v] \in [L_k, L_n] = [L_k, L_0]$, т. е. $[u, v]$ лежит во втором слагаемом правой части (3) в рассматриваемом случае $r = 1$.

Пусть теперь $v \in \bigl[L_t, L_0^{m2^{n-k+1}}\bigr]$ при $t \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Так как

$$\bigl[L_t, L_0^{m2^{n-k+1}}\bigr] \subseteq L_t,$$

получаем, что $u \in L_s$ при $s + t \equiv k (\operatorname{mod} n)$, где $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. По лемме 1 имеем $1 \le s \le k-1$. Элемент v является линейной комбинацией элементов вида $\bigl[w, l_0^{m2^{n-k+1}}\bigr]$, где $w \in L_t$, $l_0 \in L_0$. Каждый элемент

$$\begin{aligned}\bigl[u, \bigl[w, l_0^{m2^{n-k+1}}\bigr]\bigr] &= \bigl[u, \bigl[\bigl[w, l_0^{m2^{n-k}}\bigr], l_0^{m2^{n-k}}\bigr]\bigr] \\ &= \sum_{j=0}^{m2^{n-k}} (-1)^j C^j_{m2^{n-k}} \bigl[\bigl[\bigl[u, l_0^j\bigr], \bigl[w, l_0^{m2^{n-k}}\bigr]\bigr], l_0^{m2^{n-k}-j}\bigr]\end{aligned}$$

является суммой коммутатора $\bigl[\bigl[u, l_0^{m2^{n-k}}\bigr], \bigl[w, l_0^{m2^{n-k}}\bigr]\bigr]$ и линейной комбинации коммутаторов $\bigl[\bigl[\bigl[u, l_0^{m2^{n-k}-i}\bigr], \bigl[w, l_0^{m2^{n-k}}\bigr]\bigr], l_0^i\bigr]$ при $i \ge 1$. Коммутатор

$$\bigl[\bigl[u, l_0^{m2^{n-k}}\bigr], \bigl[w, l_0^{m2^{n-k}}\bigr]\bigr]$$

лежит в первом слагаемом правой части (3), так как $\bigl[u, l_0^{m2^{n-k}}\bigr] \in L_s$ и $\bigl[w, l_0^{m2^{n-k}}\bigr] \in L_t$ при $1 \le s \le k-1$, $1 \le t \le k-1$. Все коммутаторы

$$\bigl[\bigl[\bigl[u, l_0^{m2^{n-k}-i}\bigr], \bigl[w, l_0^{m2^{n-k}}\bigr]\bigr], l_0^i\bigr]$$

при $i \ge 1$ лежат в $[L_k, L_0]$, что является вторым слагаемым в (3) при $r = 1$.

Рассмотрев все возможности, мы доказали (3) для случая $r = 1$.

Для шага индукции нам потребуется одна техническая лемма.

Лемма 2. *Имеет место включение*

$$\begin{aligned}&\bigl[\bigl\langle \bigl[L_1, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], \dots, \bigl[L_{k-1}, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], L_{k+1}, \dots, L_{n-1}\bigr\rangle, L_0\bigr] \\ &\qquad \subseteq \bigl\langle \bigl[L_1, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], \dots, \bigl[L_{k-1}, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], L_{k+1}, \dots, L_{n-1}\bigr\rangle.\end{aligned}$$

Доказательство. Любой элемент подкольца

$$\bigl\langle \bigl[L_1, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], \dots, \bigl[L_{k-1}, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], L_{k+1}, \dots, L_{n-1}\bigr\rangle$$

является линейной комбинацией простых коммутаторов от элементов из указанных порождающих подмножеств, скажем, вида $[a_1, a_2, \dots, a_q]$. Для $l_0 \in L_0$ имеем

$$[[a_1, a_2, \dots, a_q], l_0] = \sum_{i=1}^{q} [a_1, a_2, \dots, [a_i, l_0], \dots, a_q].$$

Но каждый из элементов $[a_j, l_0]$ будет также лежать в том же подмножестве, откуда взят a_j. В самом деле, $[L_s, l_0] \subseteq L_s$ и $\bigl[[L_s, L_0^r], l_0\bigr] \subseteq \bigl[L_s, L_0^{r+1}\bigr] \subseteq \bigl[L_s, L_0^r\bigr]$.

Продолжим доказательство включения (3). При $r > 1$ применим доказанное утверждение (3) для случая $r = 1$ к кольцу $L^{((r-1)(h_2(m,k-1)+1))}$ с индуцированной градуировкой вместо L. Получаем

$$\begin{aligned}L^{(r(h_2(m,k-1)+1))} \cap L_k &= \Bigl(L^{((r-1)(h_2(m,k-1)+1))}\Bigr)^{(h_2(m,k-1)+1)} \cap L_k \\ &\subseteq \bigl\langle \bigl[L_1, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], \dots, \bigl[L_{k-1}, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], L_{k+1}, L_{k+2}, \dots, L_{n-1} \bigr\rangle \\ &\qquad + [L^{((r-1)(h_2(m,k-1)+1))} \cap L_k, L_0].\end{aligned}$$

Используя очевидные включения, мы увеличили здесь первое слагаемое и получили такое же, как в (3). Ко второму слагаемому мы можем теперь применить предположение индукции для $r - 1$:

$$\begin{aligned}&[L^{((r-1)h_2(m,k-1)+1))} \cap L_k, L_0] \\ &\quad\subseteq \bigl[\bigl\langle \bigl[L_1, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], \dots, \bigl[L_{k-1}, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], L_{k+1}, \dots, L_{n-1} \bigr\rangle + \bigl[L_k, L_0^{r-1}\bigr], L_0\bigr] \\ &\qquad\subseteq \bigl[\bigl\langle \bigl[L_1, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], \dots, \bigl[L_{k-1}, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], L_{k+1}, \dots, L_{n-1} \bigr\rangle, L_0\bigr] + \bigl[L_k, L_0^r\bigr].\end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части содержится в первом слагаемом (3) по лемме 2, а второе совпадает со вторым слагаемым в (3). Это завершает доказательство включения (3) для всех r.

Полагая $r = m2^{n-k}$, из (3) получаем, что

$$\begin{aligned}&L^{(m2^{n-k}(h_2(m,k-1)+1))} \cap L_k \\ &\quad\subseteq \bigl\langle \bigl[L_1, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], \dots, \bigl[L_{k-1}, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], L_{k+1}, L_{k+2}, \dots, L_{n-1} \bigr\rangle + \bigl[L_k, L_0^{m2^{n-k}}\bigr].\end{aligned}$$

Значит, если положить $h_1(m,k) = m2^{n-k}(h_2(m,k-1)+1)$, то утверждение (1) доказано для k.

Положим теперь $h_2(m,k) = h_2(m,k-1) + h_1(m,k)$ и докажем утверждение (2) для этого значения функции $h_2(m,k)$. Имеем $L^{(h_2(m,k))} = (L^{(h_1(m,k))})^{(h_2(m,k-1))}$. Применим утверждение (2) при $k-1$ к кольцу $L^{(h_1(m,k))}$ с индуцированной градуировкой:

$$\begin{aligned}&(L^{(h_1(m,k))})^{(h_2(m,k-1))} \\ &\subseteq \bigl\langle \bigl[L_1, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], \dots, \bigl[L_{k-1}, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], L^{(h_1(m,k))} \cap L_k, L_{k+1}, L_{k+2}, \dots, L_{n-1}, L_n \bigr\rangle.\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь мы использовали также очевидные включения

$$\bigl[L^{(h_1(m,k))} \cap L_i, L_0^{m2^{n-k+1}}\bigr] \subseteq \bigl[L_i, L_0^{m2^{n-k}}\bigr] \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

и

$$L^{(h_1(m,k))} \cap L_j \subseteq L_j \quad \text{при} \quad j = k+1, \dots, n-1, n.$$

Остается подставить в (4) доказанное ранее включение (1) вместо $L^{(h_1(m,k))} \cap L_k$; в набор порождающих подмножеств при этом добавится только $\bigl[L_k, L_0^{m2^{n-k}}\bigr]$. В результате после удаления повторов получаем

$$\begin{aligned}&L^{(h_2(m,k))} = (L^{(h_1(m,k))})^{(h_2(m,k-1))} \\ &\subseteq \bigl\langle \bigl[L_1, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], \dots, \bigl[L_{k-1}, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], \bigl[L_k, L_0^{m2^{n-k}}\bigr], L_{k+1}, L_{k+2}, \dots, L_{n-1}, L_n \bigr\rangle,\end{aligned}$$

что и составляет требуемое включение (2) для k.

При $k = n$ включение (2) принимает вид

$$L^{(h_2(m,n))} \subseteq \big\langle \big[L_1, L_0^m\big], \big[L_2, L_0^m\big], \dots, \big[L_{n-1}, L_0^m\big], \big[L_n, L_0^m\big] \big\rangle,$$

что и составляет утверждение теоремы 1 со значением $f(m,n) = h_2(m,n)$.

Замечание 1. Для функций $h_i(m,n)$, $f(m,n)$ нетрудно выписать явные верхние оценки (или даже явные формулы).

Замечание 2. Результат теоремы 1 применим к алгебрам Ли любой, не обязательно конечной, размерности.

Теорема 2. *Если алгебра Ли L допускает полупростой (как линейное преобразование) автоморфизм φ конечного порядка n, то для любого m ее $f(m,n)$-й коммутант $L^{(f(m,n))}$ содержится в подалгебре, порожденной множеством $[L, \underbrace{C_L(\varphi), \dots, C_L(\varphi)}_{m}]$, где $C_L(\varphi)$ — подалгебра неподвижных точек, а $f(m,n)$ — значение функции из теоремы* 1.

Следствие. *Предположим, что φ — полупростой автоморфизм конечного порядка n алгебры Ли L. Если подалгебра, порожденная множеством $[L, \underbrace{C_L(\varphi), \dots, C_L(\varphi)}_{m}]$, разрешима ступени d, то алгебра Ли L разрешима ступени, не превосходящей $d + f(m,n)$, где $f(m,n)$ — значение функции из теоремы* 1.

Доказательство. Можно считать, что основное поле содержит ω — первообразный корень n-й степени из 1. Тогда алгебра L разлагается в прямую сумму подпространств собственных векторов:

$$L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i, \quad L_i = \{l \in L \mid l^\varphi = \omega^i l\}.$$

Это разложение составляет $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуировку: $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j(\bmod n)}$, поскольку для $a \in L_i$ и $b \in L_j$ имеем $[a,b]^\varphi = [a^\varphi, b^\varphi] = [\omega^i a, \omega^j b] = \omega^{i+j}[a,b]$, причем здесь $i + j$ можно считать вычетом по модулю n, так как $\omega^n = 1$. При этом, очевидно, $L_0 = C_L(\varphi)$, так что остается только применить теорему 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крекнин В. А.* Разрешимость алгебр Ли с регулярными автоморфизмами конечного периода // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, № 3. С. 467–469.
2. *Winter D. J.* On groups of automorphisms of Lie algebras // J. Algebra. 1968. V. 8, N 2. P. 131–142.
3. *Хухро Е. И., Шумяцкий П. В.* О неподвижных точках автоморфизмов колец Ли и локально конечных групп // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 6. С. 706–723.
4. *Bergen J., Grzeszczuk P.* Gradings, derivations, and automorphisms of nearly associative algebras // J. Algebra. 1996. V. 179, N 3. P. 732–750.
5. *Хухро Е. И., Макаренко Н. Ю.* Кольца Ли, допускающие автоморфизм порядка 4 с малым числом неподвижных точек // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 1. С. 41–78.
6. *Хухро Е. И., Макаренко Н. Ю.* Кольца Ли, допускающие автоморфизм порядка 4 с малым числом неподвижных точек. II // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 2. С. 144–166.

Статья поступила 31 октября 2000 г.

Хухро Евгений Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
`khukhro@math.nsc.ru`