Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 512.623.5

К ТЕОРИИ СЕЧЕНИЙ В УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛЯХ

Г. Г. Пестов

Аннотация: Существует глубокая связь между алгебраическими свойствами упорядоченного поля и строением сечений в этом поле. Классификация сечений и теоремы о сечениях в упорядоченных полях используются в качестве инструмента исследования. Доказано, что если многочлен $f(x) \in K[x]$ и все его производные не меняют знака на симметричном сечении (A, B) в упорядоченном поле K, то существуют такие $a \in A$, $b \in B$, что для любого упорядоченного расширения P поля K все значения $f(x)$ при $a \leq x \leq b$, $x \in P$ архимедовски эквивалентны.

Теорема об изоморфизме. *Пусть K и P — вещественно замкнутые упорядоченные поля такие, что $\operatorname{card} K = \operatorname{card} P = \alpha > \aleph_0$, и конфинальность каждого симметричного сечения в обоих полях равна α. Тогда для того чтобы K и P были изоморфны как упорядоченные поля, необходимо и достаточно, чтобы группы архимедовских классов этих полей были упорядоченно изоморфны.*

Библиогр. 9.

1. Введение

Для выражения связи между свойствами упорядоченного поля и строением сечений в этом поле необходима развитая система классификации сечений. Классификация сечений в этой статье производится в основном по двум критериям: по поведению многочленов на сечении и по наличию или отсутствию симметрии сечения. Использована также классификация сечений по конфинальности их берегов. Теоремы о строении сечений применяются в исследовании упорядоченных полей. В частности, теорема 3.2 характеризует поведение многочленов на симметричном сечении.

Основной результат статьи относится к изоморфизму упорядоченных полей и содержится в теореме 5.1.

2. Виды сечений в упорядоченном поле

Элементы a, b упорядоченного поля K называются *архимедовски эквивалентными,* если существует такое натуральное число n, что $n|a| > |b|$, $n|b| > |a|$ [1]. Если a и b архимедовски эквивалентны, то будем писать $a \sim b$.

Лемма 2.1. *Пусть K — упорядоченное поле, $\overline{K}$ — его вещественное замыкание, $\xi \in \overline{K}$, степень ξ над K равна m. Тогда найдутся натуральное $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, и элемент $b \in K$ такие, что ξ^n архимедовски эквивалентно b.*

Доказательство. В условиях леммы существует неприводимый многочлен $f(x) \in K[x]$ степени m такой, что $f(\xi) = 0$, т. е.

$$\sum_{i=0}^{m} a_i(\xi)^i = 0. \tag{1}$$

Пусть $a_j(\xi)^j$ — слагаемое суммы в левой части этого равенства, имеющее наибольший модуль. Если все остальные слагаемые этой суммы бесконечно малы по сравнению с наибольшим слагаемым, то сумма (1) не равняется нулю. Итак, найдется слагаемое $a_k(\xi)^k$, эквивалентное $a_j(\xi)^j$, где $k \neq j$. Значит, $a_j(\xi)^j \sim a_k(\xi)^k$. Отсюда $(\xi)^{j-k} \sim a_k(a_j^{-1})$, где $a_k(a_j^{-1}) \in K$, что и требовалось.

Следствие 2.2. *Если мультипликативная группа упорядоченного поля K делима, то каждый элемент из вещественного замыкания поля K архимедовски эквивалентен некоторому элементу поля K.*

Сечение (A, B) называется *собственным,* если в A нет наибольшего элемента, а в B нет наименьшего.

Будем говорить, что многочлен $f(x)$ *меняет знак на сечении* (A, B), если существуют такие $a \in A$, $b \in B$, что на множестве $A \cap [a, b]$ многочлен строго положителен (строго отрицателен), а на $B \cap [a, b]$ строго отрицателен (строго положителен.) Будем говорить, что многочлен $f(x)$ *сохраняет знак на сечении* (A, B), если существуют такие $a \in A$, $b \in B$, что на $[a, b]$ многочлен строго положителен (строго отрицателен).

Сечение в упорядоченном поле K назовем *алгебраическим*, если существует многочлен $f(x) \in K[x]$, меняющий знак на этом сечении; в противном случае сечение назовем *трансцендентным.*

Лемма 2.3. *Всякое алгебраическое сечение собственное.*

Лемма 2.4. *Пусть $\overline{K}$ — вещественное замыкание упорядоченного поля K. Сечение (A, B) в K является алгебраическим тогда и только тогда, когда найдется элемент $\xi \in \overline{K}$, расположенный между A и B.*

Это следует из того факта [2], что многочлен из $K[x]$, принимающий значения разных знаков при $x = a$, $x = b$, $a, b \in K$, имеет корень в $\overline{K}$, расположенный между a и b.

Следствие 2.5. *Упорядоченное поле K вещественно замкнуто тогда и только тогда, когда в K нет алгебраических сечений.*

Пусть (A, B) — алгебраическое сечение. Тогда наименьшая из степеней многочленов, меняющих знак на этом сечении, называется *степенью сечения* (A, B) [3]. Обозначение:$\deg(A, B)$. Берег A сечения (A, B) называется *длинным*, если для каждого $a \in A$ существует такое $a_1 \in A$, что $(a_1 + (a_1 - a)) \in B$. Аналогично берег B называется *длинным*, если для каждого $b \in B$ существует такое $b_1 \in B$, что $(b_1 + (b_1 - b)) \in A$. Берег сечения, не являющийся длинным, называется *коротким.* Иначе, берег A сечения (A, B) называется коротким, если существует $a \in A$ такое, что $(a_1 + (a_1 - a)) \in A$ для каждого $a_1 \in A$. Такой элемент a короткого берега назовем *близким* к B. Иначе, элемент $a \in A$ называется близким к B, если $\forall b \in A \, \forall c \in K \ (b - a = c - b) \Rightarrow c \in A$.

Лемма 2.6. *Хотя бы один из берегов каждого сечения длинный.*

Доказательство. Предположим, что оба берега сечения (A, B) в поле K короткие, $a \in A$, $b \in B$ — элементы, близкие к A и B соответственно. Обозначим $c = (a + b)/2$. Пусть $c \in A$. Тогда $a \in A$, $c \in A$, $c - a = b - c$, $b \in B$. Это противоречит тому, что берег A короткий. Итак, $c \notin A$. Аналогично $c \notin B$; противоречие.

Таким образом, у каждого сечения либо оба берега длинные, либо один берег длинный, другой короткий. Сечения первого вида назовем *симметричными,* второго вида — *несимметричными.*

Комментарий. Термин «симметричное сечение» имеет более глубокий «геометрический» смысл. Пусть (A, B) — сечение в упорядоченном поле K, а P — упорядоченное расширение поля K, в котором существуют элементы, расположенные между берегами A и B. Назовем множество E всех элементов поля P, расположенных между между берегами A и B, *ядром* сечения (A, B). Пусть $\xi \in E$. Определим множества: $E^-_\xi = \{\xi - x \mid x \in E, x \leq \xi\}$, $E^+_\xi = \{x - \xi \mid x \in E, x \geq \xi\}$. Сечение (A, B) симметрично тогда и только тогда, когда $E^-_\xi = E^+_\xi$.

Теорема 2.7. *Пусть сечение (A, B) в поле K несимметрично, $a \in A$, a близко к B. Если $K(c)$ — простое расширение K, в котором $A < c < B$, то $(c - a)$ архимедовски не эквивалентно никакому элементу из $K(c)$.*

Доказательство. Убедимся сначала, что имеет место неравенство $b_1 = c + (c - a) < B$. Если найдется элемент $b_2 \in B$ такой, что $b_2 \leq b_1$, то $(b_2 + a)/2 \leq (b_1 + a)/2 \leq c$, $(b_2 + a)/2 \leq c$. Так как $(b_2 + a)/2 \in P$, то $(b_2 + a)/2 \in A$. Далее, $a \in A$, $(b_2 + a)/2 \in A$, $(b_2 + a)/2 - a = b_2 - (b_2 + a)/2$, между тем $b_2 \notin A$, что противоречит определению короткого берега. Итак, $\forall x \in B$ $(b_1 < x)$. Значит, $A < c < c + (c - a) < B$.

Убедимся, что $(c - a)$ не эквивалентно никакому элементу из P. Пусть, напротив, $(c - a) \sim d$, $d \in P$, $d > 0$. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $(c - a) < nd$, $d < n(c - a)$. Обозначим $d_1 = d/n$. Имеем $d_1 \in P$, $0 < d_1 < c - a$, $c - a < n^2 d_1$. Рассмотрим арифметическую прогрессию $a, a + d_1, \dots, a + n^2 d_1$. Для первого члена имеем $a < c$, для последнего $a + n^2 d_1 > c$, так как $a + n^2 d_1 = a + nd > a + (c - a) = c$. Поскольку $0 < d_1 < c - a$, найдется такое $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, что $c < a + kd_1 < c + (c - a)$. Отсюда $A < a + kd_1 < B$. Между тем $(a + kd) \in P$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Следствие 2.8. *Пусть (A, B) — несимметричное сечение в $K, a \in A$, a близко к B, $K(c)$ — простое расширение K, в котором $A < c < B$. Тогда для каждого $a_1 \in A$, $a \leq a_1$, и для каждого $b \in B$ имеет место $(a_1 - a) \ll c - a \ll b - a$ (здесь двойной знак неравенства обозначает «бесконечно мало по сравнению с»).*

Следствие 2.9. *Если сечение (A, B) несимметрично, то в поле $K(t)$, полученном заполнением этого сечения, существуют элементы, архимедовски не эквивалентные никаким элементам из K* [4].

Лемма 2.10. *Пусть (A, B) — сечение в поле P, $P(c)$ — простое расширение поля P, в котором $A < c < B$. Берег A является длинным тогда и только тогда, когда выполнено условие (L): для каждого $a \in A$ элемент $(c - a)$ архимедовски эквивалентен какому-нибудь элементу из P.*

Доказательство. 1. Пусть в условиях леммы берег A длинный и $a_1 \in A$. По определению длинного берега найдется $a_2 \in A$ такое, что $(a_2 + (a_2 - a_1)) \in B$. Обозначим $a_3 = a_2 + (a_2 - a_1)$. Имеем

$$a_2 - a_1 < c - a_1 < a_3 - a_1. \tag{2}$$

Но $a_3 - a_1 = 2(a_2 - a_1)$. Значит, левая и правая части неравенства (2) архимедовски эквивалентны и положительны. Отсюда $(c - a_1) \sim (a_2 - a_1)$. Итак, условие (L) выполнено.

2. Пусть условие (L) выполнено. Тогда из теоремы 2.7 следует, что берег A длинный.

Лемма 2.11. *Если в K при любых $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n_0$ разрешимо уравнение $x^n = a$, то в этом поле все алгебраические сечения степени не выше n_0 симметричны* [3].

Доказательство. Покажем, что в условиях леммы у алгебраического сечения (A, B) степени не выше n_0 оба берега длинные. Пусть $f(x) \in K[x]$, $f(x)$ меняет знак на (A, B), $\deg f(x) = m \leq n_0$. В $\overline{K}$ существует корень c многочлена $f(x)$, лежащий между A и B.

Пусть $a \in A$. Элемент $(c - a)$ алгебраичен над K, степень $(c - a)$ равна m. По лемме 2.1 $(c - a)^n$ при некотором натуральном $n \leq m$ архимедовски эквивалентно некоторому $b \in K$. Отсюда $(c - a) \sim b^{\frac{1}{n}}$. По условию $b^{\frac{1}{n}} \in K$. Итак, $(c - a)$ для произвольного $a \in K$ архимедовски эквивалентно некоторому элементу поля K. В силу леммы 2.10 берег A длинный. Совершенно аналогично доказывается, что берег B длинный. Итак, сечение (A, B) симметрично.

Теорема 2.12. *Если мультипликативная группа упорядоченного поля K делима, то это поле вещественно замкнуто тогда и только тогда, когда каждое симметричное сечение в K трансцендентно.*

Доказательство. В самом деле, упорядоченное поле K вещественно замкнуто, если и только если в K нет алгебраических сечений. Из делимости мультипликативной группы поля следует, что каждое алгебраическое сечение в этом поле симметрично. Таким образом, условие трансцендентности всех симметричных сечений в K равносильно условию отсутствия в K алгебраических сечений, т. е. вещественной замкнутости поля.

3. О значениях многочлена в окрестности симметричного сечения

Пусть K — упорядоченное поле, P — его упорядоченное расширение, $a, b \in K$, $a \leq b$. Обозначим $[a, b] = \{x \in K | a \leq x \leq b\}$, $[a, b]_P = \{x \in P | a \leq x \leq b\}$.

Теорема 3.1. *Пусть (A, B) — сечение в упорядоченном поле $K, f(x) \in K[x]$, $P \supset K$. Если сам многочлен $f(x)$ и все его производные не меняют знака на сечении (A, B), то найдутся такие $a \in A$, $b \in B$, что*

1) *$f(x) > 0$ всюду на $[a, b]_P$ или $f(x) < 0$ всюду на $[a, b]_P$,*

2) *$f(x)$ строго монотонно на $[a, b]_P$.*

Комментарий. Таким образом, условие теоремы относится к поведению многочлена $f(x) \in K[x]$ и его производных на сегменте в поле K, а заключение теоремы — к поведению этого многочлена на произвольном упорядоченном расширении поля K.

Доказательство. В условиях теоремы обозначим $n = \deg f(x)$, через $\overline{P}$ обозначим вещественное замыкание поля P. Для каждого $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq (n - 1)$, существует сегмент $[a_m, b_m]$ в поле K, на котором многочлен $f^{(m)}(x)$ либо всюду строго больше нуля, либо всюду строго меньше нуля. Рассмотрим пересечение этих сегментов для всех m, $0 \leq m \leq (n-1)$. Очевидно, это сегмент в K. Обозначим его через $[a, b]$.

Убедимся теперь, что и на сегменте $[a, b]_{\overline{P}}$ каждый многочлен $f^{(m)}(x)$, $0 \leq m \leq (n - 1)$, либо всюду строго больше, либо всюду строго меньше нуля (будем говорить, что эти многочлены сохраняют знак на сегменте $[a, b]_{\overline{P}}$). Допустим, что, напротив, некоторые из рассматриваемых многочленов принимают на этом сегменте значения противоположных знаков; тогда они имеют корни на данном сегменте. Пусть m_0 — наибольшее из m, $0 \leq m \leq (n-1)$, для которых $f^{(m)}(x)$ имеет корни в $[a,b]_{\overline{P}}$. Тогда $f^{(m_0+1)}(x)$ уже не имеет корней на этом сегменте. Это значит, что $f^{(m_0)}(x)$ имеет в $[a,b]_{\overline{P}}$ единственный корень ξ и кратность этого корня единица. Заметим, что $\xi \neq a$, $\xi \neq b$. Так как $f^{m_0}(x)$ не обращается в нуль на $[a,b]$, то $a < \xi < b$. Следовательно, ξ — единственная точка, где происходит смена знака многочлена $f^{(m_0)}(x)$. Поэтому $f^{(m_0)}(a)f^{(m_0)}(b) < 0$, что противоречит условию теоремы. Итак, все многочлены $f^{(m)}(x)$, $0 \leq m \leq (n-1)$, сохраняют знак на $[a,b]_{\overline{P}}$.

Заметим, что $f^{(n)}(x)$ — константа, отличная от нуля (по предположению степень многочлена $f^{(n)}(x)$ равна n).

Поскольку для каждого из многочленов $f^{(m)}(x), 0 \leq m \leq (n-1)$, производная на сегменте $[a,b]_{\overline{P}}$ сохраняет знак, то каждый из этих многочленов строго монотонен на этом сегменте. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть (A,B) — симметричное сечение в упорядоченном поле K, $f(x) \in K[x]$, $P \supset K$. Если сам многочлен $f(x)$ и все его производные не меняют знака на сечении (A,B), то найдутся такие $a \in A$, $b \in B$, что*

1) *$f(x) > 0$ всюду на $[a,b]_P$ или $f(x) < 0$ всюду на $[a,b]_P$,*

2) *$f(x)$ строго монотонно на $[a,b]_P$,*

3) *все значения $f(x)$ при $x \in [a,b]_P$ архимедовски эквивалентны.*

Доказательство. 1. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда для каждого натурального m, $0 \leq m \leq n-1$, многочлен $f^{(m)}(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Поэтому найдутся такие $\alpha_m \in A$, $\beta_m \in B$, что

1) $f^{(m)}(x) > 0$ всюду на $[\alpha_m, \beta_m]_{\overline{P}}$ или $f^{(m)}(x) < 0$ всюду на $[\alpha_m, \beta_m]_{\overline{P}}$,

2) $f^{(m)}(x)$ строго монотонно на $[\alpha_m, \beta_m]_{\overline{P}}$.

Обозначим $a_n = \max\limits_m \alpha_m$, $b_n = \min\limits_m \beta_m$.

На сегменте $[a_n, b_n]_{\overline{P}}$ каждый многочлен $f^{(m)}(x)$, $0 \leq m \leq n-1$, строго монотонен и не обращается в нуль.

2. Докажем, что

$(*)$ для каждого натурального m, $0 \leq m \leq n$, существуют a_m, b_m такие, что $a_{m+1} \leq a_m < b_m \leq b_{m+1}$, и на сегменте $[a_m, b_m]_{\overline{P}}$ все значения многочлена $f^{(m)}(x)$ архимедовски эквивалентны.

Доказательство утверждения $(*)$ ведем индукцией по m от n до 0.

При $m = n$ многочлен $f^{(n)}(x)$ является ненулевой константой, поэтому все его значения архимедовски эквивалентны всюду, в частности на сегменте $[a_n, b_n]_{\overline{P}}$.

Пусть утверждение $(*)$ выполнено для всех m, $0 < k+1 \leq m \leq n$. Прежде всего найдем $a_k \in A$, $b_k \in B$. Возможны два случая:

(a) $|f^{(k)}(a_{k+1})| < |f^{(k)}(b_{k+1})|$,

(b) $|f^{(k)}(a_{k+1})| > |f^{(k)}(b_{k+1})|$.

Заметим, что равенство здесь невозможно в силу строгой монотонности $f^{(k)}(x)$.

(a) Пусть сначала $|f^{(k)}(a_{k+1})| < |f^{(k)}(b_{k+1})|$. Тогда $|f^{(k)}(x)|$ строго возрастает на $[a_{k+1}, b_{k+1}]_{\overline{P}}$. По условию теоремы сечение (A,B) симметрично, поэтому берега A и B длинные. По определению длинного берега найдется такое $a_k \in A, a_{k+1} < a_k$, что $(a_k + (a_k - a_{k+1})) \in B$. Обозначим $b_k = \min\{b_{k+1}, a_k + (a_k - a_{k+1})\}$. Пусть $[a_k \leq \xi_i \leq b_k]$, $i = 1, 2$. Тогда

$$a_k - a_{k+1} \leq \xi_i - a_{k+1} \leq 2(a_k - a_{k+1}).$$

Значит, $(\xi_i - a_{k+1}) \sim (a_k - a_{k+1})$, поэтому

$$(\xi_1 - a_{k+1}) \sim (\xi_2 - a_{k+1}). \tag{3}$$

По теореме Лагранжа [5] имеем

$$f^{(k)}(\xi_i) - f^{(k)}(a_{k+1}) = f^{(k+1)}(\eta_i)(\xi_i - a_{k+1}). \tag{4}$$

Так как $|f^{(k)}(x)|$ строго возрастает на $[a_{k+1}, b_{k+1}]_{\overline{P}}$, знак правой части (а значит, и левой части) в последнем равенстве совпадает со знаком $f^{(k)}(\xi_i)$. Поскольку этот многочлен не меняет знака на $[a_n, b_n]_{\overline{P}}$, то $\operatorname{sg} f^{(k+1)}(\eta_i)(\xi_i - a_{k+1}) = \operatorname{sg} f^{(k)}(a_{k+1})$, тем самым

$$\operatorname{sg} f^{(k+1)}(\eta_1)(\xi_1 - a_{k+1}) = \operatorname{sg} f^{(k+1)}(\eta)_2(\xi_2 - a_{k+1}) \neq 0.$$

Из (4) имеем

$$f^{(k)}(\xi_1) = f^{(k)}(a_{(k+1)}) + f^{(k+1)}(\eta_1)(\xi_i - a_{k+1}),$$

$$f^{(k)}(\xi_2) = f^{(k)}(a_{k+1}) + f^{(k+1)}(\eta_2)(\xi_i - a_{k+1}).$$

По предыдущему все слагаемые в правых частях этих двух равенств отличны от нуля и имеют один знак, первые слагаемые в обоих равенствах совпадают, вторые архимедовски эквивалентны. Следовательно, $f^{(k)}(\xi_1) \sim f^{(k)}(\xi_2)$, что и требовалось.

(b) Пусть теперь $|f^{(k)}(a_{k+1})| > |f^{(k)}(b_{k+1})|$. Тогда $|f^{(k)}(x)|$ строго убывает на $[a_{k+1}, b_{k+1}]_{\overline{P}}$. Так как берег B длинный, то найдется такое $b_k \in B$, $b_k < b_{k+1}$, что $(b_k + (b_k - b_{k+1})) \in B$. Обозначим $a_k = \max(a_{k+1}, (b_k + (b_k - b_{k+1})))$. Далее доказательство вполне аналогично предыдущему с заменой a_{k+1} на b_{k+1}. Итак, $(*)$ доказано.

3. Обозначим через $[a, b]$ пересечение всех сегментов $[a_k, b_k]$. На $[a, b]$ выполнены пп. 1–3 из заключения теоремы, что и требовалось. Теорема доказана.

4. Простые расширения упорядоченных полей

Пусть (A, B) — сечение в упорядоченном поле K. Если $K(t)$ — простое упорядоченное расширение поля K, в котором $A < t < B$, то будем говорить, что это расширение получено *заполнением сечения* (A, B) [6]. Порядок в таком расширении $K(t)$ в общем случае не определен однозначно, даже если потребовать, чтобы t было трансцендентно над K [7].

Теорема 4.1. *Если сечение (A, B) в упорядоченном поле K трансцендентно, то порядок из K единственным образом продолжается на поле, полученное заполнением этого сечения.*

Доказательство. Пусть $K(t)$ получено из K заполнением трансцендентного сечения (A, B). Пусть $f(x) \in K[t]$. Покажем, что знак элемента $f(t)$ в поле $K(t)$ может быть задан лишь единственным образом.

В самом деле, ни сам многочлен $f(t)$, ни его производные не меняют знака на (A, B). По теореме 3.2 существуют такие $a \in A, b \in B$, что $f(x)$ сохраняет знак на сегменте $[a, b]_{\overline{K(t)}}$. В частности, знак $f(t)$ совпадает со знаком $f(a)$. Итак, если $f(x)$ положителен (отрицателен) на сечении (A, B), то $f(t) > 0$ $(f(t) < 0)$ в кольце $K[t]$, следовательно, и знак $f(t)$ определен в $K(t)$ единственным образом. Поэтому знак каждого элемента в поле $K(t)$ определен единственным образом.

Теорема 4.2. *Пусть (A, B) — симметричное трансцендентное сечение в упорядоченном поле K, $K(c)$ — его упорядоченное расширение, в котором $A < c < B$. Тогда каждый элемент из $K(c)$ архимедовски эквивалентен некоторому элементу из K.*

Доказательство. Пусть (A, B) — трансцендентное симметричное сечение. Тогда никакой многочлен из $K[x]$ не меняет знака на сечении (A, B). Пусть $K(c)$ — простое упорядоченное расширение K, в котором $A < c < B$. По теореме 3.2 для каждого $f(x) \in K[x]$ знак $f(c)$ определен единственным образом (он совпадает со знаком $f(x)$ на сечении (A, B)) и элемент $f(c)$ архимедовски эквивалентен некоторому элементу из K. Отсюда следует единственность продолжения порядка на $K(t)$ и то, что каждый элемент поля $K(c)$ архимедовски эквивалентен некоторому элементу из K.

Теорема 4.3. *Если сечение (A, B) симметрично, то на поле $K(t)$, полученное заполнением сечения (A, B), можно так продолжить порядок из K, что каждый элемент из $K(t)$ будет архимедовски эквивалентен некоторому элементу из K.*

Доказательство. Пусть симметричное сечение (A, B) является алгебраическим и степень сечения равна s. Тогда существует $f(x) \in K[x]$ такой, что $f(x)$ меняет знак на (A, B), и $\deg f = s$. Многочлен $f(x)$ имеет единственный корень $\xi \in \overline{K}$, лежащий между A и B. Рассмотрим расширение $K(\xi)$. Каждый элемент $a \in K(\xi)$ можно представить в виде $a = \varphi(\xi)$, где $\varphi(x) \in K[x]$, и степень $\varphi(x)$ строго меньше s. Следовательно, ни сам многочлен $\varphi(x)$, ни его производные не меняют знака на сечении (A, B). Значит, по теореме 3.2 знак $\varphi(\xi)$ определен единственным образом (он совпадает со знаком многочлена $\varphi(x)$ на сечении (A, B)), и элемент a архимедовски эквивалентен некоторому элементу из K.

Доказательство для случая трансцендентного симметричного сечения следует из теоремы 3.2.

5. Теорема об изоморфизме упорядоченных полей

Пусть (A, B) — симметричное сечение в K. Тогда конфинальность A и коинициальность B равны некоторому регулярному кардиналу, который назовем *конфинальностью* сечения (A, B).

Теорема 5.1 (об изоморфизме). *Пусть K и P — вещественно замкнутые упорядоченные поля такие, что $\operatorname{card} K = \operatorname{card} P = \alpha > \aleph_0$, и конфинальность каждого симметричного сечения в обоих полях равна α. Тогда для того чтобы K и P были изоморфны как упорядоченные поля, необходимо и достаточно, чтобы группы архимедовских классов этих полей были упорядоченно изоморфны.*

Доказательство. Обозначим через G_1 и G_2 группы архимедовских классов полей P и K соответственно. Пусть $\operatorname{card} K = \operatorname{card} P = \alpha > \aleph_0$ и конфинальность каждого симметричного сечения в обоих полях равна α.

Необходимость. Если поля K и P упорядоченно изоморфны, то очевидно, что изоморфны и группы G_1 и G_2.

Достаточность. Это основная часть доказательства. Пусть существует упорядоченный изоморфизм $\psi : G_1 \to G_2$. Докажем, что тогда поля P и K упорядоченно изоморфны.

1. План доказательства достаточности. Обозначим через γ_1 и γ_2 естественные гомоморфизмы мультипликативных групп полей P и K на G_1 и G_2 соответсвенно. Занумеруем элементы полей P и K ординалами: $K = \{x_\delta \mid \delta < \alpha\}$, $P = \{y_\delta \mid \delta < \alpha\}$. По трансфинитной рекурсии будем строить множество троек: $(K_\beta, P_\beta, \varphi_\beta)_{\beta<\alpha}$, где K_β — вещественно замкнутое подполе K такое, что $x_\delta \in K_\beta$ при $\delta < \beta$; аналогично $P_\beta \subset P$, P_β вещественно замкнуто и $y_\delta \in P_\beta$ при $\delta < \beta$.

Далее, $\operatorname{card} K_\beta = \operatorname{card} P_\beta \leq \max\{\aleph_0, \operatorname{card}\beta,\}$, φ_β — изоморфизм K_β на P_β, согласованный с изоморфизмом ψ в том смысле, что для любого $x \in K_\beta$ имеет место равенство $\psi(\gamma_1(x)) = \gamma_2(\varphi_\beta(x))$.

Наконец, если $\delta < \beta < \alpha$, то $K_\delta \subset K_\beta$, $P_\delta \subset P_\beta$ и φ_δ — сужение φ_β на K_δ.

Ясно, что $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} K_\beta = K$, $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} P_\beta = P$ и изоморфизмы φ_β порождают изоморфизм K на P.

2. Начальная тройка. Обозначим через Q_1 и Q_2 простые подполя полей K и P, через φ_{00} — естественный изоморфизм Q_1 на Q_2. Обозначим $K_0 = \overline{Q_1}$, $P_0 = \overline{Q_2}$. Как известно, сохраняющий порядок изоморфизм между упорядоченными полями продолжается до изоморфизма между их вещественными замыканиями [2]. Продолжим изоморфизм φ_{00} до изоморфизма φ_0 поля K_0 на P_0.

Начальная тройка (K_0, P_0, φ_0) построена. Условие согласованности изоморфизма φ_0 с ψ выполнено тривиальным образом, так как каждая из групп архимедовских классов полей K_0 и P_0 состоит из единственного элемента.

3. Пусть построена тройка $(K_\beta, P_\beta, \varphi_\beta)$, где $\beta < \alpha$. Построим тройку $(K_{\beta+1}, P_{\beta+1}, \varphi_{\beta+1})$. Построение состоит из двух частей, которые мы назовем прямым и обратным шагами.

Прямой шаг. Переход к простым расширениям. Если $x_\beta \in K_\beta$, то полагаем $K_{\beta,1} = K_\beta$, $P_{\beta,1} = P_\beta$, $\varphi_{\beta,1} = \varphi_\beta$. Пусть теперь $x_\beta \notin K_\beta$. Тогда x_β производит в K_β некоторое сечение (A_1, B_1). Это сечение трансцендентно, так как K_β вещественно замкнуто. Следовательно, в $K_\beta(x_\beta)$ условие $A_1 < x_\beta < B_1$ определяет единственным образом продолжение порядка с K_β. Обозначим $\varphi_\beta(A_1) = A_2$, $\varphi_\beta(B_1) = B_2$. Очевидно, что (A_2, B_2) — трансцендентное сечение в P_β.

Случай первый: сечение (A_1, B_1) симметрично. Поскольку $\operatorname{card} K_\beta = \operatorname{card} P_\beta = \max\{\aleph_0, \operatorname{card}\beta\}$, то $\operatorname{card} P_\beta < \alpha$. По условию теоремы конфинальность каждого симметричного сечения в P равна α. Поэтому существует $b \in P$ такое, что $A_2 < b < B_2$. Порядок с P_β единственным образом продолжается до удовлетворяющего условию $A_2 < b < B_2$ порядка на $P_\beta(b)$, тем самым изоморфизм φ_β продолжается до изоморфизма $\varphi_{\beta 0}$ поля $K_\beta(x_\beta)$ на $P_\beta(b)$, переводящего x_β в b. Убедимся, что условие $\psi\gamma_1(u) = \gamma_2(v) (*)$, где $v = \varphi_{\beta 0}(u)$, выполняется для всех $u \in K_\beta(x_\beta)$. Пусть $u \in K_\beta(x_\beta)$. Тогда по теореме 4.2 существует такой элемент $w \in K_\beta$, что $u \sim w$. Отсюда

$$\gamma_1(u) = \gamma_1(w), \quad \psi\gamma_1(u) = \psi\gamma_1(w). \tag{5}$$

На K_β изоморфизм φ_β согласован с ψ. Следовательно,

$$\psi\gamma_1(w) = \gamma_2\varphi_\beta(w) = \gamma_2\varphi_{\beta 0}(w). \tag{6}$$

Последнее равенство вытекает из того, что сужение $\varphi_{\beta 0}$ на K_β есть φ_β. Легко видеть, что упорядоченный изоморфизм сохраняет отношение архимедовской эквивалентности. Поэтому

$$\varphi_{\beta 0}(w) \sim \varphi_{\beta 0}(u), \tag{7}$$

откуда

$$\gamma_2\varphi_{\beta 0}(w) = \gamma_2\varphi_{\beta 0}(u). \tag{8}$$

Сопоставляя (5), (6), (8), получим

$$\psi\gamma_1(u) = \gamma_2\varphi_{\beta 0}(u). \tag{9}$$

Это и означает, что изоморфизм $\varphi_{\beta 0}$ согласован с ψ.

Случай второй: сечение (A_1, B_1) несимметрично. Предположим для определенности, что берег A_1 короткий, следовательно, существует $a_1 \in A_1$, близкое к B_1. Обозначим $\bar{x} = x_\beta - a_1$, $a_2 = \varphi(a_1)$. Имеем $a_2 \in A_2$, a_2 близко к B_2. Убедимся, что в P существует элемент, расположенный между A_2 и B_2. Выберем $x_2 \in A_2$, $a_2 \le x_2$, и $y_2 \in B_2$. Обозначим их φ_β-прообразы через x_1 и y_1 соответственно. По следствию 2.8 имеем

$$x_1 - a_1 \ll x_\beta - a_1 \ll y_1 - a_1. \tag{10}$$

Обозначим $g_1 = \gamma_1(x_\beta - a_1)$, $g_2 = \psi\gamma_1(x_\beta - a_1)$. Из (10) следует, что

$$\psi\gamma_1(x_1 - a_1) < \psi\gamma_1(x_\beta - a_1) < \psi\gamma_1(y_1 - a_1). \tag{11}$$

По предположению индукции φ_β согласовано с ψ на K_β. Поэтому $\psi\gamma_1(x_1 - a_1) = \gamma_2\varphi_\beta(x_1 - a_1)$, $\psi\gamma_1(y_1 - a_1) = \gamma_2\varphi_\beta(y_1 - a_1)$. Из (11) получим

$$\gamma_2\varphi_\beta(x_1 - a_1) < g_2 < \gamma_2\varphi_\beta(y_1 - a_1)), \quad \gamma_2(x_2 - a_2) < g_2 < \gamma_2(y_2 - a_2)). \tag{12}$$

Выберем $\bar{y} > 0$ в классе g_2. Обозначим $y = a_2 + \bar{y}$. Неравенства (12) перепишем так:

$$\gamma_2(x_2 - a_2) < \gamma_2(y - a_2) < \gamma_2(y_2 - a_2)). \tag{13}$$

Отсюда $(x_2 - a_2) < (y - a_2) < (y_2 - a_2))$, $x_2 < y < y_2$. Итак, $y \in P$, $A_2 < y < B_2$. Очевидно, что $P_\beta(y) = P_\beta(\bar{y})$.Обозначим $\bar{x} = x_\beta - a_1$. Так как сечение (A_1, B_1) трансцендентно, то φ_β единственным образом продолжается до изотонного изоморфизма $\varphi_{\beta 0} : K(x_\beta) \to P(y)$, удовлетворяющего условию $\varphi_{\beta 0}(\bar{x}) = \bar{y}$.

Покажем, что $\varphi_{\beta 0}$ согласован с ψ. Пусть $u \in K_\beta[x_\beta]$. Так как $K_\beta[x_\beta] = K_\beta[\bar{x}]$, то u представимо в виде $u = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i\bar{x}^i$, где $k_i \in K_\beta$. В силу того, что $\bar{x}$ трансцендентно над K_β, это представление единственно. Поле K_β вещественно замкнуто, и $\bar{x}$ не эквивалентно архимедовски никакому элементу из K_β, поэтому никакие слагаемые в представлении u не эквивалентны друг другу; наибольшее по модулю слагаемое (пусть это будет $k_j\bar{x}^j$) является бесконечно большим по отношению к другим слагаемым. Значит,

$$u \sim k_j\bar{x}^j. \tag{14}$$

Отсюда

$$\psi\gamma_1(u) = \psi\gamma_1(k_j)\psi\gamma_1(\bar{x}^j) = \gamma_2\varphi_\beta(k_j)\psi g_1{}^j = \gamma_2\varphi_{\beta 0}(k_j)(g_2)^j. \tag{15}$$

Далее, $g_2 = \gamma_2\bar{y} = \gamma_2\varphi_{\beta 0}(\bar{x})$. Итак,

$$\psi\gamma_1(u) = \gamma_2\varphi_{\beta 0}(k_j(\bar{x})^j). \tag{16}$$

С другой стороны, из (14) следует, что

$$\varphi_{\beta 0}(u) \sim \varphi_{\beta 0}(k_j(\bar{x})^j), \quad \gamma_2\varphi_{\beta 0}(u) = \gamma_2\varphi_{\beta 0}(k_j(\bar{x})^j), \tag{17}$$

Из (16) и (17) имеем

$$\psi\gamma_1(u) = \gamma_2\varphi_{\beta 0}(u) \tag{18}$$

для $u \in K_\beta[x_\beta]$. Последнее равенство легко переносится на $u \in K_\beta(x_\beta)$. Итак, построен сохраняющий порядок изоморфизм $\varphi_{\beta 0} : K_\beta(x_\beta) \to P_\beta(\bar{y})$, согласованный с отображением ψ.

Переход к вещественным замыканиям. Обозначим вещественные замыкания полей $K_\beta(x_\beta)$ и $P_\beta(y)$ через $K_{\beta 1}$ и $P_{\beta 1}$ соответственно. Изоморфизм $\varphi_{\beta 0}$ продолжается до сохраняющего порядок изоморфизма $\varphi_{\beta 1} : K_{\beta 1} \to P_{\beta 1}$. Убедимся, что он согласован с ψ.

Пусть $u \in K_{\beta 1}$. По лемме 2.1 существуют такие натуральное n и $\bar{u} \in K_\beta[x_\beta]$, что $u^n \sim \bar{u}$. Имеем $\psi\gamma_1(u^n) = \psi\gamma_1(\bar{u}) = \gamma_2\varphi_{\beta 0}((\bar{u})) = \gamma_2\varphi_{\beta 1}((\bar{u})) = \gamma_2\varphi_{\beta 1}(u^n)$. Отсюда $\psi\gamma_1(u^n) = \gamma_2\varphi_{\beta 1}(u^n)$. Окончательно $\psi\gamma_1(u^n) = \gamma_2\varphi_{\beta 1}(u^n)$.

Итак, в результате прямого шага получена тройка $K_{\beta 1}$, $P_{\beta 1}$, $\varphi_{\beta 1}$, где $K_{\beta 1}$, $P_{\beta 1}$ — вещественно замкнутые расширения полей K_β, P_β такие, что $x_\delta \in K_{\beta 1}$ при $\delta < \beta + 1$, а $\varphi_{\beta 1}$ — сохраняющий порядок изоморфизм $\varphi_{\beta 1} : K_{\beta 1} \to P_{\beta 1}$ такой, что для всех u из $K_{\beta 1}$

$$\psi\gamma_1(u) = \gamma_2\varphi_{\beta 1}(u).$$

Операции простого расширения и вещественного замыкания не меняют мощности поля, поэтому $\operatorname{card} K_{\beta 1} = \operatorname{card} P_{\beta 1} \le \max\{\aleph_0, \operatorname{card}\beta.\}$

Обратный шаг. В качестве исходной тройки выступает теперь тройка $K_{\beta 1}$, $P_{\beta 1}$, $\varphi_{\beta 1}$, полученная в результате прямого шага. Чтобы ввести обозначения, аналогичные использованным в прямом шаге, положим

$$\widehat{K}_\beta = K_{\beta 1}, \quad \widehat{P}_\beta = P_{\beta 1}, \quad \widehat{\varphi}_\beta = \varphi_{\beta 1}.$$

Обратный шаг также состоит из двух частей.

Переход к простым расширениям. Рассмотрим простое расширение $\widehat{P}_{\beta 0} = \widehat{P}_\beta(y_\beta)$. Поле $\widehat{P}_\beta$ играет здесь ту роль, которую в прямом шаге играло поле K_β, вместо x_β фигурирует y_β. Так же, как в прямом шаге строили простое расширение $P_{\beta 0}$ поля P_β, строим простое расширение $\widehat{K}_{\beta 0}$ поля $\widehat{K}_\beta$. Наконец, строим изотонный изоморфизм $\widehat{\varphi}_{\beta 0} : \widehat{K}_{\beta 0} \to \widehat{P}_{\beta 0}$, согласованный с ψ, т. е. такой, что для всех $u \in \widehat{K}_{\beta 0}$ имеет место равенство $\psi\gamma_1(u) = \gamma_2\widehat{\varphi}_{\beta 0}(u)$.

Переход к вещественным замыканиям. Обозначим через $K_{\beta+1}$, $P_{\beta+1}$ вещественные замыкания полей $\widehat{K}_{\beta 0}$, $\widehat{P}_{\beta 0}$ соответственно, через $\varphi_{\beta+1}$ — продолжение изоморфизма $\widehat{\varphi}_{\beta 0}$ до изоморфизма $K_{\beta+1}$ на $P_{\beta+1}$. Далее, как в прямом шаге, убеждаемся в истинности равенства $\psi\gamma_1(u) = \gamma_2\varphi_{\beta+1}(u)$.

Мощности полей $K_{\beta+1}$ и $P_{\beta+1}$ совпадают с мощностями полей K_β и P_β. Поэтому $\operatorname{card} K_{\beta+1} = \operatorname{card} P_{\beta+1} \le \max\{\aleph_0, \operatorname{card}(\beta+1)\}$. Тройка $K_{\beta+1}$, $P_{\beta+1}$, $\varphi_{\beta+1}$ построена.

4. Пусть $\beta < \alpha$, β — предельный ординал и для всех $\delta < \beta$ тройки K_δ, P_δ, φ_δ уже построены. Положим $K_{\beta 1} = \bigcup\limits_{\delta<\beta} K_\delta$, $P_{\beta 1} = \bigcup\limits_{\delta<\beta} P_\delta$. Имеем $(\gamma < \beta) \to x_\gamma \in K_{\beta 1}$, $y_\gamma \in P_{\beta 1}$. Изоморфизмы φ_δ естественным образом продолжаются до изоморфизма $\varphi_{\beta 1}$ поля $K_{\beta 1}$ на $P_{\beta 1}$.

Перейдем к вещественным замыканиям $K_\beta = \overline{K}_{\beta 1}$, $P_\beta = \overline{P}_{\beta 1}$, изоморфизм $\varphi_{\beta 1}$ продолжим до изоморфизма $\varphi_\beta : K_\beta \to P_\beta$. Условие согласованности

$$\psi\gamma_1(u) = \gamma_2\varphi_\beta(u)$$

выполняется в силу задания φ_β. Имеем $(\gamma < \beta) \to (x_\gamma \in K_\beta, y_\gamma \in P_\beta)$. Оценим мощности K_β и P_β. При каждой паре шагов (прямом и обратном шагах) множество образующих каждого из двух полей увеличивается не более, чем на два элемента. Поэтому мощность множества образующих поля K_β не превосходит $\operatorname{card}\beta$. Отсюда

$$\operatorname{card} K_\beta \le \max\{\aleph_0, \operatorname{card}\beta\}.$$

Такая же оценка справедлива и для P_β.

5. Итак, по трансфинитной рекурсии построены тройки $K_\beta, P_\beta, \varphi_\beta$ для всех ординалов $\beta < \alpha$. Очевидно, $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} K_\beta = K$, $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} P_\beta = P$, при этом изоморфизмы φ_β продолжаются до изоморфизма $\varphi : K \to P$, согласованного с ψ. Иначе $\psi\gamma_1 = \gamma_2\varphi$. Доказательство окончено.

Сечения в нестандартных моделях поля вещественных чисел исследованы в [8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fuchs L.* Partially ordered algebraic systems. Oxford; London; New York; Paris: Pergamon Press, 1963.
2. *Artin E., Schreier O.* Algebraische Konstruktion Reeller Körper // Abh. Math. Sem. Hamb. Univ. 1925. V. 5. P. 85–99.
3. *Пестов Г. Г.* Строение упорядоченных полей. Томск: Изд-во ТГУ, 1980.
4. *Пестов Г. Г.* Симметрия сечений в упорядоченном поле: Избранные докл. междунар. конф. «Всесибирские чтения по математике и механике». Томск: Изд-во ТГУ, 1997. Т. 1. С. 198–202.
5. *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. М.: Наука, 1965.
6. *Dales H. J., Woodin H.* Super real fields. Oxford: Clarendon Press, 1996.
7. *Macai E.* Notes on real closed fields // Ann Univ. Sci. Budapest. Sec. Mat. 1970. V. 13. P. 35–55.
8. *Галанова Н. Ю.* Конфинальность и симметричность сечений в упорядоченных полях // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск: Изд-во ТГУ, 1998. С. 138–143.
9. *Delay B.* Coupures propres dans $^*R$ // Ann. Math. Blaise Pascal. 1997. V. 4, N 1. P. 19–25.

Статья поступила 28 июня 2000 г., окончательный вариант — 12 февраля 2001 г.

Пестов Герман Гаврилович
Томский гос. университет, механико-математический факультет
пр. Ленина, 36, Томск 634050
pestov@math.tsu.ru