Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 513.77

ЛИНЕЙНЫЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ КВАЗИКОНФОРМНОСТИ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ТОЧЕК ВЕТВЛЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. И. Семенов

Аннотация: Вводится топологический коэффициент квазиконформности, улавливающий точки ветвления отображений с ограниченным искажением. Приведены достаточные условия для точек ветвления отображений и инъективности отображений в области. Библиогр. 10.

Есть много различных определений коэффициентов квазиконформности для отображений с ограниченным искажением, каждое из которых может быть более предпочтительным при решении той или иной экстремальной задачи в теории квазиконформных отображений (см., например, [1, 2]). В работе автора [3] введен так называемый топологический коэффициент квазиконформности, который близок к внутреннему коэффициенту квазиконформности. Его преимущество состоит в том, что он может «ловить» точки ветвления отображений с ограниченным искажением. В настоящей заметке вводится p-линейный топологический коэффициент, который, во-первых, почти всюду совпадает с классическим коэффициентом М. А. Лаврентьева, а во-вторых, он улавливает точки ветвления отображения. Это непростое свойство ветвления отображений с ограниченным искажением, и его связь с новым коэффициентом устанавливаются с помощью очень тонкой теоремы о локальной структуре отображений с ограниченным искажением, принадлежащей Ю. Г. Решетняку [4, 5]. Данная идея применительно к линейным искажениям отображения в точке впервые анонсируется автором в [6]. Ее применение дает возможность получить точные и тонкие оценки топологического индекса отображений с ограниченным искажением. Одна из этих оценок дается в настоящей заметке. Другое назначение вводимой числовой характеристики связано с порядком корня уравнения $f(x) = f(a)$ и плотностью отображения f в точке a. С помощью этих понятий можно дать достаточные условия для точек ветвления отображений и достаточные условия локальной инъективности отображений.

Обозначения и определения

Здесь $B(a,r)$ — открытый шар из пространства $\mathbb{R}^n$, соответственно r — радиус шара, a — его центр. Как обычно, $f'(x)$ — матрица Якоби отображения

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 97–01–00763, 00–01–00726) и Международной Ассоциации при Европейском экономическом сообществе (грант I0170, программа INTAS).

$f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$, в точке x, $j(a, f)$ — его топологический индекс в точке a (определение см., например, в [4, 7]). Пусть

$$L_f(a, r) = \max_{|x-a|=r} |f(x) - f(a)|, \quad l_f(a, r) = \min_{|x-a|=r} |f(x) - f(a)|.$$

Тогда линейный коэффициент отображения в точке (коэффициент М. А. Лаврентьева) определяется равенством

$$q_f(a) = \varlimsup_{r \to 0} \frac{L_f(a, r)}{l_f(a, r)}.$$

Это значение можно рассматривать как наибольшее искажение отображения в точке. Вместе с ним при оценке топологического индекса важным оказывается наименьшее искажение отображения в точке, определяемое формулой

$$\underline{q}_f(a) = \varliminf_{r \to 0} \frac{L_f(a, r)}{l_f(a, r)}. \tag{1}$$

Фиксируем какое-либо $p > 0$.

Определение 1. Величину

$$Q_{p,f}(a) = \varlimsup_{r \to 0} \frac{L_f(a, r)}{\sqrt[p]{p \int\limits_0^r l_f^p(a, r) t^{-1}\, dt}} \tag{2}$$

называют *p-линейным топологическим коэффициентом искажения отображения в точке a.*

В точках, где отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемо и $\det f'(a) \neq 0$, справедливо равенство $q_f(a) = Q_{p,f}(a)$. В точках ветвления соотношение между этими величинами может быть различным. В этом можно убедиться на простейших примерах аналитических функций.

Определение 2. Величины $q(f) = \operatorname{vrai\,sup}\limits_{a \in U} q_f(a)$, $Q_p(f) = \sup\limits_{a \in U} Q_{p,f}(a)$ соответственно называют *линейным коэффициентом в смысле М. А. Лаврентьева* и *p-линейным топологическим коэффициентом квазиконформности.*

Если $p = 1$, то соответствующий коэффициент будем называть *линейным топологическим коэффициентом.*

Так как отображения с ограниченным искажением дифференцируемы почти всюду и почти всюду якобиан этих отображений отличен от нуля, имеет место неравенство

$$q(f) \leq Q_p(f). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — открытое множество и $f : U \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным искажением. Тогда топологический индекс отображения в произвольной точке a удовлетворяет неравенству*

$$j(a, f) \leq K_1(f) \left(\frac{Q_{p,f}(a)}{\underline{q}_f(a)} \right)^{p(n-1)},$$

где $K_1(f)$ — внутренний коэффициент квазиконформности.

Определение внутреннего, внешнего и других коэффициентов см. в [8].

Доказательство теоремы 1 опирается на следующее утверждение, принадлежащее Ю. Г. Решетняку [4, с. 162, оценка 7.17].

Лемма 1. *Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — отображение с ограниченным искажением. Тогда для каждой точки $a \in U$ существует положительное число r_0 такое, что при всех значениях r, $t \in (0, r_0)$, $t < r$, выполняется неравенство*

$$\frac{l_f(a,t)}{t^\alpha} \leq \frac{L_f(a,r)}{r^\alpha},$$

где $\alpha = (j(a,f)/K_1(f))^{\frac{1}{n-1}}$.

Лемма 2. *Пусть неотрицательная непрерывно дифференцируемая возрастающая функция $\psi : [0, r_0) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:*

1) $r\psi'(r) \leq \gamma p \psi(r)$, *где* $\gamma, p > 0$;

2) $\psi' = O(r^{\alpha p - 1})$, *где* $\alpha > 0$.

Тогда $\alpha \leq \gamma$.

Доказательство. Интегрируя неравенство из условия 1 по промежутку $[r_1, r_2]$, после естественных преобразований выводим соотношение

$$\frac{\psi(r_2)}{\psi(r_1)} \leq \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\gamma p}.$$

Таким образом, функция $\eta(r) = \frac{\psi(r)}{r^{\gamma p}}$ невозрастающая в некоторой правосторонней окрестности точки 0 при фиксированных значениях p, γ. Из условия 2 в силу формулы Ньютона — Лейбница имеем $\psi(r) = O(r^{\alpha p})$ при $r \to 0$. Поэтому если $\alpha > \gamma$, то функция η равна 0, поскольку она неотрицательная и невозрастающая. Следовательно, $\alpha \leq \gamma$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Для произвольного фиксированного положительного числа ε по определению величин $\underline{q}_f(a)$, $Q_{p,f}(a)$ для всех достаточно малых значений $r > 0$, причем $r < r_0$ (см. лемму 1), выполняются неравенства

$$(\underline{q}_f(a) - \varepsilon)^p l_f^p(a,r) \leq L_f^p(a,r) \leq p(Q_{p,f}(a) + \varepsilon)^p \int\limits_0^r \frac{l_f^p(a,t)\,dt}{t}. \tag{4}$$

Пусть

$$\gamma = \left(\frac{Q_{p,f}(a) + \varepsilon}{\underline{q}_f(a) - \varepsilon}\right)^p, \quad \psi(r) = \int\limits_0^r \frac{l_f^p(a,t)\,dt}{t}. \tag{5}$$

Тогда из (4) получаем дифференциальное неравенство $r\psi'(r) \leq \gamma p \psi(r)$ в правосторонней окрестности точки 0 при фиксированном показателе p. В силу леммы 1 имеем $\psi(r) = O(r^{\alpha p})$ при $r \to 0$. Тогда из леммы 2 выводим, что $\alpha \leq \gamma$. Учитывая произвольный выбор числа ε, приходим к требуемой оценке.

Следствие 1. *Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — отображение с ограниченным искажением. Если $\ln Q_{p,f}(a) = o(1/p)$ при условии, что $p \to 0$, то топологический индекс удовлетворяет неравенству $j(a,f) \leq K_1(f)$.*

Утверждение вытекает из теоремы 1.

Другие подклассы отображений с ограниченным искажением, для которых топологический индекс удовлетворяет оценке из следствия, указаны в работе автора [9].

Следствие 2. *Пусть* $f : U \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *— отображение с ограниченным искажением. Если* $Q_1(f) < \sqrt[2n-2]{2}$, *то данное отображение не имеет точек ветвления.*

Доказательство. Из неравенства теоремы 1, неравенства $K_1(f) \leq q^{n-1}$ (см. [1, 8]) и неравенства (3) вытекает оценка $j(a, f) < 2$. Поэтому $j(a, f) = 1$ и отображение f — локальный гомеоморфизм. Следствие доказано.

Определим новую величину следующим равенством:

$$A(a) = \varlimsup_{p\to 0} Q^p_{p,f}(a). \tag{6}$$

Она также тесно связана с топологическими свойствами отображения и поэтому является важной характеристикой отображения в точке.

Теорема 2. *Пусть* $f : U \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *— отображение с ограниченным искажением. Тогда топологический индекс отображения в произвольной точке* a *удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{A^{n-1}(a)}{K_0(f)} \leq j(a, f) \leq K_1(f) A^{n-1}(a),$$

где $K_0(f)$, $K_1(f)$ *— внешний и внутренний коэффициенты квазиконформности.*

Доказательство опирается на следующее утверждение Ю. Г. Решетняка.

Лемма 3 [4, теорема 7.2, с. 158]. *Пусть* $f : U \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *— отображение с ограниченным искажением. Тогда для каждой точки* $a \in U$ *существует положительное число* r_0 *такое, что при всех значениях* r, $t \in (0, r_0)$, $t < r$, *выполняется неравенство*

$$l_f(a, t) \geq L_f(a, r) \left(\frac{\gamma_n t}{r}\right)^\beta, \tag{7}$$

где $\beta = \beta(a, f) = (K_0(f) j(a, f))^{\frac{1}{n-1}}$ *и* γ_n *— константа, зависящая только от размерности пространства.*

Доказательство теоремы 2. Верхняя оценка для индекса следует из неравенства теоремы 1. Установим нижнюю оценку. Из неравенства (7) для функции ψ из (5) имеем

$$p\psi(r) \geq \frac{(\gamma_n)^{p\beta}}{\beta} L^p_f(a, r).$$

Тогда из определения величин $A(a)$ и $Q^p_{p,f}(a)$ (формулы (6) и (2)) получаем неравенство

$$A(a) \leq \varlimsup_{p\to 0} \frac{\beta}{(\gamma_n)^{p\beta}} = \beta,$$

из которого вытекает необходимая оценка. Теорема 2 доказана.

Замечание. В связи с оценками индекса в теореме 2 следует отметить, что другой подход к вычислению топологического индекса отображений с ограниченным искажением указан Ю. Г. Решетняком в [4], суть которого заключается в том, что значение индекса с точностью до множителя $n\omega_n$ равно потоку функции $\ln|f(x) - f(a)|$ в специальном конденсаторе. Эту формулу можно рассматривать как обобщение принципа аргумента для аналитических функций.

Характеристика $A(a)$ и достаточное условие для точки ветвления отображения

Для неоднородной гомотетии $f(x) = |x|^{K-1}x$, $K > 0$, имеем равенство $A(0) = K$. Однако для аналитических функций комплексного переменного эта числовая характеристика принимает только натуральные значения. В тех точках a, где отображение дифференцируемо и невырожденно, будет $A(a) = 1$. Это равенство может выполняться и в точках ветвления отображения. Например, закручивание вокруг оси $f(x, y, z) = (r\cos 2\varphi, r\sin 2\varphi, z)$, где r, φ — полярные координаты, показывает, что $A(0) = 1$. На самом деле эта характеристика определяет порядок корня, а не его кратность.

Определение 3. Число $A(a)$ называется *порядком корня* a в уравнении $f(x) = f(a)$.

Такое определение порядка обусловлено тем, что до сих пор не известно, возможно ли для отображения с ограниченным искажением разложение $|f(x) - f(a)| = m_a(x)|x - a|^{\beta(a)}$ в окрестности точки a, где $0 < m_a \le m_a(x) \le M_a < \infty$ и $\beta(a) > 0$? Для квазиконформных отображений, удовлетворяющих такому разложению, при $\beta \ne 1$ можно дать нетривиальные оценки внешнего и внутреннего коэффициентов квазиконформности снизу (см. следствие 3).

Следующая лемма показывает границы изменения порядка.

Лемма 4. *Для непостоянного отображения с ограниченным искажением порядок отображения в точке a удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{1}{K_0(f)} \le A(a) \le (K_0(f)j(a, f))^{\frac{1}{n-1}}.$$

Доказательство. Предположим, что $A(a) < \frac{1}{K_0(f)}$. Тогда из теоремы 2 выводим неравенства

$$1 \le j(a, f) < \frac{K_1(f)}{K_0^{n-1}(f)} \le 1.$$

Противоречие. Оценка сверху установлена при доказательстве теоремы 2. Лемма доказана.

Дополнительная информация о внутреннем коэффициенте квазиконформности и порядке корня позволяет выяснить кратность корня (топологический индекс).

В качестве следствий теоремы 2 очевидным образом получаются достаточные условия для точек ветвления отображений с ограниченным искажением.

Теорема 3. *Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, — отображение с ограниченным искажением. Если $A(a) > K_1(f)$, то точка a является точкой ветвления отображения f. Если*

$$\frac{1}{K_0(f)} \le A(a) < \left(\frac{2}{K_1(f)}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

то в некоторой окрестности точки a отображение f взаимно-однозначно.

Доказательство. Так как внутренний и внешний коэффициенты связаны неравенством $K_0(f) \le K_1^{n-1}(f)$, то при выполнении условия $A(a) > K_1(f)$ из теоремы 2 для топологического индекса следует оценка $1 < j(a, f)$. Поэтому в любой окрестности точки a отображение f взаимно-однозначным не является.

Если $A(a) < \left(\frac{2}{K_1(f)}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, то в данной ситуации, оценивая индекс сверху, из теоремы 2 имеем неравенство $j(a,f) < 2$. Поэтому $j(a,f) = 1$. Отсюда заключаем, что отображение f взаимно-однозначно в некоторой окрестности точки a. Теорема доказана.

Замечание. Если $K_1(f) \geq \sqrt[n]{2}$, то для значений порядка из промежутка $[(2/K_1(f))^{\frac{1}{n-1}}, K_1(f)]$ можно указать отображения с ограниченным искажением, которые имеют точки ветвления.

Следствие 3. *Пусть квазиконформное отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, допускает разложение $|f(x) - f(a)| = m_a(x)|x - a|^{\beta(a)}$ в окрестности точки a, где $0 < m_a \leq m_a(x) \leq M_a < \infty$ и $\beta(a) > 0$. Если $0 < \beta(a) < 1$, то $K_1 \geq \frac{1}{\beta^{n-1}(a)}$, $K_0 \geq \frac{1}{\beta(a)}$. Если $\beta(a) > 1$, то $K_0 \geq \beta^{n-1}(a)$, $K_1 \geq \beta(a)$.*

Доказательство. Эти оценки можно непосредственно получить из лемм 1 и 3, учитывая, что $j(a,f) = 1$ и $K_0(f) \leq K_1^{n-1}(f)$.

Замечание. Оценки сверху для некоторых отображений такого вида приведены в [1, теорема 5.1].

Теорема 4. *Пусть $f : U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция. Если $A(a) < 2$, то данное отображение взаимно-однозначно в некоторой окрестности точки a. Если $A(a) \geq 2$, то a является точкой ветвления отображения f.*

Доказательство. Так как для аналитической функции $K_0(f) = K_1(f) = 1$, то из теоремы 2 имеем равенство $j(a,f) = A(a)$, которое и доказывает требуемое утверждение.

Впрочем, в истинности следствия 2 можно убедиться, используя обычное разложение в ряд Тейлора.

Нижние и верхние оценки топологического индекса и достаточные условия для точек ветвления

Кроме теоремы 3, достаточные условия для точек ветвления отображения можно легко описать, применяя так называемые плотности отображения в точке и величину

$$L = L_f(a,r) = \max_{|\mu - a| = r} |f(\mu) - f(a)|, \tag{8}$$

которую естественно рассматривать как радиус зацепления образа шара $B(a,r)$ при отображении f.

Определение 4. Величины

$$P(a) = \varlimsup_{r \to 0} \frac{\int\limits_{B(a,r)} |\det f'(x)|\, dx}{\sigma_n L_f^n(a,r)}, \quad p(a) = \varliminf_{r \to 0} \frac{\int\limits_{B(a,r)} |\det f'(x)|\, dx}{\sigma_n L_f^n(a,r)}$$

называются соответственно *верхней* и *нижней плотностями отображения f в точке a*.

Теорема 5. *Пусть непрерывное отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, где U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, сохраняет ориентацию, принадлежит классу $W^1_{n,\mathrm{loc}}(U)$, является открытым, изолированным, обладает N-свойством и* *дифференцируемо почти всюду. Если $P(a) > 1$, то a является точкой ветвления отображения f, причем $j(a, f) \geq P(a)$.*

Доказательство. Пусть число $r_0 > 0$ таково, что $f(x) \neq f(a)$ для всех $x \in B(a, r_0)$. Пусть $\overline{B} = \overline{B}(a, r)$, где $r < r_0$ и $f(\overline{B}) = \overline{C}$. Если $\mu = \mu(y, f, \overline{C})$ — степень отображения (определение и свойства см. в [4, с. 40; 7]), по формуле замены переменной (см. [7]) имеем

$$\int\limits_{\overline{B}} \det f'(x)\, dx = \int\limits_{f(\overline{B})} \mu(y, f, \overline{C})\, dy. \tag{9}$$

Так как степень отображения (см. [4]) постоянна на каждой связной компоненте множества $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\overline{C})$, для каждой точки $y \in C$ получаем равенства $\mu(y, f, \overline{C}) = \mu(f(a), f, \overline{C}) = j(a, f)$, из которых в силу (9) и (8) вытекает утверждение теоремы, поскольку $C \subset B(f(a), L)$. Действительно, имея соотношения

$$\int\limits_{\overline{B}} \det f'(x)\, dx = \int\limits_{f(\overline{B})} j(a, f)\, dy \leq j(a, f)\sigma_n L_f^n(a, r),$$

из определения плотности выводим необходимую оценку для индекса $j(a, f) \geq P(a)$. Теорема доказана.

Прежде чем дать некоторые следствия, определим локальное наименьшее искажение. Обозначим через $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x), \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ длины полуосей эллипсоида, который является образом единичной сферы при линейном отображении с матрицей Якоби $f'(x)$.

Длина наименьшей полуоси $\lambda_1(x)$ называется *наименьшим искажением отображения f в точке x*. Ясно, что

$$\lambda_1(x) = \min_{|\mu|=1,\, \mu \in \mathbb{R}^n} |f'(x)\mu| = \|(f'(x))^{-1}\|$$

в точках невырожденности и $\lambda_1(x)\lambda_2(x)\dots\lambda_n(x) = |\det f'(x)|$. Поэтому в пространствах размерностей не меньше трех для неконформных отображений с неотрицательным якобианом имеет место строгое неравенство

$$\int\limits_{\overline{B}} \det f'(x)\, dx > \int\limits_{\overline{B}} \lambda_1^n(x)\, dx.$$

Отсюда выводим

Следствие 4. *Пусть непрерывное отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, где U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, сохраняет ориентацию, принадлежит классу $W^1_{n,\mathrm{loc}}(U)$, является открытым изолированным отображением, обладает N-свойством и дифференцируемо почти всюду. Если для некоторой убывающей сходящейся к нулю последовательности $(r_k)_{k=1,2,\dots}$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_{B(a, r_k)} \lambda_1^n(x)\, dx \geq \sigma_n L_f^n(a, r_k)$$

и отображение f неконформно в любой окрестности точки a, то эта точка будет точкой ветвления отображения f.

Следствие 5. *Пусть отображение с ограниченным искажением* $f : U \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *где* U — *открытое множество в пространстве* $\mathbb{R}^n$, *таково, что при всех положительных значениях* $r < r_0$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{B(a,r)} \lambda_1^n(x)\,dx \leq \sigma_n L_f^n(a,r)$$

и

$$\lim_{r\to 0} \frac{L_f(a,r)}{l_f(a,r)} = 1.$$

Тогда топологический индекс удовлетворяет оценке $j(a,f) \leq K_1(f)$.

Доказательство. Утверждение следует из неравенств

$$j(a,f) \leq \frac{\int\limits_{B(a,r)} \det f'(x)\,dx}{\sigma_n l_f^n(a,r)} \leq K_1(f)\frac{\int\limits_{B(a,r)} \lambda_1^n(x)\,dx}{\sigma_n l_f^n(a,r)} \leq K_1(f)\frac{L_f^n(a,r)}{l_f^n(a,r)}.$$

Следствие доказано.

Рассмотрим ситуацию, когда плотности отображения в точке не превосходят единицы. Тогда теорема 1 и следствие 2 из нее допускают существенное усиление.

Теорема 6. *Пусть* $f : U \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — *отображение с ограниченным искажением такое, что для всех значений* $r \in (0, r_0)$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{B(a,r)} \det f'(x)\,dx \leq \sigma_n L_f^n(a,r). \tag{10}$$

Тогда топологический индекс удовлетворяет неравенству

$$j(a,f) \leq \max\bigl\{K_1(f), Q_{n,f}^n(a)\bigr\}.$$

В частности, если $K_1(f) < 2$ *и* $Q_n^n(f) < 2$, *то отображение* f *локально гомеоморфно.*

Доказательство. Возьмем число $r_0 > 0$ из доказательства теоремы 5. Тогда из равенства (9) выводим оценку

$$\int\limits_{\overline{B}} \det f'(x)\,dx = \int\limits_{f(\overline{B})} j(a,f)\,dy \geq j(a,f)\sigma_n l_f^n(a,r). \tag{11}$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть неравенство

$$\int\limits_{B(a,r)} \det f'(x)\,dx \leq \sigma_n [j(a,f)]^{\frac{n-2}{n-1}} (K_1(f))^{\frac{1}{n-1}} l_f^n(a,r) \tag{12}$$

выполняется для некоторого $r \in (0, r_0)$. Тогда из (11) и (12) заключаем, что $j(a,f) \leq K_1(f)$.

2. Пусть для всех $r \in (0, r_0)$ в (12) имеет место противоположное неравенство

$$\sigma_n [j(a,f)]^{\frac{n-2}{n-1}} (K_1(f))^{\frac{1}{n-1}} l_f^n(a,r) < \int\limits_{B(a,r)} \det f'(x)\,dx. \tag{13}$$

Тогда в силу (2) из неравенств (10) и (13) выводим оценки

$$\sigma_n [j(a,f)]^{\frac{n-2}{n-1}} (K_1(f))^{\frac{1}{n-1}} l_f^n(a,r) < \int\limits_{B(a,r)} \det f'(x)\,dx$$

$$\leq \sigma_n L_f^n(a,r) \leq \sigma_n \left((Q_{n,f}(a)+\varepsilon)^n \int\limits_0^r \frac{l_f^n(a,t)}{t}\,dt \right), \quad (14)$$

которые выполняются при любом фиксированном положительном значении ε и всех достаточно малых значениях r. Пусть

$$\gamma = \left(\frac{Q_{n,f}(a)+\varepsilon}{[j(a,f)]^{\frac{n-2}{n(n-1)}} (K_1(f))^{\frac{1}{n(n-1)}}} \right)^n, \quad \psi(r) = \int\limits_0^r \frac{l_f^n(a,t)\,dt}{t},$$
$$p = n, \quad \alpha = \left(\frac{j(a,f)}{K_1(f)} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (15)$$

Тогда неравенство (14) можно переписать в таком виде: $r\psi'(r) \leq \gamma n \psi(r)$. Из лемм 1 и 2 выводим оценку $\alpha \leq \gamma$. Отсюда получаем требуемое неравенство $j(a,f) \leq Q_{n,f}^n(a)$. Оценка теоремы доказана. Из определения 2 следует, что $j(a,f) = 1$, если $K_1(f) < 2$ и $Q_n^n < 2$.

Дополнением к следствию 4 теоремы 5 является следующее простое утверждение.

Теорема 7. *Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — отображение с ограниченным искажением. Если для всех значений $r \in (0, r_0)$ выполняется неравенство*

$$\sigma_n K_0(f) L_f^n(a,r) < \int\limits_{B(a,r)} ||f'(x)||^n\,dx,$$

где $K_0(f)$ — внешний коэффициент квазиконформности и r_0 — некоторое число, то a является точкой ветвления отображения f.

Доказательство. Утверждение следует из неравенства

$$\|f'(x)\|^n \leq K_0(f) \det f'(x).$$

Суммируемость якобианов отображений и кратность накрытия отображения

Пусть непрерывное дифференцируемое почти всюду отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, где U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$, $p \geq 1$, является изолированным открытым отображением, имеет локально суммируемый неотрицательный почти всюду якобиан. Совокупность этих отображений обозначим символом $D_p(U)$.

Для фиксированного показателя $\nu > 0$ полагаем

$$\delta(\nu, f, Q) = \frac{r^\nu}{L^\nu_{f,Q}(a,r)|Q|} \int\limits_Q J_f^{\nu/n}(x)\,dx, \quad (16)$$

где $L_{f,Q}(a,r) = \max\limits_{x \in Q} |f(x) - f(a)|$, $J_f(x) = \det f'(x)$. Пусть

$$\Delta_{\nu,f} = \inf\{\delta(\nu,f,Q) : Q = Q(a,r) \subset U\}, \quad (17)$$

$$\Delta^{\nu,f} = \sup\{\delta(\nu, f, Q) : Q = Q(a,r) \subset U\}. \tag{18}$$

Характеристики $\Delta_{\nu,f}$, $\Delta^{\nu,f}$ являются важными характеристиками отображения. При положительном значении первой мы имеем более высокую степень суммируемости якобиана отображения. Впервые это отмечено Ф. Герингом в [10]. С помощью второй характеристики можно показать отсутствие взаимной однозначности отображения в области U.

Имеем $\delta(\nu, f, Q(a,r)) = \delta(\nu, g, Q(0,1))$, где $g(x) = \frac{f(a+rx)-f(a)}{L_{f,Q(a,r)}}$, поэтому указанную величину можно рассматривать как связующее звено между локальными и глобальными свойствами отображения.

Теорема 8. *Пусть отображение $f \in D_1(U)$ обладает N-свойством и $\Delta_{\nu,f} > 0$. Если степень отображения f ограничена постоянной m, то на каждом замкнутом кубе $Q \subset U$ якобиан суммируем в степени*

$$r < 1 + \frac{\nu(n-\nu)}{4^{n+1}n^2m}\Delta_{\nu,f}^{n/\nu} = 1 + \frac{\nu}{n}c.$$

При этом

$$\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q J_f^r(x)\,dx \le \frac{c\nu}{c\nu + n - nr}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q J_f(x)\,dx\right)^r.$$

Доказательство. Утверждение является прямым следствием леммы 3 из [10]. Из формулы замены переменной и (17) выводим неравенства

$$\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q J_f(x)\,dx = \frac{1}{|Q|}\int\limits_{f(Q)} \mu(y,f,Q)\,dy \le \frac{mL^n_{f,Q}(a,r)}{2^n r^n}$$
$$\le 2^{-n}m\Delta_{\nu,f}^{n/\nu}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q J_f^{\nu/n}(x)\,dx\right)^{n/\nu}.$$

Пусть $q = n/\nu$, $h = J_f^{\nu/n}$, $b = 2^{-n}m\Delta_{\nu,f}^{n/\nu}$ — постоянные леммы 3 из [10]. Тогда функция h суммируема на кубе в любой степени $t < q + \frac{q-1}{2^{n+2}qb}$ с соответствующей оценкой интеграла. Следовательно, якобиан суммируем в степени $r = \frac{\nu t}{n}$ и имеет место указанная оценка. Теорема доказана.

Замечание 1. Очевидно, что $\nu = n/2$ — оптимальное значение.

Замечание 2. Пусть $f \in D_1(U)$ обладает N-свойством, $\Delta_{\nu,f} > 0$ и с некоторой интегрируемой функцией $K = K(x)$ почти всюду выполняется неравенство $\|f'(x)\|^n \le K(x)J_f(x)$. Тогда при минимальных требованиях на интегрируемость функции $K = K(x)$ можно обеспечить принадлежность отображения соболевскому классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$ с показателем $p > 1$.

Теорема 9. *Пусть отображение $f \in D_1(U)$ обладает N-свойством и $\Delta^{\nu,f} > \sigma_n^{\nu/n}2^{-\nu}$ при некотором ν, $0 < \nu \le n$. Тогда отображение f не является взаимно-однозначным в области U.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть при условии $\Delta^{\nu,f} > \sigma_n^{\nu/n}2^{-\nu}$ для некоторого куба Q выполняется неравенство $\sigma_n 2^{-n} < \delta^{n/\nu}(\nu, f, Q)$ (см. (16) и (18)). Функция $\delta(t) = (\delta(t,f,Q))^{1/t}$ возрастает на промежутке $(0, n]$ в силу неравенства Гёльдера. Поэтому из оценки $\sigma_n 2^{-n} < \delta^n(n)$ и равенства

$|Q| = 2^n r^n$ выводим $\sigma_n L^n_{f,Q}(a,r) < \int\limits_Q J_f(x)\,dx$. По формуле замены переменной для взаимно-однозначного отображения легко устанавливается противоположное неравенство, поскольку $f(Q) \subset B(f(a), L_{f,Q})$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 10. *Пусть отображение $f \in D_p(U)$, $p > 1$, обладает N-свойством и с некоторой постоянной b на любом кубе $Q \subset U$ выполняется неравенство*

$$\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q J_f^p(x)\,dx \le b\biggl(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q J_f(x)\,dx\biggr)^p.$$

Если $\Delta^{pn,f} > b\bigl(\frac{\sigma_n}{2^n}\bigr)^p$, где σ_n — объем единичного шара, то отображение f не является взаимно-однозначным в области U. Более того, существует компактная область $G \subset U$, относительно которой степень отображения принимает значения, большие чем $\frac{2^{np}\Delta^{np,f}}{b\sigma_n^p}$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 9.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Геринг Ф., Вяйсяля Ю.* Коэффициенты квазиконформности пространственных областей // Математика. 1966. Т. 10, № 6. С. 60–120.
2. *Ahlfors L.* A somewhat new approach to quasiconformal mappings in R^n // Lecture Notes in Math. V. 599. Berlin: Springer-Verl., 1977. P. 1–6.
3. *Семенов В. И.* Условие ограниченности топологического индекса отображения как условие квазиконформности // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 938–946.
4. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
5. *Решетняк Ю. Г.* Локальная структура отображений с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 6. С. 1333–1339.
6. *Семенов В. И.* Оценки топологического индекса отображений с суммируемым якобианом // Тр. конф. по геометрии и анализу, август-сентябрь 1999 г. Новосибирск: Институт математики, 2000. С. 505–513.
7. *Rado T., Reichelderfer P.* Continuous transformations in analysis with an introduction to algebraic topology. Berlin; Gottingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1955.
8. *Väisälä Ju.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Lecture Notes in Math.; 229).
9. *Семенов В. И.* Радиус накрытия отображения и кратность накрытия // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 196–201.
10. *Gehring F.* The L_p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. 1973. V. 130. P. 265–277.

Статья поступила 7 декабря 2000 г.

Семенов Владимир Иосифович
Кузбасский гос. технический университет, кафедра прикладной математики,
ул. Весенняя, 28, Кемерово 650026
semvi@.kuzstu.ac.ru