Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 517.957

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ДВУМЕРНЫМИ АБЕЛЕВЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ

А. Е. Миронов

Аннотация: Указаны гладкие вещественные коммутирующие дифференциальные операторы, собственные числа и собственные функции которых параметризуются главно поляризованными абелевыми многообразиями. Ил. 1, библиогр. 11.

1. Введение

В работе [1] А. Накаяшики построил коммутативные кольца $g! \times g!$-матричных дифференциальных операторов по g переменным (см. также [2]). Совместные собственные вектор-функции и собственные числа этих операторов параметризуются точками главно поляризованного абелева многообразия размерности g с несингулярным тэта-дивизором. Каждый оператор отвечает некоторой мероморфной функции (спектральной функции) на абелевом многообразии с полюсом на тэта-дивизоре. В дальнейшем эти операторы будем называть *операторами Накаяшики.*

В [3] получены явные формулы для операторов Накаяшики при $g = 2$. Здесь, используя эти формулы, мы укажем гладкие вещественные операторы.

Основные результаты этой работы — теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *При $g = 2$ не существует операторов Накаяшики с гладкими вещественными двояко-периодическими коэффициентами, но существуют операторы Накаяшики с вещественными сингулярными двояко-периодическими коэффициентами.*

Эта теорема является аналогом теоремы Фельдмана, Кноррера и Трубовитца [4], которые показали, что двумерный оператор Шредингера без магнитного поля с гладким двояко-периодическим вещественным потенциалом может быть конечнозонным только на одном уровне энергии, т. е. блоховские функции (собственные для оператора Шредингера и для операторов сдвига на периоды) могут параметризоваться римановой поверхностью конечного рода только при одном значении энергии. Теорема 1 означает, что не существует гладких вещественных конечнозонных на любом уровне энергии операторов Накаяшики. Тем не менее существуют вещественные конечнозонные на любом уровне энергии операторы Накаяшики с сингулярными коэффициентами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00–01–00915, 00–15–99252 и 01–01–06017).

Возьмем в качестве абелева многообразия многообразие Якоби римановой поверхности рода 2 с вещественными точками ветвления. В этом случае симметричная матрица периодов Ω базисных абелевых дифференциалов имеет чисто мнимые компоненты [5]. Введем операторы магнитных трансляций T_1^* и T_2^*:

$$T_1^*\varphi(y) = \varphi(y+e_1)\exp(2\pi y_1), \quad T_2^*\varphi(y) = \varphi(y+e_2)\exp(2\pi y_2),$$

где $y=(y_1,y_2)$, e_j — j-я строка мнимой части матрицы периодов Ω. Операторы магнитных трансляций отличаются от операторов сдвига только экспоненциальной подкруткой. Аргументы экспонент в операторах магнитных трансляций выбираются так, чтобы выполнялось равенство $A_i(y+e_j)-A_i(y)=2\pi\delta_{ij}$, где (A_1,A_2) — вектор-потенциал магнитного поля [6], тогда T_j^* коммутируют с операторами ковариантных производных $\partial_{y_i}-A_i$. Операторы T_1^* и T_2^* коммутируют между собой. Это является следствием того, что в нашем случае магнитный поток через элементарную ячейку, образованную векторами e_1, e_2, равен 0. В общем случае справедливо равенство $T_1^*T_2^* = T_2^*T_1^*\exp(ie\Phi)$, где e — заряд, Φ — магнитный поток [6] и операторы T_1^* и T_2^* коммутируют, если величина $\frac{e\Phi}{2\pi}$ целочисленна.

Собственная вектор-функция для матричного дифференциального оператора называется *магнитно-блоховской*, если ее компоненты являются собственными функциями для операторов магнитных трансляций. Через $\theta(z)$, где $z=(z_1,z_2)$, будем обозначать тэта-функцию абелева многообразия $\mathbb{C}^2/\{\mathbb{Z}^2+\Omega\mathbb{Z}^2\}$.

Теорема 2. *Существуют операторы Накаяшики с гладкими вещественными коэффициентами. По диагонали оператора H, отвечающего функции $\partial_{z_1}^2\ln\theta(z)+\partial_{z_2}^2\ln\theta(z)$, стоят операторы Шредингера вида*

$$H_{11} = (\partial_{y_1}-A_1)^2+(\partial_{y_2}-A_2)^2+u(y), \quad H_{22} = (\partial_{y_1}-\widetilde{A}_1)^2+(\partial_{y_2}-\widetilde{A}_2)^2+\tilde{u}(y)$$

с двояко-периодическими магнитными полями $\mathrm{rot}(A_1,A_2,0)$, $\mathrm{rot}(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,0)$ *и с двояко-периодическими потенциалами*

$$u(y+e_j)=u(y), \quad \tilde{u}(y+e_j)=\tilde{u}(y).$$

Компоненты вектор-потенциалов удовлетворяют равенствам

$$A_i(y+e_j)-A_i(y) = \widetilde{A}_i(y+e_j)-\widetilde{A}_i(y) = 2\pi\delta_{ij}.$$

Магнитно-блоховские функции оператора H на каждом уровне энергии параметризуются римановыми поверхностями конечного рода. Компоненты оператора H коммутируют с операторами T_1^* и T_2^*.

Мы также укажем операторы Накаяшики, которые принимают наиболее простой вид. Например, операторы L и L_1, отвечающие функциям $\partial_{z_1}^2\ln\theta(z)$ и $\partial_{z_1}\partial_{z_2}\ln\theta(z)$, выглядят следующим образом.

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$L = \begin{pmatrix} -\partial_{x_1}^2+c_1\partial_{x_2}+U & W \\ \frac{V}{c_2}(-\partial_{x_1}^2+c_1\partial_{x_2}+U-c_3) & -\partial_{x_1}^2-c_1\partial_{x_2}+\widetilde{U}+\frac{WV}{c_2} \end{pmatrix},$$

где

$$U = \partial_{x_1}^2\ln V+(\partial_{x_1}\ln V+c_4)^2-c_1(\partial_{x_2}\ln V+c_5)+c_3,$$

$$\widetilde{U} = \partial_{x_1}^2\ln W+(\partial_{x_1}\ln W-c_4)^2+c_1(\partial_{x_2}\ln W-c_5)+c_3,$$

и

$$L_1 = \begin{pmatrix} -\partial_{x_1}\partial_{x_2} + U_2\partial_{x_1} + c_6\partial_{x_2} + U_1 & W_1 \\ \frac{V_1}{c_2}(-\partial_{x_1}^2 + c_1\partial_{x_2} + U - c_3) & -\partial_{x_1}\partial_{x_2} + \widetilde{U}_2\partial_{x_1} - c_6\partial_{x_2} + \widetilde{U}_1 + \frac{WV_1}{c_2} \end{pmatrix},$$

где

$$U_1 = \partial_{x_1}\partial_{x_2}\ln V + (\partial_{x_1}\ln V + c_4)(\partial_{x_2}\ln V + c_5) - U_2(\partial_{x_1}\ln V + c_4) - c_6\partial_{x_2}\ln V + c_7,$$

$$\widetilde{U}_1 = \partial_{x_1}\partial_{x_2}\ln W + (\partial_{x_1}\ln W - c_4)(\partial_{x_2}\ln W - c_5) - \widetilde{U}_2(\partial_{x_1}\ln W - c_4) + c_6\partial_{x_2}\ln W + c_7,$$

$$W_1 = \frac{c_6}{c_1}W - \frac{1}{2c_1}\partial_{x_1}W, \quad V_1 = \frac{c_6}{c_1}V + \frac{1}{2c_1}\partial_{x_1}V,$$

$$U_2 = \frac{1}{2c_1}(U + c_8), \quad \widetilde{U}_2 = -\frac{1}{2c_1}(\widetilde{U} + c_8),$$

c_j *— некоторые константы* (*указанные в формулах* (15)–(18)).

Отметим, что коэффициенты при ∂_{x_2} в 11- и 22-компонентах этих операторов являются константами, коэффициенты при ∂_{x_1} в операторе L равны 0. При этом все коэффициенты операторов L и L_1 рационально выражаются через коэффициенты V и W и их производные. Аналогичных соотношений между коэффициентами операторов из [3] не существует.

Мы укажем частные решения системы нелинейных уравнений $[L, L_1] = 0$ на V и W. Решения задаются формулами (8), (9).

Теорема 3. *Коэффициенты операторов Накаяшики рационально выражаются через коэффициенты V и W оператора L и их производные.*

Отметим, что 11-компоненты операторов коммутируют по модулю оператора теплопроводности (лемма 8), т. е. для любых двух 11-компонент A и B существует оператор C такой, что

$$[A, B] = C\bigl(-\partial_{x_1}^2 + c_1\partial_{x_2} + U - c_3\bigr).$$

Коэффициенты операторов Накаяшики не могут удовлетворять эволюционным уравнениям типа иерархии Кадомцева — Петвиашвили (КП)

$$[\partial_{t_n} - L_n, \partial_{t_m} - L_m] = 0.$$

Действительно, пространственным переменным соответствуют g линейно независимых прямолинейных обмоток на g-мерном торе. Временным переменным также должны соответствовать прямолинейные обмотки на торе, при этом они являются линейными комбинациями пространственных обмоток, так как размерность тора совпадает с числом пространственных переменных. Следовательно, производные коэффициентов операторов по времени линейно выражаются через производные по пространственным переменным и «эволюционные» уравнения заменой переменных сводятся к уравнениям коммутации операторов Накаяшики. В частном случае при $g = 1$ конечнозонные решения иерархии КП (так называемые стационарные решения) не являются содержательными, поскольку заменой дифференцирования по времени дифференцированием по пространственной переменной уравнения иерархии сводятся к уравнениям коммутации операторов $[L_n, L_m] = 0$.

Покажем, что конструкция, предложенная Накаяшики [1], не приводит к эволюционным уравнениям. Далее все обозначения до разд. 2 взяты из [1]. Введем две функции

$$\varphi_1 = \frac{\theta(z + (c' - x'd' - x_0, x'))}{\theta(z)}\exp,$$

$$\varphi_2 = \frac{\theta(z + (c' - x'd' - x_0, x') + c'')\theta(z - c'')}{\theta^2(z)} \exp, \quad c'' \in \mathbb{C}^2, c'' \notin \mathbb{Z}^2 + \Omega\mathbb{Z}^2,$$

$$\exp = \exp\left(\sum_{i=0}^{1}\sum_{n\geq\delta_{i0}} t_{n,(i)}\frac{(-1)^n}{n!}(u_{n,(i)}(z) + d_i(1-\delta_{i0})u_{n+1,(0)}(z))\right),$$

где x' и x_0 — пространственные переменные, $u_{n,(i)}$ — производные от логарифма тэта-функции, $c', d_i, \delta_{i,0}$ — константы, $x_0 = t_{1,(0)}, x' = t_{0,(1)}$. Эти функции задают базис в свободном модуле B_{ct} над $\mathscr{D}_t$, где $\mathscr{D}_t$ — кольцо дифференциальных операторов по переменным x_0 и x' с аналитическими в окрестности 0 коэффициентами, зависящими от $t_{n,(i)}$. В [1] строится вложение ι $\mathscr{D}_t$-модуля B_{ct} в кольцо псевдодифференциальных операторов. Уравнения (6.8) из работы [1] имеют следующий вид:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t_\beta} + W_i\partial^\beta = \sum_{j=1}^{2} B_{i,\beta,j}W_j,$$

где $W_i = \iota(\varphi_i), B_{i,\beta,j} \in \mathscr{D}_t$. Отметим, что образ функции $\varphi \in B_{ct}$ при отображении ι зависит только от $\frac{\varphi}{\exp}$. Следовательно, операторы W_i не зависят от времени и $\frac{\partial W_i}{\partial t_\beta} = 0$. Значит, уравнения (6.8) в [1] не являются эволюционными.

В разд. 2 мы напомним конструкцию Накаяшики и докажем теоремы 1, 2.

В разд. 3 доказаны лемма 1 и теорема 3.

Автор благодарит И. А. Тайманова за постановку задачи, полезные обсуждения и замечания.

2. Гладкие вещественные операторы

В начале раздела мы напомним конструкцию Накаяшики построения модуля Бейкера — Ахиезера M_c. Затем будет доказана теорема 1. После этого мы введем гиперэллиптическую поверхность Γ рода 2 с вещественными точками ветвления и выберем на ней канонический базис циклов по схеме [5]. Далее введем четыре вещественных двумерных тора T_j, $1 \leq j \leq 4$, в X (в многообразии Якоби Γ). На этих торах тэта-функция принимает вещественные значения. В лемме 3 будет доказано, что тэта-функция не имеет нулей на торе T_1. В лемме 4 мы найдем точки пересечения тэта-дивизора и тэта-дивизора со сдвигом. Доказательство теоремы 2 заключается в проверке того, что коэффициенты операторов Накаяшики второго и третьего порядка, найденные в предложениях 1–3 из [3], с учетом сделанных в них ниже изменений являются вещественными и гладкими.

Обозначим через $X = \mathbb{C}^2/\{\mathbb{Z}^2 + \Omega\mathbb{Z}^2\}$ главно поляризованное комплексное абелево многообразие, где Ω — симметричная 2×2-матрица с $\operatorname{Im}\Omega > 0$. Тэта-функция определяется рядом

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} \exp(\pi i\langle\Omega n, n\rangle + 2\pi i\langle n, z\rangle), \quad z \in \mathbb{C}^2,$$

где $\langle n, z\rangle = n_1z_1 + n_2z_2$. Функция $\theta(z)$ обладает свойствами периодичности:

$$\theta(z + \Omega m + n) = \exp(-\pi i\langle\Omega m, m\rangle - 2\pi i\langle m, z\rangle)\theta(z), \quad m, n \in \mathbb{Z}^2.$$

Через $\mathscr{D}$ обозначим кольцо дифференциальных операторов $\mathscr{O}[\partial_{x_1}, \partial_{x_2}]$, где $\mathscr{O}$ — кольцо аналитических функций (от x) в окрестности $0 \in \mathbb{C}^2$. В [1] введен модуль Бейкера — Ахиезера M_c над $\mathscr{D}$, состоящий из функций вида

$$f(z, x)\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)).$$

Функция $f(z,x)$ мероморфна на $\mathbb{C}^2\times U_f$, U_f — некоторая окрестность $0\in\mathbb{C}^2$, с полюсом в тэта-дивизоре Θ (нули тэта-функции $\theta(z)$) и обладает свойством периодичности

$$f(z+\Omega m+n,x)=\exp(-2\pi i\langle m,c+x\rangle)f(z,x),\quad m,n\in\mathbb{Z}^2,\quad c=(c_1,c_2)\in\mathbb{C}^2.$$

В [1] доказана

Теорема Накаяшики. *Если Θ — неособое многообразие и $c\neq 0$, то M_c — свободный $\mathscr{D}$-модуль ранга 2.*

Зафиксируем базис $\Phi_c=(\phi_{1c}(z,x),\phi_{2c}(z,x))^\top$ в $\mathscr{D}$-модуле M_c. Обозначим через $\mathscr{A}_\Theta$ кольцо мероморфных функций на X с полюсом в Θ. Пусть $\lambda(z)\in\mathscr{A}_\Theta$. Так как M_c — свободный $\mathscr{D}$-модуль, существует единственный 2×2-матричный оператор $L_{\Phi_c}(\lambda)$ с компонентами из $\mathscr{D}$ такой, что

$$L_{\Phi_c}(\lambda)\Phi_c=\lambda\Phi_c, \tag{1}$$

где $\lambda\Phi_c=(\lambda\phi_{1c},\lambda\phi_{2c})^\top$. Так как $L_{\Phi_c}(\lambda)$ — дифференциальные операторы по переменным x_j, а λ зависит лишь от z, то из (1) следует условие коммутации

$$L_{\Phi_c}(\lambda\mu)=L_{\Phi_c}(\lambda)L_{\Phi_c}(\mu)=L_{\Phi_c}(\mu)L_{\Phi_c}(\lambda),$$

где $\mu(z)\in\mathscr{A}_\Theta$. Получили

Следствие [1]. *Существует вложение колец*

$$L_{\Phi_c}:\mathscr{A}_\Theta\to\mathrm{Mat}(2,\mathscr{D}),$$

где $\mathrm{Mat}(2,\mathscr{D})$ — кольцо 2×2-матричных дифференциальных операторов. Образ вложения является коммутативным кольцом дифференциальных операторов.

Далее мы предполагаем, что Θ — неособая риманова поверхность.

Доказательство теоремы 1. Докажем сначала вторую часть теоремы. Введем функции из M_c

$$\psi=\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)),$$

$$\psi_{c'}=\frac{\theta(z+c+c'+x)\theta(z-c')}{\theta^2(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)).$$

Они задают базис в $\mathscr{D}$-модуле M_c [3]. В [3] найдены операторы Накаяшики $L_{c,c'}(\mathscr{A}_\Theta)$ в этом базисе. Коэффициенты операторов $L_{c,c'}(\lambda)$ являются двоякопериодическими, причем коэффициенты всех компонент этого оператора имеют особенности в точке $x=-c$ [3]. Пусть X — многообразие Якоби римановой поверхности с вещественными точками ветвления. В этом случае справедливо равенство $\bar\theta(z)=\theta(\bar z)$ [5]. Пусть также $c,c'\in\mathbb{R}^2$, $\lambda(z)$ — вещественная функция при $z\in\mathbb{R}^2$ (например, $\lambda=\partial_{z_j}\partial_{z_i}\ln\theta(z)$). Вещественность операторов $L_{c,c'}(\lambda)$ немедленно вытекает из того, что собственная вектор-функция $(\psi,\psi_{c'})^\top$ оператора $L_{c,c'}(\lambda)$ вещественна при вещественном параметре z.

Перейдем к доказательству первой части теоремы. Прежде всего отметим, что $\mathscr{D}$-модуль M_0 не является свободным ранга 2. Это, например, следует из того, что $\partial_{x_j}\psi(z,0)=0$, значит, функцию вида $f(z,x)\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z))\in M_0$, где $f(z,x)$ имеет полюс второго порядка на тэта-дивизоре, вообще говоря, нельзя представить в виде $d_1\psi+d_2\psi_{c'}$ при $x=0$, где $d_1\in\mathscr{D}$

— оператор первого порядка, d_2 — оператор умножения на функцию, но это возможно сделать при $x \neq 0$.

Пусть X — многообразие Якоби римановой поверхности Γ, $L(\lambda)$ — оператор Накаяшики с двояко-периодическими коэффициентами с периодами, равными $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$, $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$ — собственная блоховская вектор-функция, компонентами которой являются элементы базиса $\mathscr{D}$-модуля M_c,

$$L(\lambda)\Psi = \lambda\Psi, \quad \Psi(z, x_1 + \tau_1, x_2) = -\partial_{z_1} \ln \theta(z)\tau_1\mu_1\Psi(z, x_1, x_2),$$

$$\Psi(z, x_1, x_2 + \tau_2) = -\partial_{z_2} \ln \theta(z)\tau_2\mu_2\Psi(z, x_1, x_2),$$

где $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$. Предположим, что у $L(\lambda)$ вещественные коэффициенты при $x \in \mathbb{R}^2$. Тогда X допускает антиголоморфную инволюцию τ такую, что

$$\overline{\Psi}(z, x) = \Psi(\tau(z), x), \quad \bar{\lambda}(z) = \lambda(\tau(z)).$$

При этом антиголоморфная инволюция τ оставляет тэта-дивизор на месте: $\tau(\Theta) = \Theta$, так как мультипликативные функции $\partial_{z_1} \ln \theta(z)$ и $\partial_{z_2} \ln \theta(z)$ имеют полюс на тэта-дивизоре. Следовательно, τ индуцирована антиголоморфной инволюцией на римановой поверхности Γ и совпадает с комплексным сопряжением. Тэта-дивизор неподвижен при τ, только когда Γ имеет вещественные точки ветвления [5].

Покажем, что $c \in \mathbb{R}^2$. Обозначим через A оператор перехода от базиса $\psi, \psi_{c'}$ к базису ψ_1, ψ_2. Из равенств $\Psi = A(\psi, \psi_{c'})^\top$, $\bar{\theta}(z) = \theta(\bar{z})$ и $\Psi(z + \Omega m, x) = \exp(-2\pi i\langle m,\ c\rangle)\Psi(z, x)$ вытекает, что $\overline{\Psi}(\overline{z + \Omega m}, x) = \exp(-2\pi i\langle m, \bar{c}\rangle)\overline{\Psi}(\bar{z}, x)$, а значит, из $\Psi(z, x) = \overline{\Psi}(\bar{z}, x)$ следует, что $c \in \mathbb{R}^2$.

Причина негладкости операторов в следующем. Заменим $x + c$ на x и разделим ψ_1 и ψ_2 на $\exp(-c_1\partial_{z_1} \ln \theta(z) - c_2\partial_{z_2} \ln \theta(z))$. Получим функции $\widetilde{\psi}_1$, $\widetilde{\psi}_2 \in M_0$. Так как $\mathscr{D}$-модуль M_0 не является свободным ранга 2, то равенство $\widetilde{L}(\lambda)\widetilde{\Psi} = \lambda\widetilde{\Psi}$, $\widetilde{\Psi} = (\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\psi}_2)^\top$, не выполняется в окрестности $x = 0$, следовательно, у коэффициентов оператора $\widetilde{L}(\lambda)$ имеются особенности в точке $x = 0$, а значит, и у коэффициентов оператора $L(\lambda)$ в точке $x = -c$ есть особенности. А именно, если коэффициенты операторов A и A^{-1} гладкие в точке $x = -c$, то из равенства $A^{-1}L(\lambda)A = L_{c,c'}(\lambda)$ [3] вытекает, что оператор $L(\lambda)$ негладкий в точке $x = -c$, если оператор A или оператор A^{-1} негладкий в точке $x = -c$, то негладкость оператора $L(\lambda)$ получается из равенства $L(\lambda) = AL_{c,c'}(\lambda)A^{-1}$ и из того, что все компоненты оператора $L_{c,c'}(\lambda)$ негладкие при $x = -c$. Теорема 1 доказана.

Обозначим через Γ гладкое пополнение римановой поверхности, заданной в (y, w)-плоскости уравнением $w^2 = P(y) = (y - y_1)\ldots(y - y_5)$ с вещественными $y_1 < \cdots < y_5$. Через X обозначим многообразие Якоби гиперэллиптической поверхности Γ. На Γ действуют голоморфная инволюция $\sigma : (y, w) \to (y, -w)$ с неподвижными точками $Q_i = (y_i, 0), i = 1, \ldots, 5, \infty$ и антиголоморфная инволюция $\tau : (y, w) \to (\bar{y}, \bar{w})$. Инволюция τ имеет три неподвижных цикла:

$$C_1 : \{y_1 \leq y \leq y_2, w = \pm\sqrt{P(y)}\}, \quad C_2 : \{y_3 \leq y \leq y_4, w = \pm\sqrt{P(y)}\},$$

$$C_3 : \{y_5 \leq y \leq \infty, w = \pm\sqrt{P(y)}\}.$$

Выберем канонический базис циклов a_1, a_2, b_1 и b_2 с индексами пересечений $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$, $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$, как показано на рис. 1 (многоточием обозначены части циклов, расположенные на «нижнем листе» римановой поверхности).

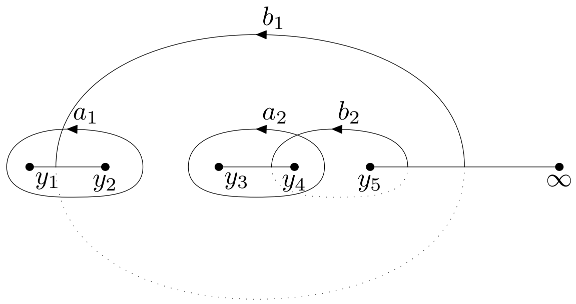

Рис. 1.

Объединение циклов C_1, C_2 и C_3 разбивает поверхность Γ на две непересекающиеся части.

Отметим, что $a_1 = C_1$, $a_2 = C_2$. Антиголоморфная и голоморфная инволюции действуют на эти циклы следующим образом:

$$\tau a_1 = a_1, \quad \tau a_2 = a_2, \quad \tau b_1 = -b_1, \quad \tau b_2 = -b_2,$$

$$\sigma a_1 = -a_1, \quad \sigma a_2 = -a_2, \quad \sigma b_1 = -b_1, \quad \sigma b_2 = -b_2,$$

Под равенством мы понимаем равенство в группе гомологий. На соответствующий канонический базис абелевых дифференциалов ω_1 и ω_2 такой, что

$$\int\limits_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}, \quad \int\limits_{b_j} \omega_i = \int\limits_{b_i} \omega_j = \Omega_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

инволюции τ и σ действуют следующим образом:

$$\tau^* \omega_i = \overline{\omega}_i, \quad \sigma^* \omega_i = -\omega_i. \tag{2}$$

Введем четыре вещественных тора в X:

$$T_1 : z \equiv i(t_1, t_2), \quad T_2 : z \equiv i(t_1, t_2) + \left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

$$T_3 : z \equiv i(t_1, t_2) + \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad T_4 : z \equiv i(t_1, t_2) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

где $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, знак $\equiv$ означает равенство с точностью до элемента решетки $\mathbb{Z}^2 + \Omega\mathbb{Z}^2$, матрица Ω составлена из компонент Ω_{ij}. Тэта-функция на этих торах вещественна.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$\int\limits_{\infty}^{Q_1} \omega \equiv \left(\frac{\Omega_{11}}{2}, \frac{\Omega_{12}}{2}\right), \quad \int\limits_{\infty}^{Q_2} \omega \equiv \left(\frac{1}{2} + \frac{\Omega_{11}}{2}, \frac{\Omega_{12}}{2}\right),$$

$$\int\limits_{\infty}^{Q_3} \omega \equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{\Omega_{21}}{2}, -\frac{\Omega_{22}}{2}\right), \quad \int\limits_{\infty}^{Q_4} \omega \equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{\Omega_{21}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\Omega_{22}}{2}\right), \quad \int\limits_{\infty}^{Q_5} \omega \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Доказательство. Соединим ∞ и Q_1 ориентированным путем l таким, что $l \cup -\sigma l = b_1$ ($-\sigma l$ означает, что у σl нужно сменить ориентацию), тогда

$$\int\limits_{l} \omega - \int\limits_{\sigma l} \omega = \int\limits_{b_1} \omega, \quad \int\limits_{l} \omega = \int\limits_{\sigma l} \sigma^* \omega = -\int\limits_{\sigma l} \omega,$$

следовательно,

$$\int_{\infty}^{Q_1} \omega = \frac{1}{2} \int_{b_1} \omega \equiv \left(\frac{\Omega_{11}}{2}, \frac{\Omega_{12}}{2}\right).$$

Аналогично показывается, что

$$\int_{Q_1}^{Q_2} \omega \equiv \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad \int_{Q_2}^{Q_3} \omega = \frac{1}{2} \int_{b_1 - b_2} \omega \equiv \left(\frac{\Omega_{11}}{2} - \frac{\Omega_{21}}{2}, \frac{\Omega_{12}}{2} - \frac{\Omega_{22}}{2}\right),$$

$$\int_{Q_3}^{Q_4} \omega = \frac{1}{2} \int_{a_2} \omega \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \int_{Q_4}^{Q_5} \omega = \frac{1}{2} \int_{b_2} \omega \equiv \left(\frac{\Omega_{21}}{2}, \frac{\Omega_{22}}{2}\right).$$

Лемма доказана.

Как показано в [7], вектор римановых констант при таком выборе канонического базиса циклов и ∞ в качестве начальной точки отображения Абеля равен

$$K \equiv \left(\frac{\Omega_{11}}{2} + \frac{\Omega_{12}}{2}, \frac{\Omega_{21}}{2} + \frac{\Omega_{22}}{2}\right) + \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Лемма 3. *На торе T_1 тэта-функция $\theta(z)$ не имеет нулей.*

Доказательство. Предположим, что z принадлежит тору T_1 и тэта-дивизору. Тогда $\bar{z} \equiv -z$ и по теореме Римана о нулях тэта-функции (см. [8]) $z \equiv A(P) + K$, где $A(P)$ — отображение Абеля с начальной точкой ∞. Из (2) и из того, что Ω является чисто мнимой матрицей, вытекают равенства

$$\bar{z} \equiv A(\tau(P)) - \left(\frac{\Omega_{11}}{2} + \frac{\Omega_{12}}{2}, \frac{\Omega_{21}}{2} + \frac{\Omega_{22}}{2}\right) + \left(1, \frac{1}{2}\right)$$
$$\equiv -z \equiv -A(P) - \left(\frac{\Omega_{11}}{2} + \frac{\Omega_{12}}{2}, \frac{\Omega_{21}}{2} + \frac{\Omega_{22}}{2}\right) - \left(1, \frac{1}{2}\right),$$

следовательно, $A(\tau(P)) + A(P) \equiv 0$. Это вместе с (2) дает равенство $\tau(P) = \sigma(P)$. Отсюда следует, что P является точкой ветвления, либо у P y-координата вещественная, а w-координата чисто мнимая. Эти точки образуют три цикла

$$B_1 : \{\infty \le y \le y_1,\ w = \pm\sqrt{P(y)}\}, \quad B_2 : \{y_2 \le y \le y_3,\ w = \pm\sqrt{P(y)}\},$$
$$B_3 : \{y_4 \le y \le y_5,\ w = \pm\sqrt{P(y)}\}.$$

Для точек этих циклов справедливы равенства

$$\overline{A(P)} \equiv A(\tau(P)) \equiv A(\sigma(P)) \equiv -A(P).$$

Отсюда вытекает, что

$$A(P) \equiv i(t_1, t_2) + \frac{(m, n)}{2}, \quad (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2,\ m, n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, у $A(P)$ не меняется вещественная часть при обходе по циклам B_j, $j = 1, 2, 3$. Так как $Q_1 \in B_1$, $Q_2 \in B_2$, $Q_5 \in B_3$, из леммы 2 вытекают включения $A(B_1) \subset T_1$, $A(B_2) \subset T_2$, $A(B_3) \subset T_4$, а значит, $z \equiv A(P) + K$ не может принадлежать T_1. Лемма доказана.

Пусть

$$c' \equiv \left(\frac{\Omega_{11}}{2} - \frac{\Omega_{21}}{2}, \frac{\Omega_{12}}{2} - \frac{\Omega_{22}}{2}\right).$$

Лемма 4. *Тэта-дивизор пересекается с римановой поверхностью, заданной в X уравнением $\theta(z-c')=0$, по двум точкам*

$$p_1 \equiv \left(\frac{\Omega_{12}}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\Omega_{22}}{2}+\frac{1}{2}\right), \quad p_2 \equiv \left(\frac{\Omega_{11}}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\Omega_{21}}{2}+\frac{1}{2}\right).$$

Доказательство. Точка z принадлежит тэта-дивизору, когда она имеет вид $z \equiv \int\limits_{\infty}^{P} \omega + K$, где $P \in \Gamma$. Следовательно, точки пересечения имеют вид

$$p_1 \equiv \int\limits_{\infty}^{P_1} \omega + K, \quad p_2 \equiv \int\limits_{\infty}^{P_2} \omega + K,$$

где P_1 и P_2 — нули функции $\theta\left(\int\limits_{\infty}^{P} \omega + K - c'\right)$ на Γ. Функция $\theta\left(\int\limits_{\infty}^{P} \omega + K - c'\right)$ не равна тождественно нулю на Γ (так как $K - c' \equiv (1, \frac{1}{2}) \not\equiv K$). Тогда по теореме Римана

$$\int\limits_{\infty}^{P_1} \omega + \int\limits_{\infty}^{P_2} \omega \equiv c'$$

и по c' точки P_1 и P_2 восстанавливаются однозначно (см., например, [7]). По лемме 2

$$\int\limits_{\infty}^{Q_2} \omega + \int\limits_{\infty}^{Q_3} \omega \equiv c',$$

следовательно,

$$p_1 \equiv \int\limits_{\infty}^{Q_2} \omega + K, \quad p_2 \equiv \int\limits_{\infty}^{Q_3} \omega + K.$$

Лемма доказана.

Далее мы предполагаем, что $c \in T_1$. В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений:

$$\theta_j(z) = \partial_{z_j}\theta(z), \quad \theta_{kj}(z) = \partial_{z_k}\partial_{z_j}\theta(z), \quad k,j = 1,2.$$

Доказательство теоремы 2. Для нахождения гладких вещественных операторов нам необходимо внести некоторые изменения в формулы из работы [3], в которой при доказательстве предложений 2 и 3 используется тот факт, что $\theta(\Delta) = 0$, где через Δ там обозначается вектор римановых констант. Другие свойства Δ при доказательстве этих предложений не используются. Все формулы для операторов Накаяшики из предложений 2 и 3 из [3] останутся верными, если заменить в них Δ на $p_3 = \int\limits_{\infty}^{P_3} \omega + K$, где P_3 — произвольная точка цикла B_2, отличная от Q_2 и Q_3, $\theta(p_3) = 0$, $p_3 \in T_4$. В предложении 2 из [3] при вычислении $[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j} \ln\theta(z))]_{12}$ мы положили $z = 0$. Формула останется верной, если положить $z = p_4$, где p_4 — произвольная точка из T_4 такая, что $\theta(p_4) \neq 0$. Тогда

$$[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j} \ln\theta(z))]_{12} = \frac{\theta^2(p_4)}{\theta(p_4+c+c'+x)\theta(c')}$$
$$\times \left(\partial_{z_k}\partial_{z_j} - f^{kj}_{c,c'}\partial_{z_1} - g^{kj}_{c,c'}\partial_{z_2} - h^{kj}_{c,c'} + 2\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z)\right)\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\right)\Bigg|_{z=p_4}.$$

Аналогично в предложении 3 в формуле для $g^j_{c,c'}$ мы вместо $z = 0$ полагаем $z = p_4$. В дальнейшем будем пользоваться именно этими формулами.

Константы $\theta_k(p_j)$ мнимые, функции $\partial_{x_k} \ln\theta(p_j + c + x)$ также чисто мнимые при $x \in i\mathbb{R}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, следовательно, функции $f^{kj}_{c,c'}$ и $g^{kj}_{c,c'}$ из предложения 2 в [3] являются чисто мнимыми, а $h^{kj}_{c,c'}$ вещественными, значит, операторы $[L_{c,c'}(\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z))]_{11}$ и $[L_{c,c'}(\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z))]_{12}$ вещественные. Числа α_{kj} и α из предложения 2 в [3] вещественны, так как функции $\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z)$, $\frac{\theta(z-c')\theta(z+c')}{\theta^2(z)}$ вещественны на торе T_1 и функции $\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z)$ линейно независимы (это следует, например, из теоремы Накаяшики, так как 11-коэффициенты операторов $L_{c,c'}(\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z))$ равны $\partial_{x_j}\partial_{x_k}$). Следовательно, операторы

$$[L_{c,c'}(\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z))]_{21}, \quad [L_{c,c'}(\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z))]_{22}$$

вещественные.

Так как коэффициенты операторов Накаяшики выражаются через тэта-функцию и ее производные и тэта-функция вещественна на торах T_1 и T_4, то из вещественности коэффициентов операторов при $x \in i\mathbb{R}^2$ будет следовать вещественность коэффициентов при $x \in i\mathbb{R}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Из предложения 3 в [3] получаем, что коэффициенты операторов Z_1 и Z_2 [2] чисто мнимые при $x \in i\mathbb{R}^2$, тогда из предложения 1 вытекает, что операторы $L_{c,c'}(i\partial_{z_s}\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z))$ вещественны при $x \in i\mathbb{R}^2$.

Для доказательства гладкости согласно предложениям 1, 2 и 3 из [3] с учетом выше сделанных в них изменений нужно показать, что функции $\theta(p_1+c+x)$, $\theta(p_2 + c + x)$, $\theta(p_3 + c + c' + x)$ и $\theta(p_4 + c' + c + x)$ не обращаются в нуль при $x \in i\mathbb{R}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Это следует из леммы 3.

Введем операторы магнитных трансляций $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$:

$$\widetilde{T}_1\varphi(x) = \varphi(x + \Omega_1)\exp(2\pi i x_1), \quad \widetilde{T}_2\varphi(x) = \varphi(x + \widetilde{\Omega}_2)\exp(2\pi i x_2),$$

где Ω_j — j-я строка матрицы Ω. Функции ψ и $\psi_{c'}$ являются магнитно-блоховскими:

$$\widetilde{T}_1\psi = \mu_1\psi, \quad \mu_1 = \exp(-\pi i\Omega_{11} - 2\pi i(z_1 + c_1) - \Omega_{11}\partial_{z_1} \ln\theta(z) - \Omega_{12}\partial_{z_2} \ln\theta(z)),$$

$$\widetilde{T}_2\psi = \mu_2\psi, \quad \mu_2 = \exp(-\pi i\Omega_{22} - 2\pi i(z_2 + c_2) - \Omega_{12}\partial_{z_1} \ln\theta(z) - \Omega_{22}\partial_{z_2} \ln\theta(z)),$$

$$\widetilde{T}_1\psi_{c'} = \mu_1 \exp(-2\pi i c'_1)\psi_{c'}, \quad \widetilde{T}_2\psi_{c'} = \mu_2 \exp(-2\pi i c'_2)\psi_{c'}.$$

Вместо функции $\psi_{c'}$ будем использовать функцию

$$\widetilde{\psi}_{c'} = \psi_{c'} \exp\left(2\pi i \left\langle x - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \Omega^{-1}c'\right\rangle\right),$$

тогда в силу симметричности Ω

$$\widetilde{T}_1\widetilde{\psi}_{c'} = \mu_1\widetilde{\psi}_{c'}, \quad \widetilde{T}_2\tilde{\psi}_{c'} = \mu_2\widetilde{\psi}_{c'}.$$

Операторы Накаяшики в базисе ψ, $\widetilde{\psi}_{c'}$ имеют вид $dL_{c,c'}(\lambda)d^{-1}$, d — диагональная матрица с диагональю $(1, \exp(2\pi i\langle x-(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \Omega^{-1}c'\rangle))$ [3], и являются гладкими вещественными при тех же условиях, что и операторы $L_{c,c'}(\lambda)$. Обозначим через H гладкий вещественный при $x \in i\mathbb{R}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ оператор $dL_{c,c'}(\partial^2_{z_1} \ln\theta(z) + \partial^2_{z_2} \ln\theta(z))d^{-1}$. Его 11-компонента имеет вид

$$H_{11} = (i\partial_{x_1} - A_1)^2 + (i\partial_{x_2} - A_2)^2 + u(x),$$

где [3]

$$A_1 = \frac{i}{2}\big(f^{11}_{c,c'} + f^{22}_{c,c'}\big), \quad A_2 = \frac{i}{2}\big(g^{11}_{c,c'} + g^{22}_{c,c'}\big).$$

Это оператор Шредингера в периодическом магнитном поле $\operatorname{rot}(A_1, A_2, 0)$. Для компонент вектор-потенциала (A_1, A_2) справедливы равенства

$$A_k(x + \Omega_j) - A_k(x) = 2\pi\delta_{kj}.$$

Операторы магнитных трансляций коммутируют с операторами ковариантных производных:

$$\widetilde{T}_j(i\partial_{x_k} - A_k) = (i\partial_{x_k} - A_k)\widetilde{T}_j.$$

Магнитно-блоховская функция ψ при $z \in \Gamma_{c'}$ удовлетворяет уравнению Шредингера с гамильтонианом H_{11} и с энергией $\partial^2_{z_1}\ln\theta(z) + \partial^2_{z_2}\ln\theta(z)$. Отсюда следует, что потенциал двояко-периодичен, т. е. $u(x + \Omega_1) = u(x + \Omega_2) = u(x)$, и оператор Шредингера коммутирует с операторами магнитных трансляций $\widetilde{T}_j H_{11} = H_{11}\widetilde{T}_j$. Компонента 12 оператора H является оператором умножения на двояко-периодическую функцию. Оператор H_{21} имеет вид $F(x)\widetilde{H}_{21}$, где F — двояко-периодическая функция, $\widetilde{H}_{21}$ — оператор второго порядка с постоянными коэффициентами при старших производных. Компонента 22 имеет вид

$$H_{22} = (i\partial_{x_1} - \widetilde{A}_1)^2 + (i\partial_{x_2} - \widetilde{A}_2)^2 + \tilde{u}(x).$$

У оператора H_{22} такие же свойства, как и у H_{11}. В частности, H_{22} коммутирует с операторами магнитных трансляций.

Магнитно-блоховские функции оператора H на уровне энергии λ параметризуются римановой поверхностью, заданной в X уравнением

$$\partial^2_{z_1}\ln\theta(z) + \partial^2_{z_2}\ln\theta(z) = \lambda.$$

Для завершения доказательства нужно сделать замену координат и учесть, что ∂_{x_k} — операторы комплексного дифференцирования, т. е. $\partial_{x_k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k})$.

Теорема 2 доказана.

3. Операторы Накаяшики

В начале раздела введем две римановых поверхности Γ_1 и Γ_2 рода 2, вложенные в двумерное абелево многообразие X. В лемме 5 с помощью формулы Фэя (3) докажем, что Γ_1 и Γ_2 касаются тэта-дивизора. В формулах (5), (6) укажем базис ψ_1, ψ_2 модуля Бейкера — Ахиезера. Из леммы 5 вытекает, что функции ψ_1 и ψ_2, ограниченные соответственно на Γ_1 и Γ_2, являются одноточечными функциями Бейкера — Ахиезера [9]. В лемме 7 найдем некоторые коэффициенты 11- и 12-компонент операторов второго порядка. В лемме 8 указана связь между 11- и 12-компонентами и между 21- и 22-компонентами операторов. В лемме 9 найдем некоторые коэффициенты оператора L_1. Лемма 1 вытекает из лемм 7–9. В лемме 10 мы докажем, что коэффициенты 11-компонент операторов Накаяшики рационально выражаются через функцию V и ее производные. Теорема 3 вытекает из лемм 11 и 12, где доказано, что коэффициенты операторов второго и третьего порядков рационально выражаются через функции V и W и их производные.

Абелево многообразие X является многообразием Якоби некоторой римановой поверхности Γ рода 2. На Γ существует канонический базис циклов a_1, a_2, b_1, b_2 с индексами пересечений $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$, $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$ и базис абелевых дифференциалов ω_1 и ω_2 такой, что компоненты матрицы Ω равны $\Omega_{ij} = \int\limits_{b_j} \omega_i$ и $\int\limits_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}, i, j = 1, 2$. Для точек $\widetilde{R}, \widetilde{Q} \in \Gamma$ справедливо тождество, найденное Ж. Д. Фэем [10]

$$\sum_{i,j=1}^{2} F_i G_j \partial_{z_i} \partial_{z_j} \ln \theta(z) = \tilde{c}_3 + \tilde{c}_2 \frac{1}{\theta^2(z)} \cdot \theta \left(z + \int\limits_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{R}} \omega \right) \cdot \theta \left(z + \int\limits_{\widetilde{R}}^{\widetilde{Q}} \omega \right),$$

где $F_i = \frac{\omega_i(\widetilde{R})}{dr}, G_i = \frac{\omega_i(\widetilde{Q})}{dq}$ и r, q — локальные параметры в окрестностях точек $\widetilde{R}$ и $\widetilde{Q}$,

$$\int\limits_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{R}} \omega = \left(\int\limits_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{R}} \omega_1, \int\limits_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{R}} \omega_2 \right),$$

$\widetilde{c_2}$, $\widetilde{c_3}$ — некоторые константы. Обозначим через R и $Q \in \Gamma$ нули ω_2. Так как $\int\limits_{Q}^{R} \omega = -2K$, где K — вектор римановых констант относительно точки Q (см., например, [11]), то

$$\partial^2_{z_1} \ln \theta(z) = c_3 + c_2 \frac{\theta(z - 2K)\theta(z + 2K)}{\theta^2(z)}, \tag{3}$$

c_2 и c_3 — некоторые константы (в явном виде мы их выпишем в формуле (15)). Через Γ_1 и Γ_2 обозначим римановы поверхности, заданные в X уравнениями $\theta(z + 2K) = 0$ и $\theta(z - 2K) = 0$.

Лемма 5. *Римановы поверхности Θ и Γ_1, Θ и Γ_2 пересекаются по точкам $-K, K$ с кратностями 2 (касаются), и $\theta_{11}(-K) = \theta_{11}(K) \neq 0$.*

Доказательство. Индекс пересечения Θ и Γ_1 равен 2 (см. [8]). Предположим, что Θ и Γ_1 пересекаются по двум различным точкам. Пусть $A : \Gamma \to X$ — отображение Абеля, заданное формулой

$$A(P) = \left(\int\limits_{Q}^{P} \omega_1, \int\limits_{Q}^{P} \omega_2 \right), \quad P \in \Gamma.$$

По теореме Римана о нулях тэта-функции равенство $\theta(z) = 0$ равносильно тому, что $z = A(P) + K$. Следовательно, точка $z = A(R) + K = -K$ является точкой пересечения Θ и Γ_1. Выберем локальный параметр s в точке R. Из (3) вытекает, что $\theta_1(K) = 0$. Имеет место равенство

$$\frac{d}{ds} \theta \left(\int\limits_{s(Q)}^{s(P)} s^* \omega + 3K \right) = \theta_1 \left(\int\limits_{s(Q)}^{s(P)} s^* \omega + 3K \right) \frac{\omega_1}{ds} + \theta_2 \left(\int\limits_{s(Q)}^{s(P)} s^* \omega + 3K \right) \frac{\omega_2}{ds}.$$

Так как $\omega_2(R) = 0$ и $\theta_1(K) = 0$, то

$$\frac{d}{ds} \theta \left(\int\limits_{s(Q)}^{s(P)} s^* \omega + 3K \right) = 0$$

при $P = R$, следовательно, функция $\theta(A(P) + K + 2K)$ имеет нуль кратности 2 в точке R или, что эквивалентно, функция $\theta(z+2K)$ имеет нуль кратности 2 на Θ в точке $-K$. Значит, точка $-K$ является точкой касания Θ и Γ_1. Аналогично доказывается, что Θ и Γ_2 касаются в точке K.

Докажем, что $\theta_{11}(-K) \neq 0$. Из (3) следует тождество

$$\begin{aligned}\theta_{112}(z)\theta(z) - \theta_{11}(z)\theta_2(z) - 2\theta_{12}(z)\theta_1(z) - 2c_3\theta_2(z)\theta(z)\\ = c_2\theta_2(z+2K)\theta(z-2K) + c_2\theta(z+2K)\theta_2(z-2K),\end{aligned}$$

из которого вытекает, что $\theta_{11}(-K) \neq 0$, так как иначе получили бы, что $\theta_2(K) = 0$, но Θ — гладкая риманова поверхность. Лемма доказана.

Из (3) получим, что на Γ_1 и Γ_2 справедливо равенство

$$\theta_{11}(z)\theta(z) - \theta_1^2(z) - c_3\theta^2(z) = 0,$$

из леммы 5 — что функция $\theta_1(z)$ на Γ_1 и Γ_2 имеет нуль первого порядка в точках $-K$ и K соответственно, следовательно, на Γ_1 верны разложения в ряд (в окрестности точки $-K \in \Gamma_1$)

$$\theta_2(z) = \theta_2(-K) + b_1\theta_1(z) + o(\theta_1(z)), \quad \theta_{11}(z) = \theta_{11}(-K) + d_1\theta_1(z) + o(\theta_1(z)), \tag{4}$$

на Γ_2 — разложения в ряд (в окрестности точки $K \in \Gamma_2$)

$$\theta_2(z) = \theta_2(K) + b_2\theta_1(z) + o(\theta_1(z)), \quad \theta_{11}(z) = \theta_{11}(K) + d_2\theta_1(z) + o(\theta_1(z)),$$

где $b_i, d_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$.

Лемма 6. *Имеют место равенства $b_1 = b_2$, $d_1 = -d_2$.*

Доказательство. Обозначим через A_1 отображение $\Gamma \to X$, заданное формулой $A_1(P) = \int_Q^P \omega - K$, $P \in \Gamma$, и пусть $A_2(P) = -A_1(P)$. Образом отображения A_1 является риманова поверхность Γ_1, а образом A_2 — Γ_2. Так как $\theta(z)$ — четная функция, то $\theta_1(z)$ и $\theta_2(z)$ нечетные, следовательно, из (4) получаем

$$\theta_2(A_2(P)) = \theta_2(K) + b_1\theta_1(A_2(P)) + \dots,$$

отсюда вытекает равенство $b_1 = b_2$. Аналогично доказывается, что $d_1 = -d_2$. Лемма доказана.

Пусть $b = b_1 = b_2, d = d_1 = -d_2$.

Введем функции из M_c

$$\psi_1 = \frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)\theta(c-K+x)} \exp\left(-x_1\left(\partial_{z_1}\ln\theta(z) - \frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)} - \frac{d}{2}\right) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)\right), \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\psi_2 = \frac{\theta(z+c-2K+x)\theta(z+2K)}{\theta^2(z)\theta(c-K+x)}\\ \times \exp\left(-x_1\left(\partial_{z_1}\ln\theta(z) + \frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)} + \frac{d}{2}\right) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Функции ψ_1, ψ_2 задают базис $\mathscr{D}$-модуля M_c [3].

Через $L^{ij}_{c,K}$ и $L^{ijk}_{c,K}$ обозначим операторы Накаяшики $L_{c,K}(\partial_{z_i}\partial_{z_j}\ln\theta(z))$ и $L_{c,K}(\partial_{z_i}\partial_{z_j}\partial_{z_k}\ln\theta(z))$ в базисе ψ_1, ψ_2 (смысл индекса K будет ясен из дальнейшего). Оператор $\left[L^{ij}_{c,K}\right]_{11}$ имеет вид $-\partial_{x_i}\partial_{x_j} + f^{ij}_{c,K}\partial_{x_1} + g^{ij}_{c,K}\partial_{x_2} + h^{ij}_{c,K}$, а оператор $[L_{c,K}(\partial_{z_i}\partial_{z_j}\ln\theta(z))]_{12}$ является оператором умножения на некоторую функцию $H^{ij}_{c,K}(x)$, $i, j = 1, 2$ [3].

Лемма 7. *Имеют место равенства*

$$g^{11}_{c,K}=\frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)},\quad g^{12}_{c,K}=\frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}+\frac{\theta_{12}(K)}{\theta_2(K)}+\frac{d}{2},\quad g^{22}_{c,K}=\frac{\theta_{22}(K)}{\theta_2(K)},\quad f^{11}_{c,K}=0,$$

$$\begin{aligned}h^{11}_{c,K}&=\partial^2_{x_1}\ln\frac{\theta(c-3K+x)}{\theta(c-K+x)}\\&+\left(\partial_{x_1}\ln\frac{\theta(c-3K+x)}{\theta(c-K+x)}+\partial_{z_1}\ln\theta(3K)+\frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}+\frac{d}{2}\right)^2\\&-\frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}\left(\partial_{x_2}\ln\frac{\theta(c-3K+x)}{\theta(c-K+x)}+\partial_{z_2}\ln\theta(3K)\right)+c_3,\end{aligned}$$

$$H^{11}_{c,K}=\frac{2\theta_{11}(K)\theta(K+c+x)}{\theta(3K)\theta(c-K+x)}\exp(x_1(\frac{b\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}+d)),$$

$$H^{12}_{c,K}=\left(\frac{\theta_{12}(K)}{\theta_{11}(K)}+\frac{b}{2}+\frac{d\theta_2(K)}{2\theta_{11}(K)}\right)H^{11}_{c,K}-\frac{\theta_2(K)}{2\theta_{11}(K)}\partial_{x_1}H^{11}_{c,K},$$

$$H^{22}_{c,K}=\left(\frac{\theta_{22}(K)}{\theta_{11}(K)}+b+\frac{d\theta_2(K)}{\theta_{11}(K)}\right)H^{11}_{c,K}-\frac{\theta_2(K)}{\theta_{11}(K)}\partial_{x_2}H^{11}_{c,K}.$$

Доказательство. Разделим равенство

$$-\partial_{x_i}\partial_{x_j}\psi_1+f^{ij}_{c,K}\partial_{x_1}\psi_1+g^{ij}_{c,K}\partial_{x_2}\psi_1+h^{ij}_{c,K}\psi_1+H^{ij}_{c,K}\psi_2=\partial_{z_i}\partial_{z_j}\ln\theta(z)\psi_1$$

на $\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z))$ и умножим на $\theta^2(z)$. Положив сначала $z=-K$, а затем $z=K$, получим $g^{ij}_{c,K}$ и $H^{ij}_{c,K}$. Далее, пусть $z\in\Gamma_1$. Используя разложение (4), находим $f^{11}_{c,K}=0$. Для $z\in\Gamma_1$ справедливо равенство

$$\partial^2_{x_1}\psi_1-\frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}\partial_{x_2}\psi_1-h^{11}_{c,K}\psi_1+c_3\psi_1=0,\tag{7}$$

следовательно,

$$h^{11}_{c,K}=\partial^2_{x_1}\ln\psi_1+(\partial_{x_1}\ln\psi_1)^2-\frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}\partial_{x_2}\ln\psi_1+c_3.$$

Полагая $z=-3K\in\Gamma_1$, получим $h^{11}_{c,K}$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Для оператора* $L_{c,K}=L_{c,K}(\lambda)$, $\lambda\in\mathscr{A}_\Theta$ *имеют место равенства*

$$[L_{c,K}]_{21}=[L_{c-2K,-K}]_{12}\left(\frac{1}{c_2}\left[L^{11}_{c,K}\right]_{11}-\frac{c_3}{c_2}\right),$$

$$[L_{c,K}]_{22}=[L_{c-2K,-K}]_{11}+\frac{1}{c_2}[L_{c-2K,-K}]_{12}H^{11}_{c,K}.$$

Доказательство. В равенстве $[L_{c,K}]_{11}\psi_1+[L_{c,K}]_{12}\psi_2=\lambda(z)\psi_1$ заменим K на $-K$, c на $c-2K$ и умножим обе части на $\frac{\theta(z+2K)}{\theta(z)}$. Отметим, что при такой замене d заменяется на $-d$, а b остается тем же самым. Получим

$$[L_{c-2K,-K}]_{11}\psi_2+[L_{c-2K,-K}]_{12}\frac{\theta(z+2K)\theta(z-2K)}{\theta^2(z)}\psi_1=\lambda(z)\psi_2.$$

Следовательно,

$$[L_{c-2K,-K}]_{12}\left(\frac{1}{c_2}[L^{11}_{c,K}]_{11}-\frac{c_3}{c_2}\right)\psi_1 \\ +\left([L_{c-2K,-K}]_{11}+\frac{1}{c_2}[L_{c-2K,-K}]_{12}H^{11}_{c,K}\right)\psi_2=\lambda(z)\psi_2.$$

Лемма доказана.

В частности, из леммы 8 следует, что

$$\left[L^{ij}_{c,K}\right]_{21}=H^{ij}_{c-2K,-K}\left(\frac{1}{c_2}\left[L^{11}_{c,K}\right]_{11}-\frac{c_3}{c_2}\right),$$
$$\left[L^{ij}_{c,K}\right]_{22}=\left[L^{ij}_{c-2K,-K}\right]_{11}+\frac{1}{c_2}H^{11}_{c,K}H^{ij}_{c-2K,-K}.$$

Обозначим через V функцию $H^{11}_{c-2K,-K}$, через W — функцию $H^{11}_{c,K}$,

$$V=\frac{2\theta_{11}(K)\theta(c-3K+x)}{\theta(3K)\theta(c-K+x)}\exp\left(-x_1\left(\frac{b\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}+d\right)\right), \tag{8}$$

$$W=\frac{2\theta_{11}(K)\theta(K+c+x)}{\theta(3K)\theta(c-K+x)}\exp\left(x_1\left(\frac{b\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}+d\right)\right), \tag{9}$$

тогда из леммы 7 получаем

$$h^{11}_{c,K}=\partial^2_{x_1}\ln V+\left(\partial_{x_1}\ln V+\frac{3b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}+\frac{3d}{2}+\partial_{z_1}\ln\theta(3K)\right)^2 \\ -\frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}(\partial_{x_2}\ln V+\partial_{z_2}\ln\theta(3K))+c_3, \tag{10}$$

$$h^{11}_{c-2K,-K}=\partial^2_{x_1}\ln W+\left(\partial_{x_1}\ln W-\frac{3b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}-\frac{3d}{2}-\partial_{z_1}\ln\theta(3K)\right)^2 \\ +\frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}(\partial_{x_2}\ln W-\partial_{z_2}\ln\theta(3K))+c_3. \tag{11}$$

В окрестности точки $z=-K$ на Γ_1 имеет место разложение в ряд

$$\frac{\theta_{12}(z)}{\theta(z)}=\frac{a_2}{\theta_1^2(z)}+\frac{a_1}{\theta_1(z)}+\dots,\quad a_1,a_2\in\mathbb{C}, \tag{12}$$

в окрестности точки $z=K$ на Γ_2 —

$$\frac{\theta_{12}(z)}{\theta(z)}=\frac{\tilde a_2}{\theta_1^2(z)}+\frac{\tilde a_1}{\theta_1(z)}+\dots,\quad \tilde a_1,\tilde a_2\in\mathbb{C}.$$

Как и в лемме 6, легко показать, что $a_1=-\tilde a_1$. Пусть $a=a_1=-\tilde a_1$.

Лемма 9. *Имеют место равенства*

$$h^{12}_{c,K}=\partial_{x_1}\partial_{x_2}\ln V+\left(\partial_{x_1}\ln V+\frac{3b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}+\frac{3d}{2}+\partial_{z_1}\ln\theta(3K)\right) \\ \times(\partial_{x_2}\ln V+\partial_{z_2}\ln\theta(3K))-f^{12}_{c,K}\left(\partial_{x_1}\ln V+\frac{3b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}+\frac{3d}{2}+\partial_{z_1}\ln\theta(3K)\right) \\ -g^{12}_{c,K}(\partial_{x_2}\ln V+\partial_{z_2}\ln\theta(3K))+\partial_{z_1}\partial_{z_2}\ln\theta(3K),$$

$$f^{12}_{c,K} = \frac{\theta_2(K)}{2\theta_{11}(K)}\Bigg(h^{11}_{c,K} - c_3 + 2\frac{d\theta_{12}(K)}{\theta_2(K)} - \frac{2b\theta_{11}(K)\theta_{12}(K)}{\theta_2^2(K)} - \frac{2a}{\theta_2(K)} - \left(\frac{d}{2} - \frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}\right)^2 - 2\theta_{11}(K)e - \frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}\alpha\Bigg).$$

Доказательство. В доказательстве этой леммы мы предполагаем, что $z \in \Gamma_1$. Тогда

$$h^{12}_{c,K} = \partial_{x_1}\partial_{x_2}\ln\psi_1 + \partial_{x_1}\ln\psi_1\partial_{x_2}\ln\psi_1 - f^{12}_{c,K}\partial_{x_1}\ln\psi_1 - g^{12}_{c,K}\partial_{x_2}\ln\psi_1 + \partial_{z_1}\partial_{z_2}\ln\theta(z).$$

Отсюда, полагая $z = -3K$, получим $h^{12}_{c,K}$.

Для удобства обозначим через k^{-1} локальный параметр $\theta_1(z)$ на поверхности Γ_1 в точке $z = -K$. Из (3) и (4) получаем разложение в ряд

$$\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)} = \frac{\theta_{11}(z)}{\theta_1(z)} - c_3\frac{\theta(z)}{\theta_1(z)} = \theta_{11}(K)k + d + \frac{e}{k} + o(k^{-1}), \quad e \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

Пусть

$$\frac{\theta_2(z)}{\theta(z)} = \gamma k^2 + \beta k + \alpha + o(1), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \tag{14}$$

тогда функция ψ_1 имеет вид

$$\psi_1 = \frac{1}{\theta(z)}\left(1 + \frac{\xi_1(x)}{k} + \frac{\xi_2(x)}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\exp,$$

$$\exp = \exp\Bigg(-x_1\left(\left(\theta_{11}(K)k + d + \frac{e}{k} + \dots\right) - \frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)} - \frac{d}{2}\right) - x_2(\gamma k^2 + \beta k + \alpha + \dots)\Bigg).$$

Приравнивая в (7) к нулю коэффициенты при $k^2\exp$, $k\exp$ и $\exp$, находим

$$\gamma = -\theta_{11}(K)\theta_2(K), \quad \beta = b\theta_{11}(K) - d\theta_2(K)$$

и

$$h^{11}_{c,K} - c_3 = -2\theta_{11}(K)\partial_{x_1}\xi_1 + \left(\frac{d}{2} - \frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}\right)^2 + 2\theta_{11}(K)e + \frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}\alpha.$$

Пользуясь разложениями (12)–(14), приравняем в равенстве

$$-\partial_{x_1}\partial_{x_2}\psi_1 + f^{12}_{c,K}\partial_{x_1}\psi_1 + g^{12}_{c,K}\partial_{x_2}\psi_1 + h^{12}_{c,K}\psi_1 = \partial_{z_1}\partial_{z_2}\ln\theta(z)\psi_1$$

коэффициенты при $k^2\exp$ и $k\exp$. Получим $a_2 = \theta_{11}(K)\theta_2(K)$ и

$$f^{12}_{c,K} = -\theta_2(K)\partial_{x_1}\xi_1 + \frac{d\theta_{12}(K)}{\theta_{11}(K)} - \frac{b\theta_{12}(K)}{\theta_2(K)} - \frac{a}{\theta_{11}(K)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Коэффициенты* 11*-компонент операторов* $L_{c,K}(\mathscr{A}_\Theta)$ *рационально выражаются через функцию* V *и ее производные.*

Доказательство. Пусть $z \in \Gamma_1$. Тогда $\left[L^{12}_{c,K}\right]_{11}\psi_1 = \partial_{z_1}\partial_{z_2}\psi_1$. Заменим в левой части этого равенства дифференцирование по переменной x_2 функции ψ_1 дифференцированием по x_1 (по формуле (7)). Получим некоторый оператор третьего порядка $\widetilde{L}$ (по x_1). Коэффициенты его, как следует из лемм 7 и 9, рационально выражаются через функцию V и ее производные.

Пусть дан произвольный оператор $[L_{c,K}(\lambda)]_{11}$, $\lambda \in \mathscr{A}_\Theta$. Имеем равенство $[L_{c,K}(\lambda)]_{11}\psi_1 = \lambda\psi_1$. Точно так же заменим в нем дифференцирование по переменной x_2 дифференцированием по x_1. Получим некоторый оператор $\widetilde{L}_1$ порядка > 3. Операторы $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L}_1$ коммутируют (так как они имеют семейство совместных собственных функций, параметризованное точками Γ_1). Следовательно, как показано в [9], коэффициенты оператора $\widetilde{L}_1$ полиномиально выражаются через коэффициенты оператора $\widetilde{L}$ и их производные. Отсюда вытекает, что коэффициенты оператора $[L_{c,K}(\lambda)]_{11}$ рационально выражаются через функцию V и ее производные. Лемма доказана.

Аналогично доказывается, что коэффициенты операторов $[L_{c-2K,-K}]_{11}$ рационально выражаются через функцию W и ее производные.

Из лемм 7, 8 и 10 вытекает следующий результат.

Лемма 11. *Коэффициенты операторов Накаяшики второго порядка рационально выражаются через функции* W, V *и их производные.*

Оператор $\left[L^{ijk}_{c,K}\right]_{11}$ имеет третий порядок со старшей частью $\partial_{x_i}\partial_{x_j}\partial_{x_k}$, а оператор $\left[L^{ijk}_{c,K}\right]_{12}$ — первый порядок [3].

Лемма 12. *Коэффициенты операторов Накаяшики третьего порядка рационально выражаются через функции* W, V *и их производные.*

Доказательство. Пусть $[L_{c,K}]_{12} = u^1_{c,K}\partial_{x_1} + u^2_{c,K}\partial_{x_2} + u^3_{c,K}$, где $L_{c,K}$ — оператор третьего порядка, тогда по лемме 8 имеем равенства

$$\begin{aligned}[L_{c,K}]_{21} = \big(u^1_{c-2K,-K}\partial_{x_1} + u^2_{c-2K,-K}\partial_{x_2} + u^3_{c-2K,-K}\big)\\ \times\left(\frac{1}{c_2}\left(-\partial^2_{x_1} + \frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}\partial_{x_2} + h^{11} - c_3\right)\right),\end{aligned}$$

$$[L_{c,K}]_{22} = [L_{c-2K,-K}]_{11} + \frac{1}{c_2}\big(u^1_{c-2K,-K}\partial_{x_1} + u^2_{c-2K,-K}\partial_{x_2} + u^3_{c-2K,-K}\big)W.$$

По лемме 10 коэффициенты операторов $[L_{c,K}]_{11}$ и $[L_{c-2K,-K}]_{11}$ рационально выражаются через функции W, V и их производные, значит, коэффициент при $\partial^3_{x_2}$ в 21-компоненте коммутатора $[L^{11}_{c,K}, L_{c,K}] = 0$ имеет вид

$$-\frac{2\theta^2_{11}(K)}{c_2\theta^2_2(K)}u^2_{c-2K,-K} + F^2 = 0,$$

где функция F^2 рационально выражается через функции W, V и их производные. Коэффициенты при $\partial_{x_1}\partial^2_{x_2}$ и $\partial^2_{x_2}$ в этой компоненте имеют вид

$$-\frac{2\theta^2_{11}(K)}{c_2\theta^2_2(K)}u^i_{c-2K,-K} + F^i = 0, \quad i = 1, 3,$$

где функции F^i рационально выражаются через функции $V, W, u^2_{c-2K,-K}$ и их производные. Следовательно, $u^i_{c-2K,-K}$ и $u^i_{c,K}$ рационально выражаются через V, W и их производные. Лемма доказана.

Операторы второго и третьего порядков порождают все кольцо $L_{c,K}(\mathscr{A}_\Theta)$ [3], тем самым из лемм 11, 12 вытекает теорема 3.

Выпишем формулы для констант c_j (из введения).

Умножим обе части (3) на $\theta^2(z)$ и продифференцируем по z_2, а затем подставим $z = K$, получим c_2. Подставим в (3) $z = 3K$, найдем c_3. Из лемм 7, 9 и формул (10), (11) находим формулы для остальных констант c_j:

$$c_1 = \frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}, \quad c_2 = -\frac{\theta_{11}(K)}{\theta(3K)}, \quad c_3 = \frac{\theta_{11}(3K)}{\theta(3K)} - \frac{\theta_1^2(3K)}{\theta^2(3K)}, \tag{15}$$

$$c_4 = \frac{3}{2}bc_1 + \frac{3d}{2} + \partial_{z_1} \ln \theta(3K), \quad c_5 = \partial_{z_2} \ln \theta(3K), \tag{16}$$

$$c_6 = \frac{1}{2}bc_1 + \frac{d}{2} + \frac{\theta_{12}(K)}{\theta_2(K)}, \quad c_7 = -c_5c_6 + \partial_{z_1}\partial_{z_2} \ln \theta(3K), \tag{17}$$

$$c_8 = 2\frac{d\theta_{12}(K)}{\theta_2(K)} - \frac{2b\theta_{11}(K)\theta_{12}(K)}{\theta_2^2(K)} - \frac{2a}{\theta_2(K)} - \left(\frac{d}{2} - \frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}\right)^2 - 2\theta_{11}(K)e - \frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}\alpha - c_3. \tag{18}$$

Константы a, b, d, e и α определяются из разложений (12), (4), (13) и (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nakayashiki A.* Structure of Baker — Akhiezer modules of principally polarized Abelian varieties, commuting partial differential operators and associated integrable systems // Duke Math. J. 1991. V. 62, N 2. P. 315–358.
2. *Nakayashiki A.* Commuting partial differential operators and vector bundles over Abelian varieties // Amer. J. Math. 1994. V. 116. P. 65–100.
3. *Миронов А. Е.* Коммутативные кольца дифференциальных операторов, связанные с двумерными абелевыми многообразиями // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1389–1403.
4. *Feldman J., Knorrer H., Trubowitz E.* There is no two-dimensional analogue of Lame's equation // Math. Ann. 1992. V. 294, N 2. P. 295–324.
5. *Дубровин Б. А., Натанзон С. М.* Вещественные двухзонные решения уравнения sine–Gordon // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 1. С. 27–43.
6. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Основные состояния в периодическом поле. Магнитно-блоховские функции и векторные расслоения // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253, № 6. С. 1293–1297.
7. *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.
8. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982. Т. 1.
9. *Кричевер И. М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // Успехи мат. наук. 1997. Т. 32, № 6. С. 183–208.
10. *Fay J. D.* Theta functions on Riemann surfaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1973. (Lecture Notes in Math. V. 352).
11. *Тайманов И. А.* Секущие абелевых многообразий, тэта-функции и солитонные уравнения // Успехи мат. наук. 1977. Т. 52, № 1. С. 149–224.

Статья поступила 21 августа 2001 г.

Миронов Андрей Евгеньевич
г. Новосибирск
`mironov@math.nsc.ru`