

УДК 517.51

ВЕСОВАЯ ОЦЕНКА ПРОМЕЖУТОЧНОГО
ОПЕРАТОРА НА КОНУСЕ
НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Р. Ойнаров

Аннотация: Рассматривается интегральный оператор

$$K_\beta f(x) = \int_0^x K^\beta(x, t) f(t) dt, \quad x > 0, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad K \equiv K_1.$$

При некотором ограничении на положительную непрерывную функцию $K(x, s)$ получены необходимые и достаточные условия на весовые функции u, v и ρ , при которых справедливо неравенство $\|uK_\beta f\|_q \leq C(\|\rho f\|_p + \|vKf\|_r)$, $f \geq 0$, когда $1 < p, q, r < \infty$, $q \geq \max\{p, r\}$. Библиогр. 8.

1. Пусть $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, μ и λ — неотрицательные борелевские меры на \mathbb{R}_+ , u, v и ρ — весовые функции на \mathbb{R}_+ , т. е. неотрицательные локально интегрируемые на \mathbb{R}_+ функции. Пусть K — интегральный оператор вида

$$Kf(x) = \int_0^x K(x, t) f(t) dt, \quad x > 0, \quad (1)$$

с непрерывным при $0 < s \leq x < +\infty$ ядром $K(x, t)$, удовлетворяющим условиям:

- (а) $K(x, s) > 0$ при $x > s$;
- (б) существует постоянная $d \geq 1$ такая, что

$$\frac{1}{d}(K(x, t) + K(t, s)) \leq K(x, s) \leq d(K(x, t) + K(t, s)) \quad (2)$$

для всех x, t, s таких, что $0 < s < t < x < \infty$.

Оператор вида (1) с условием (б) был введен в работе [1], а различные его свойства исследованы в работах [2, 3]. Класс операторов вида (1) с условиями (а) и (б) включает в себя почти все известные операторы дробного интегрирования, в частности, оператор Римана — Лиувилля

$$\mathcal{R}_\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad \alpha \geq 1,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Введем «промежуточный» оператор вида

$$K_\beta f(x) = \int_0^x K^\beta(x, t) f(t) dt, \quad (3)$$

где $0 \leq \beta \leq 1$, который при $\beta = 1$ сводится к оператору (1), а при $\beta = 0$ — к оператору интегрирования

$$K_0 f(x) = \int_0^x f(s) ds.$$

Рассмотрим неравенство

$$\|K_\beta f\|_{q,\mu} \leq C(\|\rho f\|_p + \|Kf\|_{r,\lambda}), \quad f \geq 0, \quad (4)$$

где $1 < p, q, r < \infty$, $\|\cdot\|_p$ — обычная норма пространства $L_p(\mathbb{R}_+)$,

$$\|g\|_{q,\mu} = \left(\int_0^\infty |g(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

В случае, когда в (4) $d\mu(x) = u^q(x) dx$, $d\lambda(x) = v^r(x) dx$, $K \equiv \mathcal{R}_n$, $\beta = \frac{m-1}{n-1}$, $m = n - k$, $0 \leq k \leq n - 1$, имеем неравенство

$$\|u\mathcal{R}_m f\|_q \leq C(\|\rho f\|_p + \|v\mathcal{R}_n f\|_r), \quad f \geq 0, \quad (5)$$

которое эквивалентно весовой оценке промежуточных производных

$$\|uy^{(k)}\|_q \leq C(\|\rho y^{(n)}\|_p + \|vy\|_r) \quad (6)$$

на классе функции $M = \{y : y^{(i)} \geq 0, y^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, \dots, n-1\}$.

Оценка вида (6) используется в различных задачах математического анализа, и проблема заключается в нахождении необходимых и достаточных условий на весовые функции u, v и ρ таких, что справедливо (6) для всех функций y , для которых конечна правая часть (6).

При $n = 1$, $p = r$ решение этой задачи дано в работах [4-6], а в общем случае вопрос остается открытым.

Неравенство (4) в случае, когда $d\mu(x) = u^q(x) dx$, $d\lambda(x) = v^r(x) dx$, $1 < p = r \leq q < \infty$, исследовано в [7] при $\beta = 0$, а при $\beta = 1$ и $0 < \beta < 1$ основные результаты анонсированы соответственно в [1, 8].

Пусть $\rho^{-1} \equiv \frac{1}{\rho} \in L_{p'}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, и для функции $\rho^{-p'}(\cdot)\chi_{[t,z]}(\cdot)$, где $\chi_{[t,z]}(\cdot)$ — характеристическая функция интервала $[t, z] \subset \mathbb{R}_+$, правая часть (4) конечна. Тогда из (2) и (4) вытекают следующие необходимые условия на μ и λ :

$$\begin{aligned} \mu([t, +\infty)) &\equiv \int_t^{+\infty} d\mu(x) < \infty, & \int_{[t, +\infty)} K^{\beta q}(x, t) d\mu(x) &\equiv \int_t^{+\infty} K^{\beta q}(x, t) d\mu(x) < \infty, \\ \int_t^{+\infty} d\lambda(x) &< \infty, & \int_t^{+\infty} K^r(x, t) d\lambda(x) &< \infty \quad \forall t > 0, \end{aligned}$$

которые далее будем считать выполненными.

В \mathbb{R}_+ определим функции $\varphi(\cdot)$ и $\varphi_\beta(\cdot)$:

$$\varphi(z) = \left[\inf_{0 < t < z} \left(\left(\int_t^z \rho^{-p'} ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\int_t^{+\infty} K^r(x, t) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} \right) \right]^{-1},$$

$$\varphi_\beta(z) = [\inf_{0 < t < z} (\Phi_\beta(t, z) + \Psi_\beta(t, z))]^{-1},$$

где

$$\Phi_\beta(t, z) = \inf_{t < \tau < z} \left(\left(\int_t^\tau K^{\beta p'}(z, s) \rho^{-p'}(s) ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + K^{-\beta}(z, \tau) \left(\int_z^\infty K^r(x, z) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} \right),$$

$$\Psi_\beta(t, z) = \left(\int_t^z K^{(1-\beta)r}(x, t) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} + K^{1-\beta}(z, t) \left(\int_z^\infty d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Положим

$$A_1(z, \beta) = \varphi(z) \left(\int_z^\infty K^{\beta q}(x, z) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad A_2(z, \beta) = \varphi_\beta(z) \left(\int_z^\infty d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_i \equiv A_i(\beta) = \sup_{z > 0} A_i(z, \beta), \quad i = 1, 2, \quad A_\beta = \max\{A_1(\beta), A_2(\beta)\}.$$

Заметим, что при $\beta = 0$ в силу (2) $\varphi_0(z) \approx \varphi(z)$ для любых $z > 0$ и поэтому $A_0 \approx A_1(0) \approx A_2(0)$.

Здесь и далее $A \ll C$ означает $A \leq \alpha C$ с некоторой постоянной $\alpha > 0$, а запись $A \approx C$ утверждает наличие двусторонней оценки $A \ll C \ll A$. Для удобства примем также соглашения

$$\int_{[t, z]} f(x) d\mu(x) \equiv \int_t^z f(x) d\mu(x).$$

2. Основной целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $1 < p, q, r < \infty$, $\max\{p, r\} \leq q$, $0 \leq \beta \leq 1$, функция $K(x, s)$ непрерывна при $0 < s \leq x$ и удовлетворяет условиям (а) и (б). Тогда неравенство (4) выполнено тогда и только тогда, когда $A_\beta < \infty$, причем $A_\beta \approx C$, где C — константа в (4), наименьшая из возможных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В ходе доказательства без напоминания будут использованы почти неубывание по первому аргументу ($dK(x, s) \geq K(t, s)$ при $x > t > s > 0$) и почти невозрастание по второму аргументу ($dK(x, s) \geq K(x, t)$ при $x > t > s > 0$) функции $K(x, s)$, вытекающие из левого неравенства (2).

НЕОБХОДИМОСТЬ. Полагая $f(\cdot) = \rho^{-p'}(\cdot)\chi_{[t, z]}(\cdot)$, имеем

$$\|K_\beta f\|_{q, \mu} \gg \left(\int_z^\infty K^{\beta q}(x, z) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \int_t^z \rho^{-p'}(s) ds, \quad \|\rho f\|_p = \left(\int_t^z \rho^{-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|Kf\|_{r, \lambda} \ll \left(\int_t^\infty K^r(x, t) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} \int_t^z \rho^{-p'}(s) ds.$$

Подставив последние оценки в (4) и заметив, что после сокращения обеих частей полученного неравенства на $\int_t^z \rho^{-p'}(s) ds$ левая часть его не зависит от t , $0 < t < z$, получим

$$\left(\int_z^\infty K^{\beta q}(x, z) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \ll C \varphi^{-1}(z) \quad \forall z > 0.$$

Следовательно, $A_1(\beta) \ll C < \infty$. Если $\beta \neq 0$, то введем еще функцию

$$f(\cdot) = \chi_{[t, \tau]}(\cdot) K^{\beta(p'-1)}(z, \cdot) \rho^{-p'}(\cdot), \quad 0 < t < \tau < z.$$

Тогда

$$\|K_\beta f\|_{q, \mu} \gg \left(\int_z^\infty d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \int_t^\tau K^{\beta p'}(z, s) \rho^{-p'}(s) ds, \quad (7)$$

$$\|\rho f\|_p = \left(\int_t^\tau K^{\beta p'}(z, s) \rho^{-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \|Kf\|_{r, \lambda} &\ll \left(\int_t^z K^{r(1-\beta)}(x, t) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} \int_t^\tau K^{\beta p'}(z, s) \rho^{-p'}(s) ds \\ &+ \left(\int_z^\infty \left(\int_t^\tau (K(x, z) + K(z, s)) K^{\beta(p'-1)}(z, s) \rho^{-p'}(s) ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\ll \left[\left(\int_t^z K^{r(1-\beta)}(x, t) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} + K^{-\beta}(z, \tau) \left(\int_z^\infty K^r(x, z) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\ &\quad \left. + K^{1-\beta}(z, \tau) \left(\int_z^\infty d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} \right] \int_t^\tau K^{\beta p'}(z, s) \rho^{-p'}(s) ds. \quad (9) \end{aligned}$$

Подставляя (7), (8) и (9) в (4) и сокращая обе части полученного неравенства на $\int_t^\tau K^{\beta p'}(z, s) \rho^{-p'}(s) ds$, а затем учитывая, что левая часть этого неравенства не зависит от τ , $t < \tau < z$, и от t , $0 < t < z$, получим

$$\left(\int_z^\infty d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \ll C \varphi_\beta^{-1}(z) \quad \forall z > 0.$$

Отсюда следует, что $A_2(\beta) \ll C < \infty$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $A_\beta < \infty$ и для функции $f \geq 0$ конечна правая часть (4). Далее рассмотрим два случая: $\beta = 0$ и $0 < \beta \leq 1$.

Случай $\beta = 0$. В этом случае $A_0 \approx A_1(0) \approx A_2(0)$ и

$$K_0 f(x) = \int_0^x f(s) ds.$$

Следовательно, мы должны показать, что из $A_1 = A_1(0) < \infty$ вытекает

$$\|K_0 f\|_{q,\mu} \leq C(\|\rho f\|_p + \|Kf\|_{r,\lambda}) \quad (10)$$

и $C \ll A_1$, где C — константа в (10), наименьшая из возможных.

В силу непрерывности и монотонности функции $K_0 f(x)$ на \mathbb{R}_+ существует последовательность точек $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}_0} \subset \mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z}$, таких, что

$$2^{k-1} = K_0 f(x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(s) ds \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0, \quad \mathbb{R}_+ = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_0} [x_k, x_{k+1}),$$

$[x_i, x_{i+1}) \cap [x_j, x_{j+1}) = \emptyset$ при $i \neq j$ и $K_0 f(x) \leq 2^{k+1}$ при $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_0$. Тогда

$$\|K_0 f\|_{q,\mu}^q = \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |K_0 f(x)|^q d\mu(x) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} 2^{(k+1)q} \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x). \quad (11)$$

Из $A_1 = A_1(0) < \infty$ следует, что для любого $k \in \mathbb{Z}_0$

$$\int_{x_k}^{\infty} d\mu(x) \leq A_1^q \varphi^{-q}(x_k) \leq A_1^q \left(\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho^{-p'} ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\int_{x_{k-1}}^{\infty} K^r(x, x_{k-1}) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} \right)^q.$$

Поэтому из (11) имеем

$$\begin{aligned} \|K_0 f\|_{q,\mu}^q &\leq A_1^q \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} 2^{q(k+1)} \left(\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho^{-p'} ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\int_{x_{k-1}}^{\infty} K^r(x, x_{k-1}) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} \right)^q \\ &\ll A_1^q \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_0} 2^{q(k-1)} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho^{-p'} ds \right)^{-\frac{q}{p'}} + \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} 2^{q(k-2)} \left(\int_{x_{k-1}}^{\infty} K^r(x, x_{k-1}) d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \right) \\ &= A_1^q (I_1 + I_2). \quad (12) \end{aligned}$$

Учитывая, что $q \geq p$ и $q \geq r \geq 1$, получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(s) ds \right)^q \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho^{-p'} ds \right)^{-\frac{q}{p'}} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} |\rho f|^p ds \right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_0} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\rho f|^p ds \right)^{\frac{q}{p}} \leq \|\rho f\|_p^q, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} \left(\int_{x_{k-1}}^{\infty} \left(\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x, x_{k-1}) f(s) ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \\ &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_0} \sum_{i \geq k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x, x_{k-1}) f(s) ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &<< \left(\sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sum_{k \leq i} \left(\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x, s) f(s) ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \\ &\leq \left(\sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\sum_{k \leq i} \int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x, s) f(s) ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \leq \|Kf\|_{r, \lambda}^q. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (12)–(14) следует (10) с оценкой $C \ll A_1$.

СЛУЧАЙ $0 < \beta \leq 1$. Из условия (2) вытекает, что

$$K^\beta(x, s) \leq d^\beta (K^\beta(x, t) + K^\beta(t, s)), \quad 0 < s < t < x. \quad (15)$$

Положим $D = d^\beta + 1$ и для любого $k \in \mathbb{Z}$ определим

$$x_k = \sup\{x > 0 : K_\beta f(x) \leq D^k\}.$$

Очевидно, что $x_k \leq x_{k+1}$ и в силу непрерывности функции $K_\beta f(x)$ будет $D^k = K_\beta f(x_k)$, если $x_k < \infty$. Пусть $\mathbb{Z}_\beta = \{k : D^k = K_\beta f(x_k), k \in \mathbb{Z}\}$. Тогда $[x_i, x_{i+1}) \cap [x_j, x_{j+1}) = \emptyset$ при $i \neq j$, $i \in \mathbb{Z}_\beta$, $j \in \mathbb{Z}_\beta$ и

$$\mathbb{R}_+ = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_\beta} [x_k, x_{k+1}), \quad K_\beta f(x) \leq D^{k+1} \quad \text{при } x_k \leq x \leq x_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}_\beta. \quad (16)$$

Для $k \in \mathbb{Z}_\beta$ в силу (15) имеем

$$\begin{aligned} D^{k-1} &= D^k - d^\beta D^{k-1} = \int_0^{x_k} K^\beta(x_k, s) f(s) ds - d^\beta \int_0^{x_{k-1}} K^\beta(x_{k-1}, s) ds \\ &\leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} K^\beta(x_k, s) f(s) ds + d^\beta K^\beta(x_k, x_{k-1}) \int_0^{x_{k-1}} f(s) ds \\ &\ll \int_{x_{k-1}}^{x_k} K^\beta(x_k, s) f(s) ds + K^\beta(x_k, x_{k-1}) K_0 f(x_{k-1}). \end{aligned} \quad (17)$$

Из (16) следует

$$\begin{aligned} \|K_\beta f\|_{q, \mu}^q &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_\beta} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (K_\beta f(x))^q d\mu(x) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_\beta} D^{q(k+1)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} + \sum_{k \in \mathbb{Z}''_\beta} \right) D^{q(k+1)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) = I' + I'', \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mathbb{Z}''_\beta = \mathbb{Z} - \mathbb{Z}'_\beta$ и $k \in \mathbb{Z}'_\beta$, если

$$\Phi_\beta(x_{k-1}, x_k) \leq \Psi_\beta(x_{k-1}, x_k). \quad (19)$$

Используя (17), оценим I' и I'' по отдельности:

$$I' = \sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} D^{q(k+1)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) \ll \sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} D^{q(k-2)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x)$$

$$\begin{aligned} &<< \sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} \left(\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K^\beta(x_{k-1}, s) f(s) ds \right)^q \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) \\ &+ \sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} K^{\beta q}(x_{k-1}, x_{k-2}) (K_0 f(x_{k-2}))^q \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) = I'_1 + I'_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Из условия $A_2 = A_2(\beta) < +\infty$ и из (19) выводим, что для $k \in \mathbb{Z}'_\beta$

$$\int_{x_k}^{\infty} d\mu(x) \leq A_2^q \varphi_\beta^{-q}(x_k) << A_2^q (\Psi_\beta(x_{k-1}, x_k))^q.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I'_1 &<< A_2^q \sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} \left(\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K^\beta(x_{k-1}, s) f(s) ds \right)^q (\Psi_\beta(x_{k-1}, x_k))^q \\ &<< A_2^q \sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} \left(\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K^\beta(x_{k-1}, s) f(s) ds \right)^q \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} K^{r(1-\beta)}(x_1, x_{k-1}) d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \\ &+ A_2^q \sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} \left(\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K^\beta(x_{k-1}, s) f(s) ds \right)^q K^{q(1-\beta)}(x_k, x_{k-1}) \left(\int_{x_k}^{\infty} d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \\ &= A_2^q (I'_{11} + I'_{12}). \end{aligned} \quad (21)$$

Так как $q \geq r \geq 1$, имеем

$$\begin{aligned} I'_{11} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} K^{r(1-\beta)}(x, x_{k-1}) \left(\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K^\beta(x_{k-1}, s) f(s) ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \\ &<< \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x, s) f(s) ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \leq \|Kf\|_{r, \lambda}^q, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} I'_{12} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} \left(\int_{x_k}^{\infty} \left(\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K^\beta(x_{k-1}, s) K^{(1-\beta)}(x_k, x_{k-1}) f(s) ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \\ &<< \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} \sum_{i \geq k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x, s) f(s) ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \\ &= \left(\sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{k \leq i} \left(\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x, s) f(s) ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \end{aligned}$$

$$\ll \left(\sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\sum_{k \leq i} \int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x, s) f(s) ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \leq \|Kf\|_{r, \lambda}^q, \quad (23)$$

Из (21)–(23) следует, что

$$I'_1 \ll A_2^q \|Kf\|_{r, \lambda}^q. \quad (24)$$

Переходим к оценке I'_2 :

$$I'_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} K^{\beta q}(x_{k-1}, x_{k-2}) (K_0 f(x_{k-2}))^q \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) \leq \int_0^\infty |K_0 f(s)|^q d\mu_0(s), \quad (25)$$

где

$$d\mu_0(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} K^{\beta q}(x_{k-1}, x_{k-2}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) \delta_{x_{k-2}}(s) ds, \quad (26)$$

$\delta_{x_{k-2}}(s)$ — дельта-функция Дирака в точке $x_{k-2} \in \mathbb{R}_+$. Как мы уже показали, имеет место оценка в виде (10)

$$\int_0^\infty |K_0 f(s)|^q d\mu_0(s) \ll \widehat{A}_0^q (\|\rho f\|_p + \|Kf\|_{r, \lambda})^q, \quad (27)$$

где

$$\widehat{A}_0 = \sup_{z > 0} \left(\int_z^\infty d\mu_0(s) \right)^{\frac{1}{q}} \varphi(z).$$

В силу (26)

$$\begin{aligned} \int_z^\infty d\mu_0(s) &= \sum_{x_{k-2} \geq z} K^{\beta q}(x_{k-1}, x_{k-2}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) \\ &\ll \sum_{x_{k-2} \geq z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K^{\beta q}(x, x_{k-2}) d\mu(x) \ll \int_z^\infty K^{\beta q}(x, z) d\mu(x). \end{aligned}$$

Значит,

$$\widehat{A}_0 \ll \sup_{z > 0} \varphi(z) \left(\int_z^\infty K^{\beta q}(x, z) d\mu(x) \right) = A_1(\beta) \equiv A_1$$

и из (25), (27) следует, что

$$I'_2 \ll A_1^q (\|\rho f\|_p + \|Kf\|_{r, \lambda})^q. \quad (28)$$

Из (20), (24) и (28) имеем

$$I' \ll A_\beta^q (\|\rho f\|_p + \|Kf\|_{r, \lambda})^q. \quad (29)$$

Теперь оценим I'' . Ввиду (17)

$$I'' = D^{2q} \sum_{k \in \mathbb{Z}''_\beta} D^{q(k-1)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) \ll \sum_{k \in \mathbb{Z}''_\beta} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} K^\beta(x_k, s) f(s) ds \right)^q$$

$$\times \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}''_{\beta}} K^{\beta q}(x_k, x_{k-1}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) (K_0 f(x_{k-2}))^q = I''_1 + I''_2. \quad (30)$$

Выражение I''_2 оценивается точно так же, как и I''_1 , т. е.

$$I''_2 \ll A_1^q (\|\rho f\|_p + \|Kf\|_{r,\lambda})^q. \quad (31)$$

Так как $\Phi_{\beta}(x_{k-1}, x_k) > \Psi_{\beta}(x_{k-1}, x_k)$ при $k \in \mathbb{Z}''_{\beta}$, поступая так же, как при оценке I''_1 , имеем

$$I''_1 \ll A_2^q \sum_{k \in \mathbb{Z}''_{\beta}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} K^{\beta}(x_k, s) f(s) ds \right)^q (\Phi_{\beta}(x_{k-1}, x_k))^q.$$

Выберем $\tau = \tau_k \in (x_{k-1}, x_k)$ так, чтобы

$$\int_{x_{k-1}}^{\tau_k} K^{\beta}(x_k, s) f(s) ds = \int_{\tau_k}^{x_k} K^{\beta}(x_k, s) f(s) ds.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta}(x_{k-1}, x_k) &\leq \left(\int_{x_{k-1}}^{\tau_k} K^{\beta p'}(x_k, s) \rho^{-p'}(s) ds \right)^{-\frac{1}{p'}} \\ &\quad + K^{-\beta}(x_k, \tau_k) \left(\int_{x_k}^{\infty} K^r(x, x_k) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} I''_1 &\ll A_2^q \sum_{k \in \mathbb{Z}''_{\beta}} K^{-\beta q}(x_k, \tau_k) \left(\int_{\tau_k}^{x_k} K^{\beta}(x_k, s) f(s) ds \right)^q \left(\int_{x_k}^{\infty} K^r(x, x_k) d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \\ &\quad + A_2^q \sum_{k \in \mathbb{Z}''_{\beta}} \left(\int_{x_{k-1}}^{\tau_k} K^{\beta}(x, s) f(s) ds \right)^q \left(\int_{x_{k-1}}^{\tau_k} K^{\beta p'}(x_k, s) \rho^{-p'}(s) ds \right)^{-\frac{q}{p'}} \\ &\ll A_2^q \sum_{k \in \mathbb{Z}''_{\beta}} \left(\int_{x_k}^{\infty} K^r(x, x_k) \left(\int_{\tau_k}^{x_k} f(s) ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} + A_2^q \sum_{k \in \mathbb{Z}''_{\beta}} \left(\int_{x_{k-1}}^{\tau_k} |\rho f|^p ds \right)^{\frac{q}{p}} \\ &\ll A_2^q \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}''_{\beta}} \sum_{i \geq k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{\tau_k}^{x_k} K(x, s) f(s) ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} + A_2^q \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}''_{\beta}} \int_{x_{k-1}}^{\tau_k} |\rho f|^p ds \right)^{\frac{q}{p}} \\ &\ll A_2^q \left(\sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\sum_{k \leq i} \int_{x_{k-1}}^{x_k} K(x, s) f(s) ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \end{aligned}$$

$$+ A_2^q \left(\sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\rho f|^p ds \right)^{\frac{q}{p}} \ll A_2^q (\|\rho f\|_p + \|Kf\|_r)^q.$$

Отсюда и из (31), (30) следует, что

$$I'' \ll A_\beta^q (\|\rho f\|_p + \|Kf\|_r)^q.$$

Это неравенство вместе с (29) и (18) приводит к соотношению

$$\|K_\beta f\|_{q,\mu} \ll A_\beta (\|\rho f\|_p + \|Kf\|_r)^q.$$

Следовательно, и в случае $0 < \beta \leq 1$ доказана справедливость (4) с оценкой $A_\beta \gg C$. Теорема 1 доказана.

Так как функции $A_i(z, \beta)$, $i = 1, 2$, суть произведения двух локально ограниченных функций, конечность A_β зависит от поведения функции $A_i(z, \beta)$ на концах интервала \mathbb{R}_+ . Поэтому справедлива

Теорема 1'. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда неравенство (4) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow 0} A_i(z, \beta) < \infty, \quad i = 1, 2, \quad (32)$$

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} A_i(z, \beta) < \infty, \quad i = 1, 2. \quad (33)$$

3. В качестве примера рассмотрим неравенство

$$\|\mathcal{R}_m f\|_{q,\mu} \leq C (\|f\|_{p,\gamma} + \|\mathcal{R}_n f\|_{r,\lambda}), \quad f \geq 0, \quad (34)$$

где $m = n - k$, $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n - 1$, $d\mu(x) = x^{\mu q} dx$, $d\gamma(x) = x^{\gamma p} dx$, $d\lambda(x) = x^{\lambda r} dx$, $\mu, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$, которое эквивалентно неравенству

$$\|y^{(k)}\|_{q,\mu} \leq C (\|y^{(n)}\|_{p,\gamma} + \|y\|_{r,\lambda}), \quad y \in M. \quad (35)$$

Утверждение. Пусть $1 < p, q, r < \infty$, $q \geq \max\{p, r\}$, $m = n - k$, $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n - 1$. Тогда неравенство (34) (соответственно (35)) выполнено для всех функций $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$ ($y \in M$, $y \not\equiv 0$), для которых конечна правая часть (34) ((35)), тогда и только тогда, когда

$$\mu + m - 1 + 1/q < 0, \quad \lambda + n - 1 + 1/r < 0, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \max\{\gamma - 1 + 1/p, \lambda + n - 1 + 1/r\} &\geq \mu + m - 1 + 1/q \\ &\geq \min\{\gamma - 1 + 1/p, \lambda + n - 1 + 1/r\} \quad \text{при } \gamma < 1 - 1/p, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\lambda + n - 1 + 1/r \leq \mu + m - 1 + 1/q \quad \text{при } \gamma \geq 1 - 1/p. \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (36) эквивалентно существованию хотя бы одной функции $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$, для которой имеет место (34). Функции φ и $\varphi_\beta \equiv \varphi_m$ имеют вид

$$\varphi(z) = \inf_{0 < t < z} \left[\left(\int_t^z x^{-\gamma p'} dx \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\int_t^\infty x^{\lambda r} (x - t)^{r(n-1)} dx \right)^{\frac{1}{r}} \right]^{-1},$$

$$\varphi_m(z) = [\inf_{0 < t < z} (\Phi_m(t, z) + \Psi_k(t, z))]^{-1},$$

где $\Phi_m(t, z) = \inf_{t < \tau < z} g(t, \tau, z)$,

$$g(t, \tau, z) = \left(\int_t^\tau x^{-\gamma p'} (z-x)^{p'(m-1)} dx \right)^{-\frac{1}{p'}} + (z-\tau)^{-m+1} \left(\int_z^\infty x^{\lambda r} (x-z)^{r(n-1)} dx \right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\Psi_k(t, z) = \left(\int_t^z x^{\lambda r} (x-t)^{rk} dx \right)^{\frac{1}{r}} + (z-t)^k \left(\int_z^\infty x^{\lambda r} dx \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Произведем необходимые оценки функции φ и φ_m . Учитывая, что $\varphi_1 \approx \varphi$, в основном оцениваем функцию φ_m .

Оценим снизу функцию $\varphi_m^{-1}(z)$:

$$\Phi_m(t, z) \geq z^{-m+1} \left[\left(\int_t^z x^{-\gamma p'} dx \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\int_z^\infty x^{\lambda r} (x-z)^{r(n-1)} dx \right)^{\frac{1}{r}} \right],$$

$$\Psi_k(t, z) = z^{-m+1} \left[\left(\int_t^z x^{r\lambda} z^{r(m-1)} (x-t)^{rk} dx \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_z^\infty x^{r\lambda} [z^{m-1}(z-t)^k]^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \right]$$

$$\geq z^{-m+1} \left[\left(\int_t^z x^{r\lambda} (x-t)^{r(n-1)} dx \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_z^\infty x^{r\lambda} (z-t)^{r(n-1)} dx \right)^{\frac{1}{r}} \right].$$

Следовательно,

$$\varphi_m^{-1}(z) \gg z^{-m+1} \varphi^{-1}(z). \tag{39}$$

Если $\gamma < \frac{1}{p'}$, то

$$\varphi^{-1}(z) \gg \max\{z^{\gamma - \frac{1}{p'}}, z^{\lambda+n-1+\frac{1}{r}}\}. \tag{40}$$

При $\gamma \geq \frac{1}{p'}$ рассмотрим два случая: $z < 1$ и $z > 1$.

В случае $z < 1$

$$\varphi^{-1}(z) \gg z^{\lambda+n-1+\frac{1}{r}}. \tag{41}$$

Пусть $\gamma > \frac{1}{p'}$ и $z > 1$. Тогда

$$\varphi^{-1}(z) \gg \inf_{0 < t < z} (t^{\gamma - \frac{1}{p'}} + t^{\lambda+n-1+\frac{1}{r}}) \geq \inf_{0 < t < \infty} (t^{\gamma - \frac{1}{p'}} + t^{\lambda+n-1+\frac{1}{r}}) \gg 1. \tag{42}$$

В случае $\gamma = \frac{1}{p'}$ и $z > 1$ имеем

$$\varphi^{-1}(z) \gg \min \left\{ \inf_{0 < t < 1} t^{\lambda+n-1+\frac{1}{r}}, \inf_{1 < t < z} \left(\int_t^z \frac{dx}{x} \right)^{-\frac{1}{p'}} \right\}$$

$$= \min\{1, |\ln z|^{-\frac{1}{p'}}\} = |\ln z|^{-\frac{1}{p'}}. \tag{43}$$

Оценим сверху функцию $\varphi_m^{-1}(z)$:

$$\varphi_m^{-1}(z) \leq \Phi_m\left(\frac{1}{3}z, z\right) + \Psi_k\left(\frac{1}{3}z, z\right) \ll g\left(\frac{1}{3}z, \frac{1}{2}z, z\right) + z^{-m+\lambda+n+\frac{1}{r}}$$

$$\ll z^{-m+1} \max\{z^{\gamma - \frac{1}{p'}}, z^{\lambda+n-1+\frac{1}{r}}\}. \tag{44}$$

Из (39), (40) и (44) следует, что при $\gamma < \frac{1}{p'}$

$$\varphi_m(z) \approx z^{m-1} \min\{z^{\frac{1}{p'}-\gamma}, z^{-(\lambda+n-1+\frac{1}{r})}\}. \quad (45)$$

Если $\gamma \geq \frac{1}{p'}$ и $z < 1$, то из (39), (41) и (44) получим

$$\varphi_m(z) \approx z^{m-(\lambda+n+\frac{1}{r})}. \quad (46)$$

А в случае $z > 1$ из (39), (42) и (43) следует, что

$$\varphi_m(z) \ll z^{m-1} \quad \text{при } \gamma > 1/p', \quad (47)$$

$$\varphi_m(z) \ll z^{m-1} |\ln z|^{\frac{1}{p'}} \quad \text{при } \gamma = 1/p'. \quad (48)$$

На основании теоремы 1' неравенство (34) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow 0} A_i(z, m) < \infty, \quad i = 1, 2, \quad (49)$$

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} A_i(z, m) < \infty, \quad i = 1, 2, \quad (50)$$

где

$$A_1(z, m) = \varphi(z) \left(\int_z^\infty x^{(\mu-1)q} (x-z)^{\mu q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \approx \varphi(z) z^{\mu+m+\frac{1}{q}-1},$$

$$A_2(z, m) = \varphi_m(z) \left(\int_z^\infty x^{\mu q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \approx \varphi_m(z) z^{\mu+\frac{1}{q}}.$$

Из (36), (47) и (48) следует, что при $\gamma \geq \frac{1}{p'}$ условие (50) всегда имеет место, а из (46) вытекает, что (49) выполнено тогда и только тогда, когда $\lambda - \mu \leq \frac{1}{q} - \frac{1}{r} - k$. Если $\gamma < \frac{1}{p'}$, то ввиду (36), (45) условия (49), (50) эквивалентны соответственно правому и левому неравенствам (37). Утверждение доказано.

4. Рассмотрим неравенство

$$\|K_{\beta}^* g\|_{q\mu} \leq C(\|\rho g\|_p + \|K^* g\|_{r,\lambda}), \quad g \geq 0, \quad (51)$$

где

$$K^* g(s) = \int_s^\infty K(x, s) g(x) dx, \quad K_{\beta}^* g(s) = \int_s^\infty K^{\beta}(x, s) g(x) dx,$$

$0 \leq \beta \leq 1$, функция $K(x, s)$ непрерывна при $x \geq s > 0$ и удовлетворяет условиям (а) и (б). Предположим, что весовая функция ρ и неотрицательные борелевские меры μ, λ удовлетворяют условиям

$$\rho^{-1} \in L_{p'}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+), \quad \int_0^t d\mu(s) < \infty, \quad \int_0^t K^{\beta q}(t, s) d\mu(s) < \infty,$$

$$\int_0^t d\lambda(s) < \infty, \quad \int_0^t K^r(t, s) d\lambda(s) < \infty \quad \forall t > 0.$$

Положим

$$\varphi^*(z) = \left(\inf_{z < t < \infty} \left[\left(\int_z^t \rho^{-p'} ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\int_0^t K^r(t, s) d\lambda(s) \right)^{\frac{1}{r}} \right] \right)^{-1},$$

$$\varphi_\beta^*(z) = \left[\inf_{z < t < \infty} (\Phi_\beta(z, t) + \Psi_\beta(z, t)) \right]^{-1},$$

где

$$\Phi_\beta^*(z, t) = \inf_{z < \tau < t} \left[\left(\int_\tau^t \rho^{-p'}(x) K^{\beta p'}(x, z) dx \right)^{-\frac{1}{p'}} + K^{-\beta}(\tau, z) \left(\int_0^z K^r(z, s) d\lambda(s) \right)^{\frac{1}{r}} \right],$$

$$\Psi_\beta^*(z, t) = \left(\int_z^t K^{(1-\beta)r}(x, z) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} + K^{1-\beta}(t, z) \left(\int_0^z d\lambda(s) \right)^{\frac{1}{r}},$$

$$A_1^*(z, \beta) = \varphi^*(z) \left(\int_0^z K^{\beta q}(z, s) d\mu(s) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad A_2^*(z, \beta) = \varphi_\beta^*(z) \left(\int_0^z d\mu(s) \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_\beta^* = \max\{\sup_{z > 0} A_i^*(z, \beta), i = 1, 2\}.$$

Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 2. Пусть $1 < p, q, r < \infty$, $q \geq \max\{p, r\}$, $0 \leq \beta \leq 1$. Пусть также функция $K(x, s)$ непрерывна при $0 \leq s \leq x$ и удовлетворяет условиям (а) и (б). Тогда неравенство (51) выполнено в том и только в том случае, когда $A_\beta^* < \infty$, причем $A_\beta^* \approx C$, где C — константа в (51), наименьшая из возможных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ойнаров Р. Весовые неравенства для одного класса интегральных операторов // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 5. С. 1076–1076.
2. Ойнаров Р. Двусторонние оценки норм некоторых классов интегральных операторов // Тр. МИ РАН. 1993. Т. 204. С. 240–250.
3. Stepanov V. D. Weighted norm inequalities for integral operators and related topics // Non-linear analysis, function spaces and applications: Proc. Spring School held in Prague, May 23–28, 1994. Prague, 1994. V. 5. P. 139–175.
4. Ойнаров Р., Отелбаев М. Критерии дискретности спектра общего оператора Штурма — Лиувилля и теоремы вложения, связанные с ними // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 4. С. 584–591.
5. Oinarov R. On weighted norm inequalities with three weights // J. London Math. Soc. 1993. V. 48, N 1. P. 137–151.
6. Ойнаров Р. Об одном трехвесовом неравенстве // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1992. № 1. С. 47–51.
7. Ойнаров Р. Об одном трехвесовом обобщении неравенства Харди // Мат. заметки. 1993. Т. 54, № 2. С. 56–62.
8. Ойнаров Р., Чагиров А. А. Трехвесовое неравенство с интегральным оператором // Докл. НАН РК. 1993. № 2. С. 13–16.

Статья поступила 12 октября 2000 г.

Ойнаров Рыскул
Институт математики МОиН Республики Казахстан
ул. Пушкина, 125, Алматы 480100, Казахстан
oinarov@math.kz