Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 511.28

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ Г. ВЕЙЛЯ — И. М. ВИНОГРАДОВА

И. А. Аллаков

Аннотация: Доказано, что если $k \geq 6$, $\alpha = aq^{-1} + z$, $(a,q) = 1$, $|z| < q^{-2}$, то

$$\sum_{n \leq P} e^{2\pi i f(n)} \ll P^{1+\varepsilon}\left(Pz_0^{-1}q^{-1} + P^{-2} + qz_0P^{1-k}\right)^{\frac{4}{3}\cdot 2^{-k}},$$

где $f(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-2}x^{k-2} + \alpha_{k-3}x^{k-3} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ — полином с действительными коэффициентами и $z = \max(1; P^k|z|)$. Полученный результат при $P^3 \leq q \leq P^{k-3}$ и $|z| \leq P^{-k}$ является улучшением известной оценки Вейля о тригонометрической сумме. Библиогр. 4.

Пусть $f(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ — полином k-й степени ($k \geq 2$) с вещественными коэффициентами $\alpha_k = \alpha, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ и

$$S(f) = \sum_{n \leq P} e(f(n)). \tag{1}$$

Тогда согласно неравенству Вейля (см. [1, лемма 2.4]) при $(a,q) = 1$, $|\alpha - aq^{-1}| \leq q^{-2}$ имеем

$$S(f) \ll P^{1+\varepsilon}(q^{-1} + P^{-1} + qP^{-k})^{2^{1-k}}, \tag{2}$$

где ε — произвольное положительное число и постоянная в символе Виноградова $\ll$ зависит от k и $\varepsilon > 0$.

В настоящей работе доказана

Теорема 1. *Если $k \geq 6$, $\alpha = aq^{-1} + z$, $(a,q) = 1$, $|z| < q^{-2}$ и $\alpha_{k-1} = 0$, то*

$$S(f) \ll P^{1+\varepsilon}\left(Pz_0^{-1}q^{-1} + P^{-2} + qz_0P^{1-k}\right)^{\frac{4}{3}2^{-k}}, \tag{3}$$

где $z_0 = \max(1; P^k|z|)$.

Отсюда, в частности, следует, что

$$S(f) \ll P^{1+\varepsilon}(Pq^{-1} + P^{-2} + qP^{1-k})^{\frac{4}{3}2^{-k}}. \tag{4}$$

Оценка (4) лучше, чем оценки (2) при $P^3 \leq q \leq P^{k-3}$. Таким образом, оценка (3) является усилением оценки Вейля (2) и обобщением результата из [2, 3]. Отметим также, что полученный результат, улучшающий ранее доказанную оценку $S(f)$ методом Виноградова [4] при $6 \leq k \leq 11$, можно применять для оценки распределения дробных долей последовательности $\{f(n)\}$, а также в некоторых аддитивных задачах теории чисел. Из оценки (3), в частности, следует, что при $k \geq 6$ неравенство $\|f(n)\| \leq n^{\varepsilon - \frac{8}{3}2^{-k}}$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(x)=\alpha x^k+\alpha_{k-1}x^{k-1}+\alpha_{k-2}x^{k-2}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0$ — произвольный полином степени $k\geq 6$. Для того чтобы установить оценку (3), во-первых, используя симметричную разность

$$\Delta_h(f(x))=f(x+h)-f(x-h), \tag{5}$$

методом математической индукции покажем, что для $0\leq j\leq k$ справедливо неравенство

$$|S(f)|^{2^j}\leq 2^{2^j-1}P^{2^j-j-1}\sum_{|h_1|<P/2}\cdots\sum_{|h_j|<P/2}\Bigl|\sum_{n\in I_j}e(\Delta_j(n))\Bigr|, \tag{6}$$

где $I_1=I(h_1)\subset[1;P]$, $I_j=I(h_1,\dots,h_j)\subset I_{j-1}=I(h_1,\dots,h_{j-1})$ и $\Delta_j(n)=\Delta_{h_1}\dots\Delta_{h_j}(f(n))$.

При $j=0$ неравенство (6) очевидно. Предположим, что неравенство (6) справедливо для некоторого j, и покажем, что оно будет справедливым и для $j+1$. Так как

$$\Bigl|\sum_{n\in I_j}e(\Delta_j(n))\Bigr|\leq\sum_{i=0,1}\Bigl|\sum_{\substack{n\in I_j\\ n\equiv i(\mathrm{mod}\,2)}}e(\Delta_j(n))\Bigr|,$$

используя неравенство Коши в виде

$$\Bigl|\sum_{i=1}^{N}X_i\Bigr|^m\leq N^{m-1}\sum_{i=1}^{N}|X|^m,$$

находим

$$|S(f)|^{2^{j+1}}\leq 2^{2^{j+1}-2}P^{2^{j+1}-2j-2}\Bigl(\sum_{|h_1|<P/2}\cdots\sum_{|h_j|<P/2}\sum_{i=0,1}\Bigl|\sum_{\substack{n\in I_j\\ n\equiv i(\mathrm{mod}\,2)}}e(\Delta_j(n))\Bigr|\Bigr)^2$$

$$\leq 2^{2^{j+1}-2}P^{2^{j+1}-2j-2}\cdot P^j\cdot 2\sum_{|h_1|<P/2}\cdots\sum_{|h_j|<P/2}\sum_{i=0,1}\Bigl|\sum_{\substack{n\in I_j\\ n\equiv i(\mathrm{mod}\,2)}}e(\Delta_j(n))\Bigr|^2. \tag{7}$$

Здесь

$$\sum_{i=0,1}\Bigl|\sum_{\substack{n\in I_j\\ n\equiv i(\mathrm{mod}\,2)}}e(\Delta_j(n))\Bigr|^2=\sum_{i=0,1}\sum_{\substack{m,n\in I_j\\ m\equiv i(\mathrm{mod}\,2),n\equiv i(\mathrm{mod}\,2)}}e(\Delta_j(m)-\Delta_j(n))$$

$$=\sum_{\substack{m,n\in I_j\\ m\equiv n(\mathrm{mod}\,2)}}e(\Delta_j(m)-\Delta_j(n))=\sum_{|h|<P/2}\sum_{r\in I_{j+1}}e(\Delta_j(r+h)-\Delta_j(r-h))$$

$$=\sum_{|h|<P/2}\sum_{r\in I_{j+1}}e(\Delta_{j+1}(r)), \tag{8}$$

где $I_{j+1}=\{r:r\pm h\in I_j\}$.

Из (7) и (8) следует, что

$$|S(f)|^{2^{j+1}}\leq 2^{2^{j+1}-1}P^{2^{j+1}-j-2}\sum_{|h_1|<P/2}\cdots\sum_{|h_j|<P/2}\sum_{|h_{j+1}|<P/2}\Bigl|\sum_{r\in I_{j+1}}e(\Delta_{j+1}(r))\Bigr|,$$

т. е. неравенство (6) справедливо для $j+1$.

Таким образом, неравенство (6) справедливо для любого натурального j.

Теперь в (6) положим $j = k-3$ и рассмотрим

$$\Delta_{k-3}(n) = \Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_{k-3}}(f(n)).$$

Так как

$$(x+h)^k - (x-h)^k = 2h\bigl(C_k^1 x^{k-1} + C_k^3 x^{k-3} h^2 + C_k^5 x^{k-5} h^4 + \dots\bigr)$$
$$= 2h\Bigl(kx^{k-1} + \sum_{1 \le l \le \frac{1}{2}(k-1)} C_k^{2l+1} h^{2l} x^{k-2l-1}\Bigr),$$

то

$$\Delta_h(f(x)) = \alpha \cdot 2h\Bigl(kx^{k-1} + \sum_{1 \le l \le \frac{1}{2}(k-1)} C_k^{2l+1} h^{2l} x^{k-2l-1}\Bigr)$$
$$+ \alpha_{k-1} \cdot 2h\Bigl((k-1)x^{k-2} + \sum_{1 \le l \le \frac{1}{2}(k-2)} C_{k-1}^{2l+1} h^{2l} x^{k-2l-2}\Bigr)$$
$$+ \alpha_{k-2} \cdot 2h\Bigl((k-2)x^{k-3} + \sum_{1 \le l \le \frac{1}{2}(k-3)} C_{k-2}^{2l+1} h^{2l} x^{k-2l-3}\Bigr)$$
$$+ \dots + \alpha_2 \cdot 4hx + \alpha_1 \cdot 2h.$$

Здесь $C_m^i = \frac{m!}{i!(m-i)!}$. Отсюда

$$\Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_{k-3}}(f(x)) = 2^{k-3} h_1 \dots h_{k-3} \Bigl\{\alpha\Bigl(\frac{1}{6}k!x^3 + ax\Bigr)$$
$$+ \alpha_{k-1}\Bigl(\frac{1}{2}(k-1)!x^2 + b\Bigr) + \alpha_{k-2}(k-2)!x + \alpha_{k-3} \cdot c\Bigr\}$$
$$= 2^{k-3} h_1 \dots h_{k-3} \Bigl\{\frac{1}{6}k!\alpha_k x^3 + \frac{1}{2}(k-1)!\alpha_{k-1} x^2$$
$$+ (\alpha_k a + \alpha_{k-2}(k-1)!)x + (\alpha_{k-1} b + \alpha_{k-3} c)\Bigr\}, \quad (9)$$

где a, b, c — некоторые целые числа.

Из (6) и (9) следует, что

$$|S(f)|^{2^{k-3}} \ll P^{2^{k-3}-k+2} \sum_{|h_1|<P/2} \dots \sum_{|h_{k-3}|<P/2} \Bigl| \sum_{n \in I_{k-3}} e(2^{k-3} h_1 \dots h_{k-3}$$
$$\times \Bigl(\frac{1}{6}k!\alpha n^3 + \alpha_{k-1}\frac{1}{2}(k-1)!n^2 + (\alpha a + \alpha_{k-2}(k-2)!)n\Bigr)\Bigr|. \quad (10)$$

Для дальнейших оценок правой части (10) положим $\alpha_{k-1} = 0$, тогда из (10) получим

$$|S(f)|^{2^{k-3}} \ll P^{2^{k-3}-k+2} \sum_{|h_1|<P/2} \dots \sum_{|h_{k-3}|<P/2} \Bigl| \sum_{n \in I_{k-3}} e\Bigl(2^{k-3} h_1 \dots h_{k-3}$$
$$\times \Bigl(\frac{1}{6}k!\alpha n^3 + (\alpha a + \alpha_{k-2}(k-2)!)n\Bigr)\Bigr)\Bigr|. \quad (11)$$

Для каждого целого m пусть $L(m) = [mP^{-3}; (m+1)P^{-3}]$, и для любого действительного x пусть $m = m(x)$ — целое число, для которого $x \in L(m)$.

Положим $L(x) = L(m(x))$ и

$$T(x) = \max_{y,z} \Big| \sum_{n \in I} e(yn^3 + zn) \Big|,$$

где I — некоторый подынтервал интервала $[1; P]$, $y \in L(m)$, $z \in [0;1]$. В этих обозначениях из (11) получим

$$|S(f)|^{2^{k-3}} \ll P^{2^{k-3}-k+2} \sum_{|h_1|<P/2} \cdots \sum_{|h_{k-3}|<P/2} T(\alpha K h_1 \dots h_{k-3}), \tag{12}$$

где $K = \frac{1}{6} 2^{k-3} k!$.

Далее, полагая $h = Kh_1 h_2 \dots h_{k-3}$ и учитывая, что вклад членов в сумму правой части (12) для $h = 0$ оценивается как $\ll P^{k-4}$ и количество представлений h в указанном виде оценивается как $\ll \tau_{k-2}(h) \ll h^{\varepsilon} \ll P^{\varepsilon}$, находим

$$|S(f)|^{2^{k-3}} \ll P^{2^{k-3}-1} + P^{2^{k-3}-k+2+\varepsilon} \sum_{h=1}^{R} T(\alpha h),$$

где $R = KP^{k-3}$. Отсюда, возведя обе части в шестую степень и затем применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}
|S(f)|^{3 \cdot 2^{k-2}} &\ll P^{3 \cdot 2^{k-2}-6} + P^{3 \cdot 2^{k-2}-6k+12+6\varepsilon} \left(\sum_{h=1}^{R} T(\alpha h) \right)^6 \\
&\ll P^{3 \cdot 2^{k-2}-6} + P^{3 \cdot 2^{k-2}-6k+12+6\varepsilon} \cdot R^{6-1} \sum_{h=1}^{R} T^6(\alpha h) \\
&\ll P^{3 \cdot 2^{k-2}-6} + P^{3 \cdot 2^{k-2}-k-3+6\varepsilon} \sum_{h=1}^{R} T^6(\alpha h). \qquad (13)
\end{aligned}$$

Для оценки суммы в правой части (13) будем использовать следующие две леммы (см. [2, леммы 5, 6]).

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\sum_{m=1}^{P^3} T(mP^{-3})^6 \ll P^{7+\varepsilon}.$$

Лемма 2. *Если $\alpha = aq^{-1} + z$, $(a, q) = 1$ и $|z| \le q^{-2}$, то для любого вещественного μ и $0 < \Delta < \frac{1}{2}$ справедливы неравенства*

$$\{h \le H : \|\alpha h - \mu\| \le \Delta\} \le 4(1 + q\Delta)(1 + q^{-1}H), \tag{14}$$

$$\{h \le H : \|\alpha h - \mu\| \le \Delta\} \le 8(1 + (q|z|)^{-1}\Delta)(1 + q|z|H). \tag{15}$$

Применяя лемму 1, из (13) находим

$$|S(f)|^{3 \cdot 2^{k-2}} \ll P^{3 \cdot 2^{k-2}-6} + P^{3 \cdot 2^{k-2}-k+4+7\varepsilon} \max_{m} F(m), \tag{16}$$

где

$$F(m) = \left\{ h \le P : \alpha h \in \bigcup_{l=-\infty}^{\infty} L(m + P^3 l) \right\} \le \{h \le R : \|\alpha h - mP^{-3}\| \le P^{-3}\}.$$

Из (14) и (15) при $H = R = KP^{k-3}$, $\Delta = P^{-3}$ соответственно получим

$$F(m) \ll qP^{-3} + P^{k-4} + q^{-1}P^{k-3},$$

$$F(m) \ll q|z| \cdot P^{k-3} + P^{k-6} + q^{-1}|z|^{-1}P^{-3}.$$

Из этих оценок имеем

$$F(m) \ll qz_0P^{-3} + P^{k-6} + q^{-1}z_0P^{k-3}, \tag{17}$$

где $|z_0| = \max\{1; |z|P^k\}$.

Наконец, из (16) и (17) находим

$$|S(f)|^{3\cdot 2^{k-2}} \ll P^{3\cdot 2^{k-2}-6} + qzP^{3\cdot 2^{k-2}-k+1+7\varepsilon} + P^{3\cdot 2^{k-2}-2+7\varepsilon} + q^{-1}z_0^{-1}P^{3\cdot 2^{k-2}+1+7\varepsilon}$$
$$\ll P^{3\cdot 2^{k-2}+\varepsilon}\bigl(qz_0P^{-k+1} + P^{-2} + q^{-1}z_0^{-1}P\bigr),$$

т. е.

$$S(f) \ll P^{1+\varepsilon}\bigl(qz_0P^{-k+1} + P^{-2} + q^{-1}z_0^{-1}P\bigr)^{\frac{1}{3\cdot 2^{k-2}}},$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что произвольный полином k-й степени

$$f(x) = \alpha_kx^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \alpha_{k-2}x^{k-2} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0$$

с вещественными коэффициентами $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ при помощи преобразования $x = y - \alpha_{k-1}(k\alpha_k)^{-1}$ можно привести к виду

$$f(y) = \beta_ky^k + \beta_{k-2}y^{k-2} + \beta_{k-3}y^{k-3} \cdots + \beta_1y + \beta_0,$$

но при этом указанное преобразование не всегда будет целочисленным.

В заключение автор выражает благодарность за весьма полезные обсуждения академику АН РУз профессору А. Ф. Лаврику и профессору М. И. Израилову.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вон Р.* Метод Харди — Литтлвуда. М.: Мир, 1985.

2. *Heath-Brown D. R.* Weyl's inequality, Hua's inequality, and Waring's problem // J. London Math. Soc. 1988. V. 38, N 2. P. 216–230.

3. *Heath-Brown D. R.* Weyl's inequality and Hua's inequality // Lecture Notes Math. 1989. V. 1380. P. 87–92.

4. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 20 февраля 2001 г.

Аллаков Исмаил Аллакович
Термизский гос. университет, математический факультет, кафедра математического анализа, ул. Ф. Ходжаева, 43, Термиз 732011, Узбекистан
`ahrortmz@online.ru`