Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 533:517.958

НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ РАНГА 2 ДЕФЕКТА 1 УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

С. В. Хабиров

Аннотация: Рассматриваются трехмерные подалгебры, допускаемые уравнениями газовой динамики, имеющие инвариант время и не содержащие оператора вращения. Для таких подалгебр разыскиваются нерегулярные частично инвариантные решения ранга 2 дефекта 1. Представление решений имеет вид, обобщающий движения газа с линейным полем скоростей. Показано, что частично инвариантные решения существуют для каждой подалгебры. Описано множество таких решений. Найдены решения с таким представлением, не являющиеся частично инвариантными. Редуцируемые к инвариантным решения обобщаются в новые подмодели.

Ключевые слова: частично инвариантные решения, газовая динамика

1. Постановка задачи

Уравнения газовой динамики [1] в $\mathbb{R}^4(t,\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} &\rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho\operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\\ &p_t + \mathbf{u}\cdot\nabla p + \rho c^2\operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\\ &\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где ρ — плотность, p — давление, $\mathbf{u}$ — скорость частицы, $c^2(p,\rho) = f_\rho$ — квадрат скорости звука, $p = f(\rho, S)$ — уравнение состояния, S — энтропия, допускают 11-параметрическую группу Ли преобразований, если уравнение состояния произвольно. Алгебра Ли L_{11} этой группы в декартовой системе координат задается базисом операторов, отвечающих четырем переносам по независимым переменным, трем галилеевым переносам, трем вращениям и равномерному растяжению независимых переменных. При этом ρ, p остаются инвариантными.

В оптимальной системе подалгебр (см. [1, табл. 6]) имеется 17 трехмерных подалгебр, у которых t является инвариантом. Среди них 12 не содержат оператора вращения. Эти подалгебры имеют номера 3.34–3.45, 3.47 и являются предметом дальнейшего рассмотрения.

Поскольку в системе (1.1) имеются 9 переменных, то трехмерные подалгебры имеют 6 функционально независимых инвариантов, один из которых t, и не имеют других инвариантов, выражающихся только через независимые переменные. В этом случае можно рассмотреть инвариантные решения ранга 1,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00523) и Совета поддержки ведущих научных школ (грант 00–15–96163).

положив пять инвариантов новыми искомыми функциями от t. Это было проделано в [2]. Другие решения получаются, если положить четыре инварианта функциями от t и еще одного оставшегося инварианта I. В этом случае говорят о нерегулярном частично инвариантном решении ранга 2 (по числу новых независимых переменных t и I) дефекта 1 (по числу лишних функций $I(t,\mathbf{x})$, которые не выражены через инварианты).

Отмеченные 12 подалгебр имеют инварианты t, p, ρ и еще три инварианта, содержащих компоненты скорости. Барохронные движения $p=p(t)$ и изобарические движения $p=\mathrm{const}$ здесь не рассматриваются. Подробно такие движения изучены в [3, 4]. Если имеем $\rho(t)$, $p(t,\mathbf{x})$, то из уравнений газовой динамики (1.1) определяются p_t, ∇p и происходит редукция к инвариантному решению [5, с. 290] при поиске нерегулярных частично инвариантных решений с $I=p$. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что плотность является лишней функцией $I=\rho$.

Вычисление инвариантов для каждой из 12 подалгебр показывает, что частично инвариантные решения ранга 2 дефекта 1 имеют представление

$$\mathbf{u}=-A\mathbf{x}+\mathbf{u}_1(t,\rho),\quad p=p_1(t,\rho),\quad \rho=\rho(t,\mathbf{x}),\quad A_t=A^2. \tag{1.2}$$

Далее приводятся матрицы A для рассматриваемых подалгебр.

3.34: $A=-A_1^{-1}$, $A_1=C+D+tI$, $D=\mathrm{diag}(1,\sigma,\tau)$, $C=-C^T=E\langle\mathbf{c}\rangle$, $\mathbf{c}=(\alpha,\beta,\delta)$, где $E\langle\mathbf{c}\rangle\mathbf{a}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, C^T — транспонированная матрица, I — единичная матрица.

3.35 $\cup$ 3.36, $\alpha^2+\beta^2=1$: $A=B+C$, $B^T=B=-\mathrm{diag}((t+\alpha)^{-1},t(t^2+\beta^2)^{-1},t(t^2+\beta^2)^{-1})$, $C=E\langle\mathbf{c}\rangle$, $\mathbf{c}=\left(\beta(t^2+\beta^2)^{-1},0,0\right)$.

3.37: $A=-t^{-1}I$.

3.38: $\beta^2+\tau^2+\sigma^2=1$, $\alpha^2+\sigma^2+(\tau\beta)^2\neq 0$: $A=(\alpha t^2-\sigma t+\beta\tau)^{-1}(a_{ij})$, $\mathbf{a}_1=0$, $\mathbf{a}_2=(-\tau,\sigma-\alpha t,\alpha\tau)$, $\mathbf{a}_3=(t,-\beta,-\alpha t)$, где $\mathbf{a}_i$ — i-я строка матрицы (a_{ij}).

3.39, $\alpha\neq 0$: $A=t^{-1}(a_{ij})$, $\mathbf{a}_1=0$, $\mathbf{a}_2=(0,-1,0)$, $\mathbf{a}_3=(\alpha^{-1},0,-1)$.

3.40$\cup$3.41: $A=(t^2-\alpha)^{-1}(a_{ij})$, $\mathbf{a}_1=0$, $\mathbf{a}_2=(0,-t,\alpha)$, $\mathbf{a}_3=(0,1,-t)$.

3.42: $A=-t^{-1}\,\mathrm{diag}(0,1,1)$.

3.43: $A=t^{-1}(a_{ij})$, $\mathbf{a}_1=(-1,0,\beta)$, $\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_3=0$.

3.44: $A=-t^{-1}\,\mathrm{diag}(1,0,0)$.

3.45: $A=(a_{ij})$, $\mathbf{a}_1=(0,0,-1)$, $\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_3=0$.

3.47: $A=0$.

Замечание. В формулах (1.2) матричное уравнение Риккати имеет общее решение

$$A=-(tI+K)^{-1}, \tag{1.3}$$

где K — постоянная матрица, если $\det A\neq 0$.

При $\mathrm{rank}\,A=2$ матрица A подобна (матрица подобия постоянна) матрице с нулевой строкой $\mathbf{a}_3=0$.

Если $\det A_1\neq 0$, $A_1=(a_{kl})$, $k,l=1,2$, то $A_{1t}=A_1^2$, $\mathbf{b}_t=A_1\mathbf{b}$, где $\mathbf{b}$ — столбец (a_{13},a_{23}), с общим решением

$$A_1=-(tI+K_1)^{-1},\quad \mathbf{b}=(tI+K_1)^{-1}\mathbf{k}_2, \tag{1.4}$$

где K_1 — постоянная матрица размера 2×2, $\mathbf{k}_2$ — постоянный вектор.

Если $\det A_1=0$, то матрица A подобна матрице с нулевой строкой $\mathbf{a}_3=0$ и нулевым столбцом $\mathbf{a}^1=0$ с общим решением

$$a_{12}=C_3a_{21},\quad a_{13}=C_3a_{23}+C_4,\quad (a_{21},a_{23})=(C_1-t)^{-1}(1,C_2). \tag{1.5}$$

При $\operatorname{rank} A = 1$ матрица A подобна (матрица подобия постоянна) матрице с двумя нулевыми строками $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 = 0$, при этом $\mathbf{a}_{1t} = a_{11}\mathbf{a}_1$. Общее решение имеет вид

$$\mathbf{a}_1 = -(t - C_1)^{-1}(1, C_2, C_3). \tag{1.6}$$

В формулах (1.5), (1.6) C_i — постоянные.

Алгебраические инварианты матрицы $A = (a_{ij})$:

$$k_1 = \operatorname{tr} A, \quad k_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad k_3 = \det A$$

удовлетворяют системе уравнений

$$k_1' = k_1^2 - 2k_2, \quad k_2' = k_1 k_2 - 3k_3, \quad k_3' = k_1 k_3.$$

Решение системы таково:

при $k_3 \neq 0$: $k_1 = k_3^{-1} k_3'$, $k_3^{-1} = -t^3 + C_1 t^2 - C_2 t + C_3$, $k_2 = k_3(C_1 - 3t)$, где C_i — алгебраические инварианты матрицы K из (1.3);

при $k_3 = 0$, $k_2 \neq 0$: $k_1 = k_2^{-1} k_2'$, $k_2^{-1} = t^2 - C_1 t + C_2$, где C_i — алгебраические инварианты матрицы K_1 из (1.4);

при $k_3 = k_2 = 0$, $k_1 \neq 0$: $k_1 = k_1^{-1} k_1'$, $k_1^{-1} = C_1 - t$, что согласуется с (1.5) и (1.6).

Ставится задача нахождения всех решений вида (1.2) системы уравнений (1.1).

При $A = 0$ задача решена в [6] (см. пример 2).

2. Уравнения подмодели

Подстановка (1.2) в уравнения газовой динамики (1.1) приводит к равенствам

$$\rho_t + (\mathbf{u}_1 + \rho \mathbf{u}_{1\rho} - A\mathbf{x}) \cdot \nabla\rho - \rho \operatorname{tr} A = 0, \tag{2.1}$$

$$p_{1t} + \rho(c^2 - p_{1\rho})(\mathbf{u}_{1\rho} \cdot \nabla\rho - \operatorname{tr} A) = 0, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{u}_{1t} - \rho \mathbf{u}_{1\rho}(\mathbf{u}_{1\rho} \cdot \nabla\rho - \operatorname{tr} A) + \rho^{-1} p_{1\rho} \nabla\rho - A\mathbf{u}_1 = 0. \tag{2.3}$$

Если $c^2 \neq p_{1\rho}$, то из (2.2) определяется $\mathbf{u}_{1\rho} \cdot \nabla\rho$, а из (2.3) и (2.1) — все производные плотности ρ в случае не барохронных движений:

$$\nabla R \equiv \rho^{-1} p_{1\rho} \nabla\rho = A\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1t} - p_{1t}(c^2 - p_{1\rho})^{-1}\mathbf{u}_{1\rho} \equiv -\mathbf{U}.$$

Если матрица A отвечает некоторой подалгебре, то происходит редукция к инвариантному решению. В общем случае могут получиться новые решения, в которые включаются редуцируемые частично инвариантные решения.

Приравнивание производных $R_{ij} = R_{ji}$ дает $\mathbf{U}_\rho \times \mathbf{U} = 0$ или

$$\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1 + p_{1t}(c^2 - p_{1\rho})^{-1}\mathbf{u}_{1\rho} = n(t, \rho)\mathbf{u}_0(t). \tag{2.4}$$

В силу (2.4) из (2.1)–(2.3) следуют равенства

$$\nabla\rho = -\rho p_{1\rho}^{-1} n \mathbf{u}_0, \quad \rho_t = \rho p_{1\rho}^{-1} n \mathbf{u}_0 \cdot (\mathbf{u}_1 - A\mathbf{x}) + p_{1t}(c^2 - p_{1\rho})^{-1}, \tag{2.5}$$

$$\rho p_{1\rho}^{-1} n \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_{1\rho} + \operatorname{tr} A = p_{1t}\rho^{-1}(c^2 - p_{1\rho})^{-1}. \tag{2.6}$$

Приравнивание производных $\rho_{ti} = \rho_{it}$ дает

$$\mathbf{u}_0' - A^T\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 \operatorname{tr} A = \mathbf{u}_0 B,$$

где

$$B = \left(\ln \frac{p_{1\rho}}{n}\right)_t + \frac{p_{1t}}{c^2 - p_{1\rho}} \left(\ln \frac{p_{1\rho}}{n}\right)_\rho + \left(\frac{p_{1t}}{c^2 - p_{1\rho}}\right)_\rho .$$

Дифференцирование по ρ приводит к альтернативе $\mathbf{u}_0 B_\rho = 0$: либо $\mathbf{u}_0 = 0$, либо $\mathbf{u}_0 \neq 0$, $B = N'(t)$.

В первом случае получаются барохронные движения

$$\rho = \rho_0 k, \quad \mathbf{u}_1 = (I + tA)\mathbf{u}_{01}(s), \quad K(\rho, p_1) = K_1(s), \tag{2.7}$$

где $s = \rho k^{-1}$, K — интеграл уравнения $dp_1 = c^2(\rho, p_1) d\rho$; $\mathbf{u}_{01}(s)$, $K_1(s)$ — произвольные функции; $k(t) = \exp \int \operatorname{tr} A\, dt$ ($= k_3$ при $k_3 \neq 0$; $= k_2$ при $k_3 = 0$, $k_2 \neq 0$; $= k_1$ при $k_2 = k_3 = 0$, $k_1 \neq 0$; $= 1$ при $k_1 = 0$).

Во втором случае определяются n, $\mathbf{u}_0$ так, что

$$n\mathbf{u}_0 = p_{1\rho} \psi_\rho^{-1} k^{-1} (I + tA^T)\mathbf{u}_{00},$$

где $\mathbf{u}_{00}$ — постоянный вектор, $\psi = \psi(K)$, $K_\rho + c^2 K_{p_1} = 0$.

Подстановка в (2.4), (2.5) дает

$$\mathbf{u}_1 = (I + tA)\mathbf{u}_2(K) + \psi'(K)^{-1}(I + tA)\mathbf{N},$$

где

$$\mathbf{N} = \int k^{-1}(I + tA)^{-1}(I + tA^T)\mathbf{u}_{00}\, dt,$$

$$d(\mathbf{u}_{00} \cdot (I + tA)\mathbf{x}) = -\psi'(K)\rho^{-1} k\, dK + (I + tA^T)^2 \mathbf{u}_{00} \cdot [\mathbf{u}_2(K) + \psi'^{-1}\mathbf{N}]\, dt.$$

Условие дифференциала правой части последнего равенства имеет вид

$$\psi'(k\rho^{-1})_t = (I + tA^T)^2 \mathbf{u}_{00} \cdot (-\mathbf{u}_2' + \psi''\psi'^{-2}\mathbf{N}). \tag{2.8}$$

В силу (2.8) уравнение (2.6) определяет $p_1(t, \rho)$: $K(\rho, p_1) = K(s)$, где K, s, K_1 такие же, как в (2.7).

Левая часть равенства (2.8) обращается в нуль, и остается разделить переменные t и K в равенстве вида

$$\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(K) = 0, \quad \mathbf{a} = \big((I + tA^T)^2 \mathbf{u}_{00}, (I + tA^T)^2 \mathbf{u}_{00} \cdot \mathbf{N}\big), \quad \mathbf{b} = (-\mathbf{u}_2', \psi''\psi'^{-2}).$$

Следуя [5, с. 144], необходимо рассмотреть случаи $\mathbf{b} \in R^m \subset R^4$ для $m = 0, \dots, 4$. Тогда

$$b^j = \sum_{i=1}^m C_i^j \bar{b}^i(K), \quad \sum_{j=1}^4 a^j C_i^j = 0, \quad C_i^j = \mathrm{const}, \quad m = 1, 2, 3; \tag{2.9}$$

$$m = 0 \Longrightarrow \mathbf{b} = 0, \ \mathbf{a} \text{ любое}; \quad m = 4 \Longrightarrow \mathbf{a} = 0, \ \mathbf{b} \text{ любое}.$$

Уравнения для $\mathbf{a}$ в (2.9) являются условиями существования решений вида (1.2).

Далее рассматривается случай $c^2 = p_{1\rho}$. Из (2.2) следует $p_{1t} = 0$. При таком движении газа уравнение состояния дает $p_1(\rho) = f(\rho, S(\rho))$, т. е. $f_S S' = 0$. Значит, движение либо изэнтропическое, либо баротропное.

Вводится обозначение $c^2(p_1(\rho), \rho) = a^2(\rho) \neq 0$. Скалярное умножение (2.3) на $\mathbf{u}_{1\rho}$ дает

$$\mathbf{u}_{1\rho} \cdot (\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1) + \rho \mathbf{u}_{1\rho}^2 \operatorname{tr} A = \big(\rho \mathbf{u}_{1\rho}^2 - a^2 \rho^{-1}\big)\mathbf{u}_{1\rho} \cdot \nabla\rho. \tag{2.10}$$

Пусть $\rho^2\mathbf{u}_{1\rho}^2 \neq a^2$, тогда определяется $\mathbf{u}_{1\rho}\cdot\nabla\rho$. Из (2.3), (2.1) определяются все производные плотности. Если матрица A отвечает некоторой подалгебре, то происходит редукция к инвариантному решению.

В общем случае уравнение (2.3) принимает вид

$$\nabla R = \rho^{-1}a^2\nabla\rho = -\mathbf{U},$$

где

$$\mathbf{U} = \mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1 - \rho\mathbf{u}_{1\rho}\frac{\rho\mathbf{u}_{1\rho}\cdot(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1) + a^2\operatorname{tr}A}{\rho^2\mathbf{u}_{1\rho}^2 - a^2}.$$

Условия совместности $R_{ij} = R_{ji}$ равносильны равенству $\mathbf{U}_\rho \times \mathbf{U} = 0$ или $\mathbf{U} = n(t,\rho)\mathbf{u}_0$. Уравнение (2.1), (2.3) принимает вид

$$\nabla R = -n\mathbf{u}_0, \quad R_t = a^2\operatorname{tr}A + n\mathbf{u}_0\cdot(\mathbf{u}_1 - A\mathbf{x} + \rho\mathbf{u}_{1\rho}).$$

Условия совместности $R_{it} = R_{ti}$ дают

$$\mathbf{u}_0' - A^T\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 B,$$

где

$$B = 2a^{-1}a_\rho\rho\operatorname{tr}A + na^{-2}(\rho^2\mathbf{u}_{1\rho})_\rho\cdot\mathbf{u}_0 - n^{-1}n_t - n^{-1}n_\rho\rho\operatorname{tr}A.$$

Дифференцирование по ρ приводит к альтернативе $\mathbf{u}_0 B_\rho = 0$: либо $\mathbf{u}_0 = 0$, либо $\mathbf{u}_0 \neq 0$, $B_\rho = 0$.

В первом случае получается барохронное движение газа.

Во втором случае определяется $\mathbf{u}_0 = (I + tA^T)\mathbf{u}_{00}$, где $\mathbf{u}_{00}$ — постоянный вектор, и с обозначениями $n = a^2\varphi_s^{-1}(t,s)$, $s = \rho k^{-1}$ получается замкнутая система уравнений подмодели газовой динамики

$$\varphi_t + s^2\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{u}_{1s} = 0, \quad \varphi_s(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1) = \varphi_t\mathbf{u}_{1s} + a^2(ks)\mathbf{u}_0. \tag{2.11}$$

Решение системы (2.11) определяет плотность по формуле

$$\int s^{-1}\varphi_s\,ds = C - \mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_0,$$

где C — постоянная.

Для нередуцируемых частично инвариантных решений выполняется уравнение

$$\rho^2\mathbf{u}_{1\rho}^2 = a^2. \tag{2.12}$$

Из (2.10) следует уравнение

$$(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{u}_{1\rho} + a^2\rho^{-1}\operatorname{tr}A = 0. \tag{2.13}$$

Уравнения (2.1), (2.3) принимают вид

$$\nabla R = -\mathbf{u}_{1t} + A\mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{u}_{1\rho}, \tag{2.14}$$

$$R_t = (\mathbf{u}_1 - A\mathbf{x})\cdot(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1) - \alpha\left((\mathbf{u}_1 - A\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}_{1\rho} + a^2\rho^{-1}\right), \tag{2.15}$$

где $R = \int\rho^{-1}a^2 d\rho$, $\alpha(t,\mathbf{x})$ — произвольная неопределяемая функция (иначе происходит редукция в случае матриц A, отвечающих подалгебрам).

Совместность скалярных уравнений (2.14) $R_{ij} = R_{ji}$ приводит к равенству

$$\nabla\alpha\times\mathbf{u}_{1\rho} = \rho a^{-2}(\mathbf{u}_{1t\rho} - A\mathbf{u}_{1\rho} - \alpha\mathbf{u}_{1\rho\rho})\times(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1 - \alpha\mathbf{u}_{1\rho}). \tag{2.16}$$

Скалярное умножение на $\mathbf{u}_{1\rho}$ дает

$$(\mathbf{u}_{1\rho}, \mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{1t\rho} - A\mathbf{u}_{1\rho} - \alpha\mathbf{u}_{1\rho\rho}) = 0. \tag{2.17}$$

Отсюда

$$\mathbf{u}_{1t\rho} - A\mathbf{u}_{1\rho} - \alpha\mathbf{u}_{1\rho\rho} = C_1\mathbf{u}_{1\rho} + C_2(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1), \tag{2.18}$$

если векторы $\mathbf{u}_{1\rho}$, $\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1$ неколлинеарны. Специальный случай коллинеарных векторов, определяющийся в силу (2.12), (2.13) равенством

$$\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_{1\rho}\rho \operatorname{tr} A = 0, \tag{2.19}$$

рассматривается в п. 5.

Совместность уравнений (2.14) и (2.15) $R_{it} = R_{ti}$ приводит к равенству

$$\begin{aligned}\alpha_t\mathbf{u}_{1\rho} + ((\mathbf{u}_1 - A\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}_{1\rho} + a^2\rho^{-1})\nabla\alpha = (\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1)_t - A^T(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1)\\ - \alpha(\mathbf{u}_{1t} - A^T\mathbf{u}_1)_\rho + (\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1 - \alpha\mathbf{u}_{1\rho})[2\alpha a^{-1}a_\rho\\ + \operatorname{tr} A - \rho a^{-2}(\mathbf{u}_1 - A\mathbf{x})\cdot(\mathbf{u}_{1t\rho} - A\mathbf{u}_{1\rho} - \alpha\mathbf{u}_{1\rho\rho})]\\ + (\mathbf{u}_{1t\rho} - A\mathbf{u}_{1\rho} - \alpha\mathbf{u}_{1\rho\rho})[\rho a^{-2}(\mathbf{u}_1 - A\mathbf{x})\cdot(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1 - \alpha\mathbf{u}_{1\rho}) - \alpha].\end{aligned} \tag{2.20}$$

Векторное умножение на $\mathbf{u}_{1\rho}$ в силу (2.16), (2.17) дает

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_{1t\rho} - A\mathbf{u}_{1\rho} - \alpha\mathbf{u}_{1\rho\rho})\times(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1) = [(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1)_t - A^T(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1)]\times\mathbf{u}_{1\rho}\\ - \alpha(\mathbf{u}_{1\rho} - A^T\mathbf{u}_{1\rho})\times\mathbf{u}_{1\rho} + (\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1)\times\mathbf{u}_{1\rho}(2\alpha a^{-1}a_\rho + \operatorname{tr} A)\end{aligned} \tag{2.21}$$

или

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1)_t = A^T(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1) + \alpha(\mathbf{u}_{1t\rho} - A^T\mathbf{u}_{1\rho})\\ - (C_1 + 2\alpha a^{-1}a_\rho + \operatorname{tr} A)(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1) + C_3\mathbf{u}_{1\rho}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Уравнение (2.17) (или (2.21)) может определить $\alpha = \alpha_1(t, \rho)$. В этом «редуцируемом» случае уравнения (2.16), (2.20) принимают вид

$$\mathbf{w}_{1t} - A^T\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_1(\operatorname{tr} A + \alpha_{1\rho} + 2\alpha a^{-1}a_\rho) = \alpha_1\mathbf{w}_{1\rho}, \quad \mathbf{w}_{1\rho}\times\mathbf{w}_1 = 0,$$

где $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1 - \alpha\mathbf{u}_{1\rho}$. Отсюда

$$\mathbf{w}_1 = m(t, \rho)\mathbf{w}_0(t), \quad \mathbf{w}_0' - A^T\mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_0 \operatorname{tr} A = \mathbf{w}_0 B,$$

где $B = \alpha_{1\rho} + 2\alpha a^{-1}a_\rho - m^{-1}m_t + \alpha m^{-1}m_\rho$. Дифференцирование по ρ приводит либо к $\mathbf{w}_0 = 0$ (барохронные движения), либо к $B_\rho = 0$.

Во втором случае $\mathbf{w}_0 = k^{-1}(I + tA^T)\mathbf{w}_{00}$, $\alpha_1 = \psi_t\psi_\rho^{-1}$, $m = \psi_\rho a^{-2}$ и уравнения (2.17), (2.21) выполняются тождественно. Получаются уравнения подмодели

$$\begin{aligned}a^2\psi_\rho(\mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1) = a^2\psi_t\mathbf{u}_{1\rho} + \psi_\rho^2\mathbf{w}_0, \quad \rho^2\mathbf{u}_{1\rho}^2 = a^2,\\ a^4(\psi_t + \rho\psi_\rho \operatorname{tr} A) + \psi_\rho^2\rho^2\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{u}_{1\rho} = 0,\end{aligned} \tag{2.23}$$

которые еще надо приводить в инволюцию.

Для «нередуцируемого» случая уравнения (2.17), (2.21) тождественно выполняются по переменной α. Отсюда получаются дополнительные к (2.12), (2.13) уравнения подмодели. Эти уравнения удобно получить следующим образом. В равенствах (2.18), (2.22) надо положить $C_i = C_{1i}\alpha + C_{0i}$, $i = 1, 2, 3$, и приравнять коэффициенты при степенях α к нулю. Величины C_{1i}, C_{0i} определяются с помощью (2.12) и (2.13) и их дифференциальных следствий. Результат удобно записать в следующих обозначениях:

$$\begin{gathered} \mathbf{u}_{1\rho} = a\rho^{-1}\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}_{1t} - A\mathbf{u}_1 + \rho\mathbf{u}_{1\rho}\operatorname{tr} A = \rho a\mathbf{w}, \\ \mu = \mathbf{v}\cdot A\mathbf{w} - \mathbf{w}\cdot A\mathbf{v}, \quad \lambda = \mathbf{v}\cdot A\mathbf{v} - \rho a_\rho a^{-1}\operatorname{tr} A. \end{gathered} \tag{2.24}$$

Учитывая уравнения совместности $\mathbf{u}_{1\rho t} = \mathbf{u}_{1t\rho}$, получаем уравнения «нередуцируемой» подмодели

$$\mathbf{v}_t = A^T\mathbf{v} - \mathbf{v}(\lambda + \rho a_\rho a^{-1}\operatorname{tr} A) + \mathbf{w}(\rho^2 a_\rho a^{-1} + \rho - \lambda\operatorname{tr} A(\rho\mathbf{w}^2)^{-1}),$$

$$\begin{gathered} \mathbf{w}_t = A^T\mathbf{w} + \mathbf{w}\left[\lambda + (\rho a_\rho a^{-1} - 1)\operatorname{tr} A - \mu\operatorname{tr} A(\rho\mathbf{w}^2)^{-1}\right] \\ - \mathbf{v}\left[(\rho^2 a_\rho a^{-1} + \rho)\mathbf{w}^2 - \lambda\rho^{-1}\operatorname{tr} A + \mathbf{v}\cdot A\mathbf{w} + \mathbf{w}\cdot A\mathbf{v}\right], \\ \mathbf{v}_\rho = \lambda\mathbf{w}(\rho^2\mathbf{w}^2)^{-1}, \quad \mathbf{w}_\rho = \mu\mathbf{w}(\rho^2\mathbf{w}^2)^{-1} - \lambda\mathbf{v}\rho^{-2}, \\ \mu\mathbf{w} = \mathbf{w}^2(A^T\mathbf{v} - A\mathbf{v}), \quad \mathbf{v}^2 = 1, \quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = 0, \\ \lambda(A^T\mathbf{w} - A\mathbf{w} + \mu\mathbf{v}) = 0. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Исследование разветвляется на два случая: основной $\lambda = 0$ и альтернативный $\lambda \neq 0$.

3. Основной случай

Если $\lambda = 0$, то уравнения «нередуцируемой» подмодели дают $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(t)$, $\mathbf{w} = -\rho^{-1}(A^T\mathbf{v}_0 - A\mathbf{v}_0) + \mathbf{w}_0(t)$, $\rho a_\rho a^{-1} = 2^{-1}(\gamma - 1) = \mathrm{const}$ при $\operatorname{tr} A \neq 0$; $p = a_0^2\ln\rho + p_0$ при $\gamma = 0$; $p = \gamma^{-1}a_0^2\rho^\gamma + p_0$ при $\gamma \neq 0$.

Случай $\operatorname{tr} A = 0$, если $\rho a_\rho \neq 2^{-1}a(\gamma - 1)$, рассматривается далее. Здесь рассматривается случай $\rho a_\rho = 2^{-1}a(\gamma - 1)$ для любых значений $\operatorname{tr} A$.

Уравнения подмодели разделяются на подсистему, содержащую уравнения для $\mathbf{v}_0$:

$$\mathbf{v}_{0t} = 2^{-1}(1-\gamma)(\operatorname{tr} A\mathbf{v}_0 + A^T\mathbf{v}_0) + 2^{-1}(\gamma+1)A\mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_0^2 = 1,$$

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_0\left[(\gamma-1)(A^T\mathbf{v}_0)^2 + (\gamma+3)(A\mathbf{v}_0)^2 - 2(\gamma+1)\mathbf{v}_0\cdot A^2\mathbf{v}_0\right] + 2(\gamma-1)\operatorname{tr} A(A^T\mathbf{v}_0 - A\mathbf{v}_0) \\ = (\gamma-1)(AA^T\mathbf{v}_0 - (A^T)^2\mathbf{v}_0) + (\gamma+3)(A^TA\mathbf{v}_0 - A^2\mathbf{v}_0), \end{gathered}$$

и на уравнения, содержащие $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{w}_0$, однородные по $\mathbf{w}_0$:

$$\begin{gathered} \mathbf{w}_{0t} = A^T\mathbf{w}_0 - 2\operatorname{tr} A\mathbf{w}_0 - \mathbf{v}_0(\mathbf{v}_0\cdot A\mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_0\cdot A\mathbf{v}_0), \\ (\gamma+1)\mathbf{w}_0 = 0, \quad \mathbf{v}_0\cdot\mathbf{w}_0 = 0, \\ \mathbf{w}_0(\mathbf{v}_0\cdot A\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0\cdot A\mathbf{v}_0) = (A^T\mathbf{v}_0 - A\mathbf{v}_0)\mathbf{w}_0^2. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Пусть $A = B + C$, $B^T = B$, $C^T = -C$. Тогда $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, $B_t = B^2 + C^2$, $C_t = CB + BC$, $C\mathbf{v}_0 = \mathbf{c}\times\mathbf{v}_0$ и уравнения для $\mathbf{v}_0$ принимают вид

$$\mathbf{v}_{0t} = B\mathbf{v}_0 - 2^{-1}(\gamma-1)\operatorname{tr} B\mathbf{v}_0 + \gamma\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_0^2 = 1, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{v}_0\left[(\gamma+1)(\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_0)^2 - 2(B\mathbf{v}_0, \mathbf{c}, \mathbf{v}_0)\right] + (\gamma-1)\operatorname{tr} B\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0 = (\gamma+1)(\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_0)\mathbf{c} + 2\mathbf{c}\times B\mathbf{v}_0.$$

Скалярное умножение последнего уравнения на $\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0$ с использованием дифференциальных следствий скалярного уравнения дает

$$(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{c})\left[2B\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_0 - (\gamma-1)\operatorname{tr} B(\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_0)\right] = 0.$$

Получаются несколько случаев решения подсистемы для $\mathbf{v}_0$.

Случай (a): выполнены соотношения

$$\mathbf{c} = 0 \Longrightarrow \mathbf{v}_0 = E(t)^{-1}(I + tB)\mathbf{v}_{00}, \quad (I + tB)\mathbf{v}_{00} \cdot (I + tB)\mathbf{v}_{00} = E(t)^2, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{v}_{00}$ —постоянный вектор, $E(t) = \exp(2^{-1}(\gamma - 1)\int \operatorname{tr} B\, dt)$. Скалярное равенство представляет собой условие существования решения и фактически является уравнением для элементов матрицы $B = A$. Если вектор $\mathbf{v}_0$ определен, то из (3.1) находится $\mathbf{w}_0$. Переопределенная система (3.1) всегда имеет решение, например, $\mathbf{w}_0 = 0$ (специальный случай). Если $\mathbf{w}_0 \neq 0$, то $\gamma = -1$, $E(t) = k(t)^{-1}$ и уравнение (3.1) принимает вид

$$\mathbf{w}_{0t} = B\mathbf{w}_0 - 2\operatorname{tr} B\mathbf{w}_0 - 2\mathbf{v}_0(B\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{w}_0), \quad \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{w}_0 = 0.$$

Отсюда

$$\mathbf{w}_0 = f(t)E^2(I + tB)\mathbf{v}_{00}, \quad f' = -2fE^{-2}(\mathbf{v}_{00} \cdot B(I + tB)^2\mathbf{v}_{00}),$$
$$\mathbf{v}_{00} \cdot (I + tB)^2\mathbf{v}_{00} = 0,$$

что противоречит (3.3).

Итак, случай $\mathbf{c} = 0$ сводится к специальному случаю $\mathbf{w} = 0$.

Случай (b): выполнены соотношения

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \quad \mathbf{c} \neq 0. \tag{3.4}$$

Равенство $C_t = BC + CB$ равносильно $\mathbf{c}_t + B\mathbf{c} = \mathbf{c}\operatorname{tr} B$, поэтому (3.4) не имеет дифференциальных следствий.

Для $\mathbf{v}_0$ имеются еще два независимых уравнения (3.2).

Дифференциальное следствие скалярного уравнения таково:

$$\mathbf{v}_0 \cdot B\mathbf{v}_0 = 2^{-1}(\gamma - 1)\operatorname{tr} B.$$

Три скалярных равенства определяют $\mathbf{v}_0$. Векторное дифференциальное уравнение является условием существования решения.

Пример. Подалгебра 3.43 дает $B = -t^{-1}(b_{ij})$, $\mathbf{c} = \beta(2t)^{-1}(0, 1, 0) \neq 0$, где ненулевые элементы суть $b_{11} = -1$, $b_{13} = b_{31} = 2^{-1}\beta$. Скалярные уравнения дают

$$v_0^2 = 0, \quad \left(v_0^1\right)^2 + \left(v_0^3\right)^2 = 1, \quad \left(v_0^1\right)^2 - \beta v_0^1 v_0^3 = 2^{-1}(\gamma - 1).$$

Дифференциальные уравнения равносильны следующим:

$$(\gamma - 1)\left(v_0^3 - \beta v_0^1\right) = 0, \quad (\gamma - 3)v_0^1 + \beta(\gamma + 1)v_0^3 = 0.$$

Отсюда определяются два решения: $\gamma = 1$, $v_0^1 = \beta v_0^3 = \beta(1+\beta^2)^{-1/2}$; $v_0^3 = \beta v_0^1 = \beta(1 + \beta^2)^{-1/2}$, $\gamma = (3 - \beta^2)(1 + \beta^2)^{-1}$. Для обоих решений $\mathbf{w}_0 = 0$, а уравнения (2.24), (2.14), (2.15) определяют $\mathbf{u}_1$, ρ. В случае $\gamma = 1$ решение имеет вид

$$\mathbf{u}_1 = a_0(1 + \beta^2)^{-1/2}\ln(\rho t^{1-\beta^2})(\beta, 0, 1), \quad \beta x + z + a_0(1 + \beta^2)^{1/2}(I + t\ln t) = t\varphi(I),$$

где $\varphi(I)$ — произвольная функция, $I = t(1+\beta^2) - (1+\beta^2)^{-1/2}a_0^{-1}z + t\ln(\rho t^{1-\beta^2})$.

Случай (c): $\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_0 \neq 0 \Longrightarrow B\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_0 = 2^{-1}\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_0 \operatorname{tr} B(\gamma - 1)$, $\mathbf{v}_0 \cdot B\mathbf{v}_0 = 2^{-1}\operatorname{tr} B(\gamma - 1)$, $\mathbf{v}_0^2 = 1$. Векторное алгебраическое уравнение (3.2) векторно умножается на $\mathbf{c}$:

$$B\mathbf{v}_0 = \mathbf{c} \times \mathbf{v}_0(\mathbf{c}^2)^{-1}[(B\mathbf{v}_0, \mathbf{c}, \mathbf{v}_0) - 2^{-1}(\gamma + 1)(\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}_0)^2] + 2^{-1}(\gamma - 1)\operatorname{tr} B\mathbf{v}_0.$$

Умножим скалярно на $\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0$:

$$(B\mathbf{v}_0,\mathbf{c},\mathbf{v}_0)=2^{-1}(\gamma+1)[(\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_0)^2-\mathbf{c}^2], \tag{3.5}$$

$$B\mathbf{v}_0=-2^{-1}(\gamma+1)\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0+2^{-1}(\gamma-1)\operatorname{tr}B\mathbf{v}_0, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{v}_{0t}=2^{-1}(\gamma-1)\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0. \tag{3.7}$$

Дифференцирование (3.6) приводит к равенству

$$(\gamma-1)[B(\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0)-2^{-1}(\gamma-1)(\operatorname{tr}B)\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0-\mathbf{c}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_0)\\ +\mathbf{v}_0\left(3\mathbf{c}^2-\operatorname{tr}B^2+2^{-1}(\gamma-1)(\operatorname{tr}B)^2\right)]=0. \tag{3.8}$$

При $\gamma=1$ из (3.7), (3.6) следует, что $\mathbf{v}_0$ — постоянный вектор, $A\mathbf{v}_0=0\Longrightarrow\det A=0$ — условие существования такого решения.

При $\gamma\neq1$ скалярное умножение (3.8) на $\mathbf{v}_0$ вместе с (3.5) определяет $\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_0$:

$$(\gamma-1)(\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_0)^2=(\gamma-5)\mathbf{c}^2+2\operatorname{tr}B^2-(\gamma-1)(\operatorname{tr}B)^2. \tag{3.9}$$

Продифференцируем (3.7):

$$\mathbf{v}_{0tt}=A^T\mathbf{v}_{0t}+2^{-1}(\gamma-1)\operatorname{tr}B\mathbf{v}_{0t}.$$

Отсюда определяется $\mathbf{v}_{0t}$, и из (3.7) вытекает алгебраическое уравнение для $\mathbf{v}_0$:

$$\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0=E(t)(I+tA^T)\mathbf{v}_{00},$$

где $\mathbf{v}_{00}$ — постоянный вектор.

Векторное умножение на $\mathbf{c}$ определяет $\mathbf{v}_0$:

$$\mathbf{v}_0\mathbf{c}^2=\mathbf{c}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_0)-E\mathbf{c}\times(I+tA^T)\mathbf{v}_{00},$$

где $\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}_0$ определяется из (3.9).

Уравнение (3.6) становится условием существования решения, связывающим вектор $\mathbf{v}_{00}$ и элементы матрицы A.

Случай (d): $\operatorname{tr}A=0\Longrightarrow\mathbf{v}=\mathbf{v}_0(t)$, $\mathbf{w}=2\rho^{-1}\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0+\mathbf{w}_0(t)$, $\mathbf{v}_0\cdot B\mathbf{v}_0=0$, $\mathbf{v}_0^2=1$, $\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{w}_0=0$,

$$\mathbf{w}_0(\mathbf{w}_0,\mathbf{c},\mathbf{v}_0)=\mathbf{w}_0^2(\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0),\quad \mathbf{v}_{0t}=A^T\mathbf{v}_0+(\rho a_\rho a^{-1}+1)[\rho\mathbf{w}_0+2\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0].$$

Разделяя переменные в последнем равенстве, имеем

$$\rho(\rho-N)a_\rho=a(K-\rho),\quad N\mathbf{w}_0=-2\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0,$$

где N, K — постоянные. Отсюда

$$a=a_0\rho^{-1}(1-N\rho^{-1})^{K/N-1}\to a_0\rho^{-1}e^{-K/\rho}\quad\text{при } N\to0,$$

$$\mathbf{v}_{0t}=B\mathbf{v}_0+\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0+K\mathbf{w}_0.$$

Уравнение для $\mathbf{w}_0$ из системы (2.25) принимает вид

$$\mathbf{w}_{0t}=B\mathbf{w}_0-\mathbf{c}\times\mathbf{w}_0-\mathbf{v}_0\left[K\mathbf{w}_0^2+2\mathbf{w}_0\cdot B\mathbf{v}_0+2(\mathbf{w}_0,\mathbf{c},\mathbf{v}_0)\right].$$

Если $N\neq0$, то $\mathbf{w}_0=-2N^{-1}\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0$ и подмодель сводится к равенствам

$$B\mathbf{v}_0=(KN^{-1}-1)\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0,\quad \mathbf{v}_{0t}=-KN^{-1}\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0,\quad \mathbf{v}_0^2=1,$$

из которых получается дифференциальное следствие

$$K[B(\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0)-\mathbf{c}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0)]=0.$$

Если $K=0$, то $\mathbf{v}_0$ — единичный постоянный вектор и $A\mathbf{v}_0=0$ — условия существования решения.

Если $K\neq 0$, то можно показать, что $\mathbf{v}_0$ — единичный постоянный вектор, а $B\mathbf{v}_0=0$, $\mathbf{c}=|\mathbf{c}|\mathbf{v}_0$ — условия существования решения.

Пусть $N=0$, $K\neq 0$ (случай $K=0$ рассмотрен в пп. (a)–(c)). Тогда $\mathbf{w}_0=K^{-1}(\mathbf{v}_{0t}-B\mathbf{v}_0)$, $\mathbf{c}\times\mathbf{v}_0=0$. Если $\mathbf{c}\neq 0$, то имеем специальный случай $\mathbf{w}=0$.

При $\mathbf{c}=0$ получается переопределенная система для $\mathbf{v}_0$:

$$\mathbf{v}_0''=2B\mathbf{v}_0'-\mathbf{v}_0((\mathbf{v}_0')^2-(B\mathbf{v}_0)^2),\quad \mathbf{v}_0^2=1,\quad \mathbf{v}_0\cdot B\mathbf{v}_0=0,\quad \operatorname{tr}B=0,\quad B_t=B^2.$$

В базисе из собственных векторов матрица B диагональна: $B\mathbf{e}_i=b_i\mathbf{e}_i$. Из матричного уравнения следует $b_i'=b_i^2$, а из условия $\operatorname{tr}B=0$ получается $b_i=0$, т. е. $B=0$. Для нулевой матрицы B решение системы таково:

$$\mathbf{v}_0=\mathbf{C}_1\sin(\lambda t)+\mathbf{C}_2\cos(\lambda t),\quad \mathbf{C}_1\cdot\mathbf{C}_2=0,\quad \mathbf{C}_1^2=\mathbf{C}_2^2=1,$$

где $\lambda=\mathrm{const}$; $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ — постоянные векторы.

Равенство (2.24) дает $\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_0\rho aK^{-1}$ с точностью до несущественных постоянных. Уравнение (2.3) определяет представление для плотности

$$a(\rho+K)=-K\mathbf{v}_0'\cdot\mathbf{x}+KF(t,s),\quad s=\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{x},$$

а уравнение (2.1) окончательно определяет плотность

$$\lambda s=J\sin(\varphi(J)+\lambda t),\quad J^2=F^2+\lambda^2s^2,$$

где $\varphi(J)$ — произвольная функция.

4. Альтернативный случай ($\boldsymbol{\lambda\neq 0}$)

Вычисляя производные $\mu_\rho=\mu^2(\rho^2\mathbf{w}^2)^{-1}$, $(\mathbf{w}^2)_\rho=2\mu\rho^{-2}$ по ρ в силу (2.24), (2.25), приходим к замкнутой системе уравнений, решение которой имеет вид

$$\mathbf{w}^2=\alpha^2(t)\mu^2,\quad \mu=(\rho D(t)-1)\rho^{-1}\alpha^{-2},$$

где $D(t)$, $\alpha(t)\neq 0$ — постоянные интегрирования по ρ для не специального случая. Из (2.25) определяется

$$\mathbf{w}=\rho^{-1}(D\rho-1)(A^T\mathbf{v}-A\mathbf{v}).\tag{4.1}$$

Подстановка (4.1) в систему (2.25) приводит к системе равенств для $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}_t=A^T\mathbf{v}-\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot A\mathbf{v})+(A^T\mathbf{v}-A\mathbf{v})[(D\rho-1)(\rho a_\rho a^{-1}+1)-\alpha^2\lambda\operatorname{tr}A(D\rho-1)^{-1}],$$

$$\mathbf{v}_\rho=\alpha^2\lambda\rho^{-1}(D\rho-1)^{-1}(A^T\mathbf{v}-A\mathbf{v}),\quad \mathbf{v}^2=1,$$

$$\alpha^{-2}\mathbf{v}+A^T(A^T\mathbf{v}-A\mathbf{v})-A(A^T\mathbf{v}-A\mathbf{v})=0,\quad \alpha^{-2}=(A^T\mathbf{v})^2-2\mathbf{v}\cdot A^2\mathbf{v}+(A\mathbf{v})^2,\tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}(A^T\mathbf{v}-A\mathbf{v})&[\rho(D'+D\operatorname{tr}A)(D\rho-1)^{-1}-2\mathbf{v}\cdot A\mathbf{v}]\\&+(A^T)^2\mathbf{v}+A^TA\mathbf{v}-A^2\mathbf{v}-AA^T\mathbf{v}+\mathbf{v}\left[(A^T\mathbf{v})^2-(A\mathbf{v})^2\right]=0,\end{aligned}\tag{4.3}$$

где $\lambda + \rho a_\rho a^{-1} \operatorname{tr} A = \mathbf{v} \cdot A\mathbf{v}$. Разложение $A = B + C$ приводит (4.2) к виду

$$(\mathbf{c} \cdot \mathbf{v})[\mathbf{c} - \mathbf{v}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{v})] = 0.$$

Если $\mathbf{c} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, то $\mathbf{v} = c^{-1}\mathbf{c}$, $c = |\mathbf{c}|$. Из (4.3) следует условие существования такого решения $\mathbf{c} \times B\mathbf{c} = 0$. Дифференциальные уравнения тождественно выполняются. Из (4.1) получаем специальный случай $\mathbf{w} = 0$.

Если $\mathbf{c} \cdot \mathbf{v} = 0$, то $\alpha^{-2} = 4c^2 \neq 0$ и (4.3) перейдет в уравнение

$$D' + D \operatorname{tr} B = 0 \Longrightarrow D = D_0 k^{-1}. \tag{4.4}$$

При этом дифференциальные уравнения принимают вид

$$\mathbf{v}_\rho = -n\mathbf{c} \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_t = B\mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot B\mathbf{v}) - m\mathbf{c} \times \mathbf{v}, \tag{4.5}$$

где

$$n = \frac{\mathbf{v} \cdot B\mathbf{v} - \rho a_\rho a^{-1} \operatorname{tr} B}{2c^2 \rho (D\rho - 1)}, \quad m = -1 + 2D\rho + 2\rho a_\rho a^{-1}(D\rho - 1) - n\rho \operatorname{tr} B.$$

Дифференцирование по ρ выражений $(\mathbf{v} \cdot B\mathbf{v})$, $(B\mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{v})$ приводит к замкнутой системе уравнений для этих величин. Имеется интеграл этой системы

$$(B\mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{v})^2 + \bigl(c(\mathbf{v} \cdot B\mathbf{v}) - 2^{-1} c_t\bigr)^2 = N^2(t) c^2, \tag{4.6}$$

а уравнение для $\mathbf{v} \cdot B\mathbf{v}$ имеет вид

$$(\mathbf{v} \cdot B\mathbf{v})_\rho = -\frac{(\mathbf{v} \cdot B\mathbf{v}) - \rho a_\rho a^{-1} \operatorname{tr} B}{c^2 \rho (D\rho - 1)} (B\mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{v}). \tag{4.7}$$

Таким образом, величина $\mathbf{v} \cdot B\mathbf{v}$ определяется как функция от ρ. Дифференцирование первого уравнения (4.5) по ρ приводит к волновому уравнению $\mathbf{v}_{\theta\theta} + \mathbf{v} = 0$, где $\theta = \int cnd\rho$. Общее решение задает представление решения системы (4.5) с дополнительными условиями $\mathbf{v}^2 = 1$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{v} = 0$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_1 \sin\theta + \mathbf{V}_2 \cos\theta, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{V}_1 = 0, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{V}_2 = 0,$$

$$\mathbf{V}_1^2 = \mathbf{V}_2^2 = 1, \quad \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = 0, \quad c\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 \times \mathbf{c}, \quad c\mathbf{V}_2 = \mathbf{c} \times \mathbf{V}_1, \quad c = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{c}).$$

Второе векторное уравнение системы (4.5) равносильно скалярному равенству

$$c\theta_t = mc^2 - cN\cos(2\theta) + (\mathbf{V}_1', \mathbf{c}, \mathbf{V}_1). \tag{4.8}$$

При $N = 0$ имеем $\mathbf{v} \cdot B\mathbf{v} = c_t(2c)^{-1}$, $(B\mathbf{v}, \mathbf{c}, \mathbf{v}) = 0$,

$$\theta = c_t(2c)^{-2} \ln|D - \rho^{-1}| - \operatorname{tr} B (2c)^{-1} \int a_\rho a^{-1} (D\rho - 1)^{-1} d\rho$$

и уравнение (4.8) принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4c}\left(\frac{c_t}{c^2}\right)_t \ln\left|D - \frac{1}{\rho}\right| - \frac{1}{2c}\left(\frac{\operatorname{tr} B}{c}\right)_t \int \frac{b d\rho}{\rho(D\rho - 1)} - \frac{c_t \operatorname{tr} B D\rho}{4c^3(D\rho - 1)} \\ &- \frac{D}{2}\left(\frac{\operatorname{tr} B}{c}\right)^2 \int \frac{b d\rho}{D\rho - 1} = -1 + 2D\rho + 2b(D\rho - 1) - \frac{\operatorname{tr} B}{2c(D\rho - 1)}\left(\frac{c_t}{2c^2} - \frac{b \operatorname{tr} B}{c}\right) \\ &\qquad + \left(\frac{1}{c}\mathbf{V}_1', \frac{\mathbf{c}}{c}, \mathbf{V}_1\right), \quad b = \rho a_\rho a^{-1}, \end{aligned}$$

где переменные t, ρ необходимо разделить. Разделение переменных проводится следующим образом: сначала уравнение дифференцируем по ρ и делим на D^2, затем дифференцируем по ρ и t и делим на $D^{-1}\operatorname{tr}B$, наконец дифференцируем по t и делим на $b_\rho[8D^{-1}+2c^{-1}(c^{-1}D^{-1}\operatorname{tr}B)_t]_t$.

Анализ показывает, что решение возможно лишь в случаях нарушения одного из условий:

$$8D^{-1}+2c^{-1}(c^{-1}D^{-1}\operatorname{tr}B)_t]_t\neq 0,\quad b_\rho\neq 0,\quad \operatorname{tr}B\neq 0,\quad D\neq 0.$$

Перебор случаев приводит к следующим условиям существования решения.

1^0. $a=a_0\rho^{-1}\exp(-b_0\rho^{-1})$, $(2c)^{-1}(c^{-2}c_t)_t+(c^{-1}\operatorname{tr}B)^2=4(b_0D-1)$, $c^{-1}(c^{-1}\operatorname{tr}B)_t=4+(c^{-1}\operatorname{tr}B)^2$, $(\mathbf{V}_1',\mathbf{c},\mathbf{V}_1)+(4c)^{-1}c_t\operatorname{tr}B+c^2(2b_0D+1)=0$.

2^0. $a=a_0\rho^{-1}$, $(2c)^{-1}c_t+\operatorname{tr}B=Kc$, $(\mathbf{V}_1',\mathbf{c},\mathbf{V}_1)=2^{-1}\operatorname{tr}B(\operatorname{tr}B-Kc)$.

3^0. $\operatorname{tr}B=0$, $D=D_0\neq 0$, $a=a_0\rho^{-1}(D_0\rho-1)^\gamma+8^{-1}K(\ln|D_0-\rho^{-1}|)^2$, $(c^{-2}c_t)_t=2Kc$, $(\mathbf{V}_1',\mathbf{c},\mathbf{V}_1)=-c^2(2\gamma D_0+1)$.

4^0. $D=0$, $a=a_0\rho^{(\gamma-1)/2}$, $(2c^2)^{-1}c_t=(\gamma-1)(2c)^{-1}\operatorname{tr}B+K$, $(\mathbf{V}_1',\mathbf{c},\mathbf{V}_1)=\gamma c^2-2^{-1}K\operatorname{tr}B$.

5^0. $D=0$, $a=a_0\rho^{K_1/K}\exp(-b_0K^{-1}\rho^{-K})$, $(2c)^{-1}(c^{-2}c_t)_t=K_1(4+(c^{-2}(\operatorname{tr}B)^2)$, $K_1\operatorname{tr}B=(2c)^{-1}Kc_t+K_2c$, $(\mathbf{V}_1',\mathbf{c},\ \mathbf{V}_1)=c^2(1+2K_1K^{-1}+K_1^2(2KK_1)^{-1})+(4K_1)^{-1}K_2c_t$.

6^0. $D=0$, $a=a_0\rho^{b_0}\exp(2^{-1}K_1(\ln\rho)^2)$, $(2c)^{-1}(c^{-2}c_t)_t=4K_1+K_1^{-1}K_2^2$, $K_1\operatorname{tr}B=cK_2$, $(\mathbf{V}_1',\mathbf{c},\mathbf{V}_1)=c^2(1+2b_0+2^{-1}b_0K_1^{-2}K_2^2)-(4K_1)^{-1}K_2c_t$.

Величины с индексом нуль и K_i постоянны, а выражение для D находится из (4.4).

Дифференциальные условия существования можно привести к алгебраическим с помощью равенств $(\operatorname{tr}B)_t=\operatorname{tr}B^2-2c^2$, $\mathbf{c}_t+B\mathbf{c}=\mathbf{c}\operatorname{tr}B$, которые следуют из уравнения (1.2) для матрицы $A=B+C$.

При $N\neq 0$ для величины θ в силу (4.6), (4.7) получается уравнение

$$\theta_\rho=\frac{(2c)^{-1}c_t-b\operatorname{tr}B-N\sin(2\theta)}{2c\rho(D\rho-1)},\quad b=\rho a^{-1}a_\rho. \tag{4.9}$$

Замена $T=\operatorname{tg}\theta$ переводит (4.8), (4.9) в уравнения Риккати

$$T_\rho=\alpha(1+T^2)+\beta T,\quad T_\tau=\alpha_1-k+(\alpha_1+k)T^2+\beta_1T, \tag{4.10}$$

где $\tau=\int c\,dt$, $l(\tau)=Nc^{-1}\neq 0$,

$$\alpha=\left((2c^2)^{-1}c_t-bc^{-1}\operatorname{tr}B\right)(2\rho)^{-1}(D\rho-1)^{-1},\quad \beta=-l\rho^{-1}(D\rho-1)^{-1},$$

$$\beta_1=-\rho\beta c^{-1}\operatorname{tr}B,\quad \alpha_1=c^{-2}(\mathbf{V}_1',\mathbf{c},\mathbf{V}_1)+2D\rho-1+2b(D\rho-1)-\alpha\rho c^{-1}\operatorname{tr}B.$$

Совместность системы (4.10) сводится к квадратному уравнению

$$T^2(p+q)+Tr+p-q=0, \tag{4.11}$$

где $p=\alpha_\tau-\alpha_{1\rho}-l\beta$, $q=\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$, $r=\beta_\tau-\beta_{1\rho}-4l\alpha$. Для существования действительных решений должно быть $\Delta=r^2+4q^2-4p^2\geq 0$.

Есть несколько случаев условий существования решений системы (4.10).

1^0. Все коэффициенты уравнения (4.11) обращаются в нуль. Тогда

$$\alpha=\varphi_\rho,\quad \beta=\psi_\rho,\quad \alpha_1=\varphi_\tau-l\psi,\quad \beta_1=\psi_\tau-4l\varphi, \tag{4.12}$$

где $\varphi=\varphi_1\operatorname{ch}\tau_1+2^{-1}\chi(\varphi_1)\operatorname{sh}\tau_1$, $\psi=2\varphi_1\operatorname{sh}\tau_1+\chi(\varphi_1)\operatorname{ch}\tau_1$, $\tau_1=2\int l d\tau$; $\chi(\varphi_1)$, $\varphi_1(\tau,\rho)$ — произвольные функции. Решение системы (4.10) имеет вид $T=$

$-\operatorname{th}(2^{-1}(\tau_1-\lambda))$, где функция $\mu=\operatorname{th}(2^{-1}\lambda(\varphi_1))$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$\mu'=1+\chi'\mu+\mu^2.$$

Подстановка выражений для α, β, α_1, β_1 из (4.10) в (4.12) определяет

$$\varphi_1=\varphi_1(s),\quad s=\rho k^{-1},\quad s(D_0s-1)\varphi_{1s}=\Phi_0,\quad \chi'=X_0,$$

$$Nc^{-1}=-\Phi_0(2\operatorname{sh}\tau_1+X_0\operatorname{ch}\tau_1),\quad \tau_1=2\int N(t)\,dt,\quad N=N_0k^{-2},\quad D=D_0k^{-1},$$

$$b=-1-2^{-1}(\gamma+1)(D_0\rho-1)^{-1},\quad (\mathbf{V}_1',\mathbf{c},\mathbf{V}_1)=\gamma c^2,\quad (\gamma+1)\operatorname{tr}B=0,$$

где γ, Φ_0, X_0, N_0, D_0 — постоянные. Таким образом, решение полностью определяется.

2^0. $p+q=0$, $r\neq 0\Longrightarrow T=2qr^{-1}$.

3^0. $p=q\neq 0\Longrightarrow T=-r(2q)^{-1}$.

4^0. $p+q\neq 0\Longrightarrow T=2^{-1}(-r\pm\sqrt{\Delta})(p+q)^{-1}$, $\Delta=r^2+4q^2-4p^2$.

Подстановка выражений для T в систему (4.10) дает условия существования решения, в котором необходимо разделить переменные.

5. Специальный случай

Предполагается выполнение равенства (2.19), уравнения подмодели принимают вид $\mathbf{u}_{1\rho}^2=a^2\rho^{-2}$, $\nabla\rho=\lambda\mathbf{u}_{1\rho}$, $\rho_t=-\lambda[(\mathbf{u}_1-A\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}_{1\rho}+a^2\rho^{-1}]+\rho\operatorname{tr}A$, где $\lambda(t,\mathbf{x})=\rho^2a^{-2}\mathbf{u}_{1\rho}\cdot\nabla\rho$.

Совместность приводит к равенству $\mathbf{u}_{1\rho}=a\rho^{-1}c^{-1}\mathbf{c}$ при $c\neq 0$, из которого следует представление решения

$$\mathbf{u}_1=c^{-1}\mathbf{c}\int a\rho^{-1}d\rho+\mathbf{u}_{10}(t);$$

$$\mathbf{u}_{10}'-A\mathbf{u}_{10}=(2c^{-1}B\mathbf{c}-c^{-3}\mathbf{c}(\mathbf{c}\cdot B\mathbf{c}))\int a\rho^{-1}d\rho-ac^{-1}\mathbf{c}\operatorname{tr}B.$$

Разделение переменных в последнем равенстве приводит к следующим случаям.

1^0. $\operatorname{tr}B=0\Longrightarrow B\mathbf{c}=0$,

$$\mathbf{u}_1=c^{-1}\mathbf{c}\int a\rho^{-1}d\rho+(I+tA)\mathbf{u}_{00},$$

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}-(a+\int a\rho^{-1}d\rho)\int c\,dt+\mathbf{u}_{00}\cdot\int\mathbf{c}\,dt=\varphi(\rho),$$

где $a(\rho)$, $\varphi(\rho)$ — произвольные функции, $\mathbf{u}_{00}$ — постоянный вектор.

2^0. $\operatorname{tr}B\neq 0\Longrightarrow a=a_0\rho^{(\gamma-1)/2}$, $B\mathbf{c}=2^{-1}(\gamma-1)\mathbf{c}\operatorname{tr}B$,

$$\mathbf{u}_1=2c^{-1}\mathbf{c}a_0(\gamma-1)^{-1}\rho^{(\gamma-1)/2}+(I+tA)\mathbf{u}_{00},$$

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}k^{\gamma-2}+\varphi(\rho k^{-1})=(\gamma+1)(\gamma-1)^{-1}a_0(\rho k^{-1})^{(\gamma-1)/2}\int ck^{(3\gamma-5)/2}\,dt$$
$$+\mathbf{u}_{00}\cdot\int k^{\gamma-2}\mathbf{c}(1+2^{-1}t\operatorname{tr}B(\gamma-1))\,dt,$$

где γ, a_0 — постоянные, $\mathbf{u}_{00}$ — постоянный вектор, $\varphi(J)$ — произвольная функция.

При $c = 0$ решения уравнений подмодели таковы:

$$\mathbf{u}_1 = B_1\mathbf{u}_0(s), \quad s = \ln\rho - \int \operatorname{tr} B\,dt, \quad B_1 = I + tB;$$

$$(\mathbf{x} - t\mathbf{u}_0)\cdot B_1\mathbf{u}_0' = t\mathbf{u}_0'\cdot B_1\mathbf{u}_0' + \varphi(s),$$

где $\varphi(s)$ — произвольная функция. Условие существования решения принимает вид $a^2(\rho) = (B_1\mathbf{u}_0')^2$.

Примеры. 1. Для подалгебры 3.44 имеем $B_1 = \operatorname{diag}(0,1,1)$, $a = a_0$, $\left(u_0^2\right)' = a_0\cos\psi(s)$, $\left(u_0^3\right)' = a_0\sin\psi(s)$; $\psi(s)$, $\left(u_0^1(s)\right)'$ — произвольные функции, a_0 — постоянная.

2. Для подалгебры 3.42 будет $B_1 = \operatorname{diag}(1,0,0)$, $a = a_0$, $\left(u_0^1\right) = a_0 s + a_1$, $\left(u_0^2(s)\right)'$, $\left(u_0^3(s)\right)'$ — произвольные функции, a_0, a_1 — постоянные.

Заключение. Рассмотрение частично инвариантных решений ранга 2 дефекта 1 для трехмерных подалгебр без вращений с инвариантным временем приводит к общему представлению решений (1.2), обобщающему решения с линейным полем скоростей. В «редуцируемом» случае такое представление приводит к новым не частично инвариантным решениям и к новым подмоделям (2.11), (2.23).

Для «нередуцируемого» случая подмодель частично инвариантных решений и их обобщений является переопределенной системой (2.25). Исследование совместности приводит к интегрируемым случаям и к алгебраическим условиям существования с разделяющимися переменными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Программа подмодели. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
2. *Хабиров С. В.* Инвариантные решения ранга 1 в газовой динамике // Моделирование, вычисление, проектирование в условиях неопределенности. Уфа: УГАТУ, 2000. С. 104–115.
3. *Чупахин А. П.* О барохронных движениях газа // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 5. С. 624–626.
4. *Овсянников Л. В.* Изобарические движения газа // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1792–1799.
5. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. *Овсянников Л. В.* Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 2. С. 156–159.

Статья поступила 26 апреля 2001 г.

Хабиров Салават Валеевич
Институт механики УНЦ РАН, К. Маркса, 12, Уфа 450000
habirov@anrb.ru