Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 515.17:517.545

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ТОЧКИ ВЕЙЕРШТРАССА НА КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. В. Чуешев, Э. Х. Якубов

Аннотация: Введены мультипликативные точки Вейерштрасса и построена теория мультипликативных точек Вейерштрасса для мультипликативных мероморфных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности. Доказаны аналоги теорем Вейерштрасса и Нётера о пробелах мультипликативных функций. Получены двусторонние оценки числа мультипликативных точек Вейерштрасса и мультипликативных q-точек Вейерштрасса. Предложен метод исследования пробелов Вейерштрасса и Нётера и мультипликативных точек Вейерштрасса через фильтрации в многообразии Якоби на компактной римановой поверхности.

Ключевые слова: мультипликативные точки Вейерштрасса, компактные римановы поверхности, многообразия Якоби

Введение

Классические точки Вейерштрасса и q-точки Вейерштрасса играют большую роль в геометрической теории функций на компактных римановых поверхностях. Точки Вейерштрасса несут важную информацию о самой компактной римановой поверхности. С 1970 г. в работах Г. Э. Рауха и Х. М. Фаркаша [1–3] и с 1980 г. в работе Р. Ганнинга [4] начался современный этап развития теории дифференциалов Прима и многообразий Прима, связанных с двулистными накрытиями и тэта-функциями Римана компактных римановых поверхностей. Недавно в [5] Х. М. Фаркаш и И. Кра нашли новые интересные связи между классическими точками Вейерштрасса, q-дифференциалами Прима для нормированных характеров и тэта-функциями Римана с характеристиками на компактной римановой поверхности.

Авторы благодарят профессора Х. М. Фаркаша за возможность принять участие в работе конференции по теории римановых поверхностей в Иерусалиме в 1999 г., во время которой в основном была написана эта работа. Авторы благодарны профессору А. Д. Медных за конструктивные замечания и плодотворные дискуссии о точках Вейерштрасса на компактных римановых поверхностях.

Цель данной работы — ввести мультипликативные точки Вейерштрасса и построить по аналогии с классической теорией однозначных мероморфных функций и абелевых дифференциалов теорию мультипликативных точек Вейерштрасса для мультипликативных мероморфных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности, а также получить аналоги теорем Вейерштрасса и Нётера о пробелах и теорему о конечности числа мультипликативных точек Вейерштрасса на компактной римановой поверхности. Установлены двусторонние оценки числа мультипликативных точек Вейерштрасса и мультипликативных q-точек Вейерштрасса на компактной римановой поверхности. Введены и исследованы на наличие базисных точек канонические классы и системы дивизоров мероморфных дифференциалов Прима и мероморфных q-дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности. Предложен новый метод исследования пробелов Вейерштрасса и Нётера и мультипликативных точек Вейерштрасса через фильтрации в многообразии Якоби на компактной римановой поверхности.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $\left[F,\{a_k,b_k\}_{k=1}^g\right]$ — (фиксированная) отмеченная компактная риманова поверхность рода $g\geq 1$, где $\{a_k,b_k\}_{k=1}^g$ — канонический базис гомотопических классов петель из точки P_0 на F. Тогда первая фундаментальная группа с базисной точкой P_0 на F имеет алгебраическое представление

$$\pi_1(F,P_0)=\left\langle a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g:\prod_{j=1}^g[a_j,b_j]=1\right\rangle.$$

Эта группа изоморфна отмеченной фуксовой группе Γ первого рода, инвариантно действующей на единичном диске $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, такой, что U — универсальная накрывающая для F и Γ — группа преобразований наложения для естественной проекции $\pi:U\to U/\Gamma=F$. Выбор образующих в фундаментальной группе определяет специальный выбор образующих в группе

$$\Gamma=\left\langle A_1,\dots,A_g,B_1,\dots,B_g:\prod_{j=1}^g C_j=1\right\rangle,$$

где $C_j=[A_j,B_j]=A_jB_jA_j^{-1}B_j^{-1}$, $j=1,\dots,g$, см. [6–8].

Обозначим через $\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)$ группу всех характеров (одномерных представлений) ρ из Γ в $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ с естественной операцией умножения. Характер ρ на $\pi_1(F)=\pi_1(F,P_0)$ называется *несущественным характером на* $\pi_1(F)$, если существует $c=(c_1,\dots,c_g)\in\mathbb{C}^g$ такой, что

$$\rho(a_j)=\exp 2\pi i c_j,\quad \rho(b_j)=\exp 2\pi i\sum_{k=1}^g\pi_{jk}c_k,\quad j=1,\dots,g,\tag{1}$$

где $\Omega=(\pi_{jk})$ — матрица порядка g из b-периодов для канонического базиса $\zeta_1,\dots,\zeta_g$ голоморфных абелевых дифференциалов на F, двойственного с $\{a_k,b_k\}_{k=1}^g$ (т. е. $\int\limits_{a_k}\zeta_j=\delta_{jk}$, $\int\limits_{b_k}\zeta_j=\pi_{jk}$, $j,k=1,\dots,g$) [6, с. 129]. Несущественные характеры образуют подгруппу L_g в $\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)$. Характеры $\rho\in\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash L_g$ называются *существенными характерами*. Они имеют следующее представление:

$$\rho(a_j)=\exp 2\pi i c_j,\quad \rho(b_j)=\exp 2\pi i\left(\sum_{k=1}^g\pi_{jk}c_k+g_j\right),\quad j=1,\dots,g,\tag{2}$$

где $c=(c_1,\dots,c_g)\in\mathbb{C}^g$, $g_j\in\mathbb{C}$ и $g_j\notin\mathbb{Z}$ для некоторого j, $j=1,\dots,g$, см. [4, 9].

Мультипликативной функцией f *для* ρ *на* F называется многозначная мероморфная функция такая, что аналитическое продолжение любой ее ветви $\tilde f$ в окрестности $U(P_0)$ точки P_0 по любой петле γ из P_0 приводит к другой ее ветви $\tilde{f}(P)|_\gamma = \rho(\gamma)\tilde{f}(P)$, где $P \in U(P_0)$. По-другому, *мультипликативной функцией f для ρ на F* называется однозначная мероморфная функция f на U такая, что $f(Tz) = \rho(T)f(z)$, $z \in U$, $T \in \Gamma$.

Мероморфным q-дифференциалом Прима ϕ для ρ на F называется мероморфная однозначная дифференциальная q-форма $\phi = \phi(z)dz^q$ на U такая, что

$$\phi(Tz)(dTz)^q = \rho(T)\phi(z)dz^q, \quad z \in U, \ T \in \Gamma.$$

Если f_0 — мультипликативная функция на F без нулей и полюсов, то

$$f_0(P) = f_0(P_0)\exp\int\limits_{P_0}^{P}\sum_{j=1}^{g}2\pi i c_j\zeta_j, \quad c_j \in \mathbb{C}, \ j = 1,\dots,g, \quad P \in F, \tag{3}$$

причем характер ρ для f_0 имеет представление (1), т. е. ρ — несущественный характер на $\pi_1(F)$ (или на Γ). Такие функции f_0 называют *единицами для ρ на F* [6, с. 129].

Для мультипликативных функций f и дифференциалов Прима ϕ на F корректно определены нули и полюсы, а значит, дивизоры (f) и (ϕ) соответственно. Известно, что $\deg(f) = 0$ и $\deg(\phi) = 2g-2$ на F. В [6, с. 131] доказано, что каждый характер ρ является характером мультипликативной функции f, $f \neq 0$, на F.

Для любого дивизора D на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 1$ и любого характера ρ определены комплексное векторное пространство $L_\rho(D)$, состоящее из мультипликативных мероморфных функций f на F для ρ таких, что $(f) \geq D$, и комплексное векторное пространство $\Omega_\rho(D)$, состоящее из мультипликативных мероморфных 1-дифференциалов ϕ на F для ρ таких, что $(\phi) \geq D$. Обозначим через $r_\rho(D) = \dim_{\mathbb{C}} L_\rho(D)$, $i_\rho(D) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega_\rho(D)$ размерности этих комплексных векторных пространств, которые являются функциями на классах $[D]$ линейной эквивалентности дивизоров D на F.

Теорема (Римана — Роха для характеров [6, с. 133]). *Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g \geq 1$. Тогда для любого дивизора D на F и любого характера ρ верно равенство*

$$r_\rho(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D). \tag{4}$$

Следствие 1.1 [6, с. 134]. *Для характера ρ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 1$ верны равенства*

$$i_\rho(1) = \begin{cases} g, & \text{если } \rho \text{ — несущественный характер,} \\ g-1, & \text{если } \rho \text{ — существенный характер;} \end{cases}$$

$$r_\rho(1) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho \text{ — несущественный характер,} \\ 0, & \text{если } \rho \text{ — существенный характер.} \end{cases}$$

Теорема (Абеля для характеров [6, с. 134]). *Пусть D — дивизор на отмеченной компактной римановой поверхности $\left[F, \{a_j, b_j\}_{j=1}^g\right]$ рода $g \geq 1$ и ρ — характер. Тогда D будет дивизором мультипликативной функции f на F для характера ρ в том и только в том случае, если $\deg D = 0$ и*

$$\varphi(D) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{j=1}^{g}\log\rho(b_j)e^{(j)} - \sum_{j=1}^{g}\log\rho(a_j)\pi^{(j)}\right) \equiv \psi(\rho) \tag{5}$$

в отмеченном многообразии Якоби $J(F)$, т. е. $\mathbb{C}^g$ по модулю целочисленной решетки $L(F)$, порожденной столбцами $e^{(1)},\dots,e^{(g)}$ и $\pi^{(1)},\dots,\pi^{(g)}$ матриц a-периодов и b-периодов для канонического базиса $\zeta_1,\dots,\zeta_g$, двойственного к каноническому гомологическому базису на F, где φ — отображение Якоби для F с базисной точкой P_0.

Отображение ψ переводит характер ρ в $\varphi((f))$, где f — некоторая мультипликативная функция для ρ. Известно, что ψ задает изоморфизм фактор-группы $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)/L_g$ на группу $J(F)$ [6, с. 134].

§ 2. Мультипликативные точки Вейерштрасса для несущественного характера

Пусть ρ — несущественный характер на компактной римановой поверхности F рода $g\geq 1$. Тогда существует единица f_0 для ρ, т. е. мультипликативная функция для ρ без нулей и полюсов с $(f_0)=1$. Отсюда с помощью f_0 можно получить, что

$$L_\rho(P^{-n})\cong L(P^{-n}),\quad r_\rho(P^{-n})=r(P^{-n}),\quad \Omega_\rho(P^n)\cong\Omega(P^n),\quad i_\rho(P^n)=i(P^n)$$

для любого $n\in\mathbb{Z}$ и при любом фиксированном $P\in F$. Напомним классическую теорему о пробелах, доказательство которой, данное в [1, с. 81], в силу указанных выше причин, остается в силе для любого несущественного характера ρ. Как будет показано в следующем параграфе, этот результат перестает быть верным для существенных характеров.

Теорема 2.1 (о мультипликативных пробелах Вейерштрасса). *Для любого несущественного характера ρ и любой фиксированной точки P на компактной римановой поверхности F рода $g\geq 1$ существует точно g чисел n_i (мультипликативных пробелов Вейерштрасса), удовлетворяющих неравенствам*

$$0<n_1=1<n_2<\dots<n_g<2g, \tag{$*$}$$

которые определяются так, что не существует мероморфной мультипликативной функции для ρ на F, имеющей в качестве единственной особенности полюс точно порядка n_i в P.

Точка P называется *мультипликативной точкой* (*Вейерштрасса*) *для несущественного характера ρ на F*, если в P существует мультипликативный непробел $j, 1<j\leq g$, т. е. существует мультипликативная функция f для ρ на F с единственным полюсом в P точно порядка j, $j\leq g$. Это условие эквивалентно условию $i_{\rho^{-1}}(P^g)=i(P^g)>0$ или условию $r_\rho(P^{-g})=r(P^{-g})\geq 2$. Ясно, что для любого несущественного характера (классические) точки Вейерштрасса совпадают с мультипликативными точками (Вейерштрасса) для ρ на F и верно обратное, причем таких точек на F будет конечное число.

Замечание 2.1. Равносильны следующие свойства:

(a) число j — мультипликативный пробел в P на F для несущественного характера ρ;

(b) $r_\rho(P^{-j})-r_\rho(P^{-(j-1)})=0$;

(c) $i_{\rho^{-1}}(P^{j-1})-i_{\rho^{-1}}(P^j)=1$;

(d) существует голоморфный дифференциал Прима для ρ^{-1}, имеющий нуль точно порядка $j-1$ в P на F.

Отсюда следует, что возможные порядки нулей голоморфных дифференциалов Прима для ρ^{-1} в P суть числа $n_j - 1$, $j = 1, \dots, g$, которые удовлетворяют неравенствам

$$0 = n_1 - 1 < n_2 - 1 < \dots < n_g - 1 \leq 2g - 2,$$

где n_j — мультипликативные пробелы в P для ρ на F. Кроме того, для любого несущественного характера ρ и любой фиксированной точки P на F существует голоморфный дифференциал Прима ϕ для ρ^{-1} такой, что P не будет нулем для ϕ, т. е. $\operatorname{ord}_P \phi = 0$.

Замечание 2.2. Аналогично [6, с. 84] можно доказать, что для несущественного характера ρ и фиксированного $P \in F$ существует адаптированный базис $\phi_1, \dots, \phi_g$ в пространстве голоморфных дифференциалов Прима для ρ^{-1} на F с порядками нулей в P, удовлетворяющими неравенствам

$$0 = \mu_1(P) = \operatorname{ord}_P \phi_1 < \mu_2(P) = \operatorname{ord}_P \phi_2 < \dots < \mu_g(P) = \operatorname{ord}_P \phi_g \leq (2g - 2),$$

причем $\mu_j(P) \geq (j - 1)$, $j = 1, \dots, g$.

Замечание 2.3. Аналогично [6, с. 84] можно ввести вес $\tau_\rho(P) = \sum\limits_{j=1}^{g} (\mu_j - j + 1)$ в точке P для ρ относительно пространства $\Omega_{\rho^{-1}}(1)$ голоморфных дифференциалов Прима для ρ^{-1} и показать, что он равен порядку нуля в P для вронскиана

$$Wr_{\rho^{-1}} = \det\left[f_0^{-1}\zeta_1, \dots, f_0^{-1}\zeta_g\right] = \left(f_0^{-1}\right)^g \det[\zeta_1, \dots, \zeta_g]$$

[6, с. 85] базиса $f_0^{-1}\zeta_1, \dots, f_0^{-1}\zeta_g$ в $\Omega_{\rho^{-1}}(1)$.

Замечание 2.4. Мультипликативные непробелы в P для ρ на F образуют полугруппу по сложению. Действительно, если n_1 и n_2 — мультипликативные непробелы для ρ в P, то существуют функции f_1 и f_2 для ρ, у которых в качестве единственной особенности на F есть полюс в P порядков n_1 и n_2 соответственно. Отсюда $(n_1 + n_2)$ — мультипликативный непробел функции $f_1 f_2 / f_0$ для ρ. Поэтому сохраняются все теоремы о непробелах из [6, с. 82, 83] для несущественного характера ρ на F рода $g \geq 2$ и верны те же двусторонние оценки числа N мультипликативных точек Вейерштрасса для несущественного характера, что и двусторонние оценки при $\rho = 1$ [6, 7], а именно $2g + 2 \leq N \leq g^3 - g$.

Замечание 2.5. Для несущественного характера ρ аналогично формулируется и доказывается теорема Нётера [6, с. 81, 82] о мультипликативных пробелах Нётера для ρ, связанных с последовательностью точек $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ и с соответствующей ей последовательностью дивизоров $D_0 = 1, D_1 = P_1, \dots, D_j = P_1 \dots P_j, \dots$ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 1$.

Замечание 2.6. Аналогично вводятся мультипликативные q-точки (Вейерштрасса) ($q \geq 1$) для ρ, и они совпадают с классическими q-точками (Вейерштрасса) на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 1$ [6, с. 87] для случая несущественного характера ρ на F. Например, точка $P \in F$ называется мультипликативной q-точкой (Вейерштрасса) ($q \geq 1$) для несущественного характера ρ на F, если строго положителен ее вес $\tau_{\rho,q}(P)$ относительно пространства $\Omega_{\rho^{-1},q}(1)$ голоморфных q-дифференциалов Прима для ρ^{-1} на F. Последнее условие при $g \geq 1$ эквивалентно тому, что существует нетривиальный голоморфный q-дифференциал Прима ϕ для ρ^{-1} на F такой, что $\operatorname{ord}_P \phi \geq \dim \Omega_{\rho^{-1},q}(1) = d$, причем $d = g$ при $q = 1$ и $d = (2q - 1)(g - 1)$ при

$q > 1$. Действительно, если $\tau_{\rho,q}(P) > 0$, то существует j, $1 \le j \le d$, такое, что $\mu_j(P) > j-1$. Отсюда $\mu_d(P) > d-1$ или $\mu_d(P) \ge d$, где $\mu_d(P) = \operatorname{ord}_P \phi$, $\phi \ne 0, \phi \in \Omega_{\rho^{-1},q}(1)$.

Эти замечания позволяют установить следующие две теоремы.

Теорема 2.2. *На компактной римановой поверхности F рода $g \ge 2$ при $q \ge 1$ и несущественном характере ρ вронскиан $Wr_{\rho^{-1},q}$ некоторого базиса в $\Omega_{\rho^{-1},q}(1)$ является нетривиальным голоморфным m-дифференциалом Прима для ρ^{-d} на F, где $m = q + (q+1) + \dots + (q+d-1) = d(2q-1+d)/2$ и*

$$\sum_{P\in F} \tau_{\rho,q}(P) = \sum_{P\in F} \operatorname{ord}_P Wr_{\rho^{-1},q} = \deg(Wr_{\rho^{-1},q}) = m(2g-2) = (g-1)d(2q-1+d).$$

Теорема 2.3. *На компактной римановой поверхности F рода $g \ge 2$ для $q \ge 1$ и несущественного характера ρ верны следующие утверждения:*

1) *множество точек со строго положительными весами относительно $\Omega_{\rho^{-1},q}(1)$ конечно;*

2) *для всех точек P на F, за исключением конечного числа, для адаптированного в P базиса $\phi_1, \dots, \phi_d$ в $\Omega_{\rho^{-1},q}(1)$ верно, что*

$$\operatorname{ord}_P \phi_j = j-1, \quad j = 1, \dots, d;$$

3) *всегда существуют мультипликативные q-точки Вейерштрасса для ρ;*

4) *на компактной римановой поверхности F рода $g = 1$ не существуют мультипликативные q-точки Вейерштрасса для любого $q \ge 1$ при любом несущественном характере ρ.*

Доказательство. Утверждение 3 сразу следует из того, что любой голоморфный m-дифференциал Прима имеет нули на F при $g \ge 2$. Утверждение 4 вытекает из совпадения мультипликативных q-точек Вейерштрасса для ρ с классическими q-точками Вейерштрасса на компактной римановой поверхности F рода $g = 1$. Теорема доказана.

§ 3. Мультипликативные точки Вейерштрасса для существенного характера

В этом параграфе будет изучена структура мультипликативных точек Вейерштрасса для существенных характеров. Их свойства сильно отличаются от свойств классических точек Вейерштрасса. Напомним, что для любого абелева дифференциала ω на F верно равенство $\varphi((\omega)) = -2K$ в многообразии Якоби $J(F)$, причем явный вид вектора K констант Римана приведен в [1, с. 325].

Предложение 3.1. *Дивизор D степени $2g-2$ является дивизором мероморфного дифференциала Прима ϕ на компактной римановой поверхности F рода $g \ge 2$ для существенного характера ρ, если и только если $\varphi(D) = -2K + \psi(\rho)$, где K — вектор констант Римана с базисной точкой P_0 на F.*

Доказательство. Пусть ω_0 — абелев дифференциал на F. Тогда $f = \phi/\omega_0$ — мультипликативная функция на F для ρ. По теореме Абеля для характеров имеем $\psi(\rho) = \varphi((f)) = \varphi((\phi)) - \varphi((\omega_0)) = \varphi(D) + 2K$.

Обратно, если $\varphi(D) = -2K + \psi(\rho)$, $\deg D = 2g-2$, то, учитывая равенство $\varphi((\omega_0)) = -2K$, получаем $\varphi(D) = \varphi((\omega_0)) + \psi(\rho)$. Поэтому $\varphi(D/(\omega_0)) = \psi(\rho)$ и по теореме Абеля существует функция f для ρ такая, что $(f) = D/(\omega_0)$. Отсюда $\phi = f\omega_0$ — дифференциал Прима для ρ с $(\phi) = D$. Предложение доказано.

Пусть ρ — существенный характер на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 1$. Тогда $i_{\rho^{-1}}(1) = g - 1$, $r_\rho(1) = 0$, т. е. не существует отличной от тождественного нуля мультипликативной голоморфной функции f для ρ на F.

Далее, $r_\rho(P^{-1}) = 1 - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(P) = 2 - g + i_{\rho^{-1}}(P)$. Если $i_{\rho^{-1}}(P) = i_{\rho^{-1}}(1) = g - 1$, то $r_\rho(P^{-1}) = 1$ и существует мультипликативная функция f для ρ на F с единственным простым полюсом в P. Значит, в этом случае $n = 1$ будет мультипликативным непробелом (Вейерштрасса) в P для ρ. Если $i_{\rho^{-1}}(P) = i_{\rho^{-1}}(1) - 1 = g - 2$, то $r_\rho(P^{-1}) = 0$ и не существует мультипликативной функции f для ρ на F с единственным простым полюсом в P, тем самым $n = 1$ — мультипликативный пробел (Вейерштрасса) в P для ρ на F.

Теперь перейдем от P^{n-1} к P^n. Тогда по теореме Римана — Роха имеем

$$r_\rho(P^{-(n-1)}) = n - g + i_{\rho^{-1}}(P^{n-1}), \quad r_\rho(P^{-n}) = n + 1 - g + i_{\rho^{-1}}(P^n).$$

Если $i_{\rho^{-1}}(P^n) = i_{\rho^{-1}}(P^{n-1})$, то $r_\rho(P^{-n}) = r_\rho(P^{-(n-1)}) + 1$ и существует мультипликативная функция f для ρ на F с единственным полюсом в P точно порядка n на F, т. е. число n — мультипликативный непробел в P для ρ на F. Если $i_{\rho^{-1}}(P^n) = i_{\rho^{-1}}(P^{n-1}) - 1$, то $r_\rho(P^{-n}) = r_\rho(P^{-(n-1)})$ и не существует мультипликативной функции f для ρ на F с единственным полюсом в P точно порядка n на F, т. е. число n — мультипликативный пробел в P для ρ на F. При этом если $i_{\rho^{-1}}(P^n)$ сохраняет свое значение при увеличении n на 1, то при переходе от $L_\rho(P^{-n})$ к $L_\rho(P^{-(n+1)})$ к пространству $L_\rho(P^{-n})$ добавляется новая линейно независимая мультипликативная функция, а значит, $n + 1$ не будет мультипликативным пробелом. Заметим, что $i_{\rho^{-1}}(P^n)$ меняет свое значение $g - 1$ раз, так как $i_{\rho^{-1}}(1) = g - 1$, но $i_{\rho^{-1}}(P^{2g-1}) = 0$. Действительно, $i_{\rho^{-1}}(P^{2g-1}) = i(P^{2g-1}(f)) = 0$, где f — некоторая мультипликативная функция для ρ на F, $\deg(f) = 0$ и $\deg(P^{2g-1}(f)) = 2g - 1 > 2g - 2$. Таким образом, доказана

Теорема 3.2 (о мультипликативных пробелах Вейерштрасса). *Для любого существенного характера ρ и любой точки P на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 1$ существует $g - 1$ чисел (мультипликативных пробелов Вейерштрасса) n_i, удовлетворяющих неравенствам*

$$0 < n_1 < \cdots < n_{g-1} < 2g,$$

которые определяются так, что для каждого i, $i = 1, \dots, g - 1$, не существует мероморфной мультипликативной функции для ρ на F, имеющей в качестве единственной особенности полюс в P точно порядка n_i.

Замечание 3.1. Эту теорему о мультипликативных пробелах можно найти в [10], где неявно предполагается, что характер будет существенным, но доказательство, основанное на методах теории алгебраических функций, отличается от приведенного выше.

Замечание 3.2. В [11] показано, что для существенного характера ρ_0 на F верно равенство $i_{\rho_0^{-1}}(P^{2g-2}) = 1$ (см. табл. 3.1 в [11] для дивизоров D, $\deg D = 2g - 2$), если $\varphi(P^{2g-2}) = -2K - \psi(\rho_0)$. Поэтому нельзя заменить $2g$ на $2g - 1$ в строгих неравенствах в теореме 3.2 для этого существенного характера ρ_0 на F. Действительно, при этих условиях имеем

$$1 = i_{\rho_0^{-1}}(P^{2g-2}) = r_{\rho_0}(P^{-(2g-2)}) + g - 1 - \deg P^{2g-2}, \quad r_{\rho_0}(P^{-(2g-2)}) = g.$$

Но для любого существенного характера ρ верно равенство

$$0 = i_{\rho^{-1}}(P^{2g-1}) = r_\rho(P^{-(2g-1)}) + g - 1 - (2g-1) = r_\rho(P^{-(2g-1)}) - g,$$

$$r_{\rho_0}(P^{-(2g-1)}) = g = r_{\rho_0}(P^{-(2g-2)}).$$

Следовательно, число $n = 2g-1$ — мультипликативный пробел в P для ρ_0 при условии, что $\varphi(P^{2g-2}) = -2K - \psi(\rho_0)$.

Замечание 3.3. Если $n > g-1$ и ρ — существенный характер на F, то для мультипликативной функции f_1 для ρ^{-1} по неравенству Римана на F имеем

$$r_\rho(P^{-n}) = r(P^{-n}(f_1)) \geq n - g + 1 > 0.$$

Поэтому существует мультипликативная функция f с единственным полюсом некоторого порядка j, $j \leq n$, в P для ρ, так как $r_\rho(1) = 0$ на F.

Определение 1. Точка P на компактной римановой поверхности F рода $g > 1$ называется *мультипликативной точкой* (Вейерштрасса) для существенного характера ρ, если в ней можно задавать единственный полюс мероморфной мультипликативной функции для ρ порядка, не превышающего $g-1$.

Замечание 3.4. Равносильны следующие утверждения:

(a) число j — мультипликативный пробел в P для существенного характера ρ на F;

(b) $r_\rho(P^{-j}) - r_\rho(P^{-(j-1)}) = 0$;

(c) $i_{\rho^{-1}}(P^{j-1}) - i_{\rho^{-1}}(P^j) = 1$;

(d) существует голоморфный дифференциал Прима для ρ^{-1}, имеющий единственный нуль точно порядка $j-1$ в P.

Отсюда вытекает, что возможные порядки нулей голоморфных дифференциалов Прима для ρ^{-1} в P суть числа $n_j - 1$, которые удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq n_1 - 1 < n_2 - 1 < \cdots < n_{g-1} - 1 \leq 2g - 2,$$

где n_j — мультипликативные пробелы в P для ρ на F.

Замечание 3.5. Для любой фиксированной точки P и любого существенного характера ρ на F аналогично [6] можно доказать, что существует адаптированный в точке P базис $\phi_1, \ldots, \phi_{g-1}$ в пространстве голоморфных дифференциалов Прима для существенного характера ρ^{-1} на F с порядками $\mu_1, \ldots, \mu_{g-1}$ в точке P, которые удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \mu_1 = \operatorname{ord}_P \phi_1 < \mu_2 = \operatorname{ord}_P \phi_2 < \cdots < \mu_{g-1} = \operatorname{ord}_P \phi_{g-1} \leq 2g - 2.$$

Теорема 3.3. *Для любого существенного характера ρ на компактной римановой поверхности F рода $g > 1$ существует только конечное число мультипликативных точек Вейерштрасса.*

Доказательство. Точка P будет мультипликативной точкой (Вейерштрасса) для ρ на F тогда и только тогда, когда $1 \leq r_\rho(P^{-(g-1)})$, или же $i_{\rho^{-1}}(P^{g-1}) \geq 1 > 0$. Поэтому нужно доказать, что существует конечное число точек P на F таких, что $i_{\rho^{-1}}(P^{g-1}) > 0$ при любом существенном характере ρ на F. Предположим, что существует бесконечная последовательность мультипликативных точек (Вейерштрасса) $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ на F для ρ, т. е. точек $P_n \in F$ таких, что $i_{\rho^{-1}}(P_n^{g-1}) > 0$ для $n = 1, 2, \ldots$. Эта последовательность имеет предельную точку $P_0 \in F$. Без ограничения общности можно считать, что сходится сама эта последовательность к точке P_0. Пусть z — локальный параметр с $z(P_0) = 0$,

$z_n = z(P_n)$, $n = 1, 2, \dots$, $|z_n| < \varepsilon$, $n > N(\varepsilon)$. Базис из голоморфных дифференциалов Прима $\phi_1, \dots, \phi_{g-1}$ для ρ^{-1} запишем в виде $\phi_j = f_j(z)\,dz$, $j = 1, \dots, g-1$, в окрестности $U(P_0)$ точки P_0. Тогда $f_1, \dots, f_{g-1}$ — линейно независимые над $\mathbb{C}$ функции в $U(P_0)$. Из условия $i_{\rho^{-1}}\bigl(P_n^{g-1}\bigr) > 0$ следует существование для каждой точки z_n, $|z_n| < \varepsilon$, голоморфного дифференциала Прима

$$\phi = c_1\phi_1 + \dots + c_{g-1}\phi_{g-1} \in \Omega_{\rho^{-1}}\bigl(P_n^{g-1}\bigr), \quad \sum_{i=1}^{g-1} |c_i|^2 > 0.$$

Отсюда получим систему уравнений

$$\begin{gathered} c_1 f_1(z_n) + \dots + c_{g-1} f_{g-1}(z_n) = 0, \\ c_1 f_1'(z_n) + \dots + c_{g-1} f_{g-1}'(z_n) = 0, \\ \dots \\ c_1 f_1^{(g-2)}(z_n) + \dots + c_{g-1} f_{g-1}^{(g-2)}(z_n) = 0. \end{gathered}$$

Определитель этой системы, т. е. вронскиан системы функций $f_1, \dots, f_{g-1}$ в $U(P_0)$, обращается в нуль на последовательности точек z_n, сходящейся к 0 при $n \to \infty$. По теореме единственности он тождественно равен нулю в окрестности точки P_0. Таким образом, система функций $f_1, \dots, f_{g-1}$ линейно зависима над $\mathbb{C}$. Противоречие с выбором этих функций. Теорема доказана.

§ 4. Метод фильтрации, канонические системы дивизоров и оценки числа мультипликативных точек Вейерштрасса

Напомним некоторые свойства симметрических произведений компактной римановой поверхности F [1]. Для любого целого дивизора $D = P_1 \dots P_n$ на F степени $n \geq 1$ зададим отображение Якоби $\varphi(D) = \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_n)$ и положим $W_n = \varphi(F_n)$, где F_n — n-кратное симметрическое произведение поверхности F. Тогда

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{g-1} \subset W_g = J(F)$$

и для любого n, $1 \leq n \leq g$, W_n являются неприводимыми аналитическими множествами в $J(F)$ размерности n [6, с. 155; 12, с. 365].

По теореме Абеля для характеров существует нетривиальная мультипликативная мероморфная функция f с заданными дивизором D и характером ρ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 1$ тогда и только тогда, когда $\deg D = 0, \varphi(D) = \psi(\rho)$ в $J(F)$. Отсюда для любого существенного характера ρ существует мультипликативная функция f для ρ с заданным дивизором P_1/P $(P \neq P_1)$ в том и только в том случае, если $\varphi(P_1) - \varphi(P) = \psi(\rho) \neq 0$ в $J(F)$, или же

$$\varphi(P) + \psi(\rho) \in W_1 \backslash (W_0 + \varphi(P)). \tag{1}$$

Замечание 4.1. Разность $\varphi(P_1) - \varphi(P)$ не зависит от выбора базисной точки P_0, так как при замене P_0 на P_{00} происходит одновременный сдвиг этих величин. Правая сторона в равенстве из теоремы Абеля не зависит от P_0, так как интегралы берутся по замкнутым кривым. Наконец, включение (1) тоже не зависит от выбора базисной точки.

Если условие (1) выполняется, т. е. для заданных ρ и P существует $P_1 \neq P$, при которых верно (1) с учетом $\psi(\rho) \neq 0$ в $J(F)$, то существует мультипликативная функция f для ρ с единственным простым полюсом в P и $n = 1$ —

мультипликативный непробел в P для ρ на F. В отличие от абелева случая, т. е. $\rho = 1$, квадрат f^2 этой функции f для ρ имеет полюс второго порядка в P, но эта функция принадлежит уже другому характеру $\rho^2 \neq \rho$. Если условие (1) не выполняется ни для каких P_1, то $n = 1$ — мультипликативный пробел в P для ρ.

Возьмем j, $1 < j \leq g$. Тогда существует мультипликативная функция f для существенного характера ρ с заданным дивизором $P_1 \dots P_j P^{-j}$ $(P_k \neq P, k = 1, \dots, j)$ в том и только в том случае, если для $P_1, \dots, P_j, P_k \neq P$, $k = 1, \dots, j$, верно равенство $\varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_j) = j\varphi(P) + \psi(\rho)$ в $J(F)$, или же

$$j\varphi(P) + \psi(\rho) \in W_j \backslash (W_{j-1} + \varphi(P)). \tag{j}$$

Если выполняется условие (j), то $n = j$ — мультипликативный непробел в P для ρ на F. Если нет, то $n = j$ — мультипликативный пробел в P для ρ.

Теорема 4.1. *Для любого существенного характера ρ и любой точки P на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ верны следующие утверждения:*

1) *натуральное число j, $1 \leq j \leq g$, будет мультипликативным непробелом в P для ρ на F тогда и только тогда, когда*

$$j\varphi(P) + \psi(\rho) \in W_j \backslash (W_{j-1} + \varphi(P));$$

2) *точка P не будет мультипликативной точкой Вейерштрасса на F для ρ в том и только в том случае, если выполняются все условия*

$$j\varphi(P) + \psi(\rho) \notin W_j \backslash (W_{j-1} + \varphi(P)), \quad 1 \leq j \leq g - 1.$$

Доказательство. Утверждение 1 уже доказано. Докажем утверждение 2. Равносильны следующие утверждения:
(a) P — мультипликативная точка Вейерштрасса для ρ на F;
(b) существует j_0 — мультипликативный непробел в P для ρ, $1 \leq j_0 \leq g - 1$;
(c) существует $j_0, 1 \leq j_0 \leq g - 1$, такое, что

$$j_0\varphi(P) + \psi(\rho) \in W_{j_0}, (j_0 - 1)\varphi(P) + \psi(\rho) \notin W_{(j_0-1)}.$$

Поэтому равносильны следующие утверждения:
(a) P не является мультипликативной точкой Вейерштрасса для ρ на F;
(b) любое j, $1 \leq j \leq g - 1$, — мультипликативный пробел в P для ρ;
(c) при всех j, $1 \leq j \leq g - 1$, выполняются условия $j\varphi(P) + \psi(\rho) \notin W_j \backslash (W_{j-1} + \varphi(P))$.
Теорема доказана.

Замечание 4.2. 1. Из теоремы 4.1 следует, что в теореме о мультипликативных пробелах в P для существенного характера ρ число $n_1 = 1$ является мультипликативным пробелом в P для ρ, если и только если $\varphi(P) + \psi(\rho) \notin W_1$. Известно, что ψ — изоморфизм фактор-группы $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)/L_g$ на группу $J(F) = W_g$ [6, с. 134]. Если P фиксировано, $\psi(\rho) \neq 0$ и $\psi(\rho) + \varphi(P) = \varphi(P_1) \in W_1$, то $P_1 \neq P$ и найдется существенный характер ρ_0 такой, что $\varphi(P_1) - \varphi(P) = \psi(\rho_0) = \psi(\rho_0 L_g)$ и $\rho = \rho_0\rho_1$, где $\rho_1 \in L_g$. Следовательно, $n_1(P, \rho) = 1$ — мультипликативный непробел в P для таких ρ на F. Поэтому в общем случае для нижней строгой оценки (в последовательности мультипликативных пробелов в P) нельзя заменить 0 на 1.

2. Из предыдущего также вытекает, что нижнее число возможных порядков голоморфных дифференциалов Прима для существенного характера ρ в точке P равно 0, т. е. существует голоморфный дифференциал Прима ϕ для ρ такой, что $P \notin (\phi)$, если и только если $-\psi(\rho) + \varphi(P) \notin W_1$, что равносильно выполнению равенства $i_\rho(P) = g - 2$. Последние утверждения следуют из теоремы Римана — Роха для характеров и предыдущей теоремы, так как

$$r_{\rho^{-1}}(P^{-1}) = 1 - g + 1 + i_\rho(P),$$

$$i_\rho(P) = g - 2 + \begin{cases} 0, & \text{если } \ -\psi(\rho) + \varphi(P) \notin W_1, \\ 1, & \text{если } \ -\psi(\rho) + \varphi(P) \in W_1. \end{cases}$$

3. Число мультипликативных точек Вейерштрасса P для фиксированного существенного характера ρ на F равно числу различных решений, т. е. точек P на F, удовлетворяющих хотя бы одному из следующих включений:

$$\varphi(P) + \psi(\rho) \in W_1, \tag{1}$$

$$2\varphi(P) + \psi(\rho) \in W_2, \tag{2}$$

$$\dots$$

$$(g-1)\varphi(P) + \psi(\rho) \in W_{g-1}, \tag{$g-1$}$$

где $\psi(\rho) \neq 0$.

Предложение 4.2 (ср. [7, с. 301]). *Для любого характера ρ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ и любого строго целого дивизора D, т. е. $D \geq 1, D \neq 1$, верны следующие утверждения:*

$$i_{\rho^{-1}}(D) \leq i_{\rho^{-1}}(1) = \begin{cases} g, & \textit{если } \rho \in L_g, \\ g-1, & \textit{если } \rho \notin L_g; \end{cases}$$

$$\deg D - g + 1 \leq r_\rho(D^{-1}) \leq \deg D.$$

Доказательство. По теореме Римана — Роха для характера ρ и условию $D = P_1 \dots > 1$ имеем

$$r_\rho(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D) \leq \begin{cases} \deg D + 1, & \text{если } \rho \in L_g, \\ \deg D, & \text{если } \rho \notin L_g, \end{cases}$$

так как

$$i_{\rho^{-1}}(D) \leq i_{\rho^{-1}}(P_1) \leq i_{\rho^{-1}}(1) = \begin{cases} g, & \text{если } \rho \in L_g, \\ g-1, & \text{если } \rho \notin L_g. \end{cases}$$

Для несущественного характера ρ при любом $P_1 \in F$ верно неравенство

$$i_{\rho^{-1}}(D) \leq i(P_1) = g - 1 < i(1) = g$$

и $i_{\rho^{-1}}(D) - (g-1) \leq 0$. Предложение доказано.

Теорема 4.3. *Для любого существенного характера ρ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ существуют $g-1$ различных точек $P_1, \dots, P_{g-1}$ таких, что не существует мультипликативных функций для ρ на F, особенностями которых являются только полюсы порядка не выше 1 в этих точках.*

Доказательство 1. Для любого целого дивизора D верно неравенство $r_\rho(D^{-1}) \geq 0$ и, следовательно, $\deg D - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D) \geq 0$. Поэтому $i_{\rho^{-1}}(D) \geq (g-1) - \deg D$.

Пусть $D = P_1 \dots P_n$ для различных точек $P_1, \dots, P_n$. Тогда

$$\deg D = n, i_{\rho^{-1}}(D) \geq (g-1) - n.$$

Это утверждение содержательно только при $g - 1 \geq n \geq 1$. Для любой точки P_1 имеем $g - 1 \geq i_{\rho^{-1}}(P_1) \geq (g-1) - 1$. Но существует точка P_1 такая, что $i_{\rho^{-1}}(P_1) < g - 1$, ввиду того, что

$$i_{\rho^{-1}}(P_1) = r_\rho\bigl(P_1^{-1}\bigr) + g - 2 = g - 2$$

при $\psi(\rho) + \varphi(P_1) \notin W_1$. Последнее условие не выполняется только в конечном числе точек, которые из-за $n_1 = 1 \leq g - 1$, являются мультипликативными точками Вейерштрасса для ρ на F.

Включение $\Omega_{\rho^{-1}}(P_1P_2) \subset \Omega_{\rho^{-1}}(P_1)$ очевидно. При $g \geq 3$ в пространстве $\Omega_{\rho^{-1}}(P_1)$ существует голоморфный дифференциал Прима $\phi \neq 0$ для ρ^{-1} и существует P_2 с условием, что $P_2 \notin (\phi)$. Тогда для такого P_2 имеем $g - 2 \geq i_{\rho^{-1}}(P_1P_2) \geq (g-1) - 2$ и $i_{\rho^{-1}}(P_1P_2) = g - 3$. Продолжая, на n-м шаге получим точки $P_1, \dots, P_n \in F$ такие, что $i_{\rho^{-1}}(P_1 \dots P_n) = (g-1) - n$. В частности, существуют $g - 1$ различных точек таких, что

$$r_\rho((P_1 \dots P_{g-1})^{-1}) = i_{\rho^{-1}}(P_1 \dots P_{g-1}) = 0.$$

Доказательство 2. Для дивизора $D = P_1 \dots P_{g-1}$ по теореме Римана — Роха равенство $i_{\rho^{-1}}(P_1 \dots P_{g-1}) = 0$ равносильно тому, что $r_\rho((P_1 \dots P_{g-1})^{-1}) = 0$, а это равносильно соотношению $\psi(\rho) + \varphi(P_1 \dots P_{g-1}) \notin W_{g-1}$.

Рассуждаем от противного. Если для любого дивизора $D = P_1 \dots P_{g-1}$ верно неравенство $i_{\rho^{-1}}(P_1 \dots P_{g-1}) \geq 1$, то существует голоморфный дифференциал Прима ϕ для ρ^{-1} с $(\phi) = P_1 \dots P_{g-1}Q_1 \dots Q_{g-1}$ и по предложению 3.1 $\varphi((\phi)) = -2K - \psi(\rho)$, или $\varphi(P_1 \dots P_{g-1}Q_1 \dots Q_{g-1}) = -2K - \psi(\rho)$ в $J(F)$. Но дивизор $P_1 \dots P_{g-1}Q_1 \dots Q_{g-1}$ на F имеет $g-1$ свободных (первых) точек, а значит, является дивизором абелева дифференциала ω_0 и $\varphi((\omega_0)) = -2K$ в $J(F)$ [6]. Отсюда $\psi(\rho) = 0$ и ρ — несущественный характер; противоречие. Таким образом, существует дивизор $D = P_1 \dots P_{g-1}$ такой, что $i_{\rho^{-1}}(P_1 \dots P_{g-1}) = 0$, или $\psi(\rho) + \varphi(P_1 \dots P_{g-1}) \notin W_{g-1}$.

Если найденный дивизор $D = P_1 \dots P_{g-1}$ имеет кратные точки, то в достаточно малой окрестности $U(D)$ точки D в F_{g-1} существует дивизор $D' = P'_1 \dots P'_{g-1}$ с попарно различными точками, удовлетворяющий условию $\psi(\rho) + \varphi(D') \notin W_{g-1}$, так как существует окрестность $U(DP_0)$ в F_g такая, что $\psi(\rho) + \varphi(\widetilde{D}) \notin W_{g-1}$ для любого $\widetilde{D} \in U(DP_0)$. Значит, существует $\widetilde{D}' = D'P_0 \in U(DP_0)$ такой, что $\psi(\rho) + \varphi(D') \notin W_{g-1}$ и $D' = P'_1 \dots P'_{g-1}$ состоит из попарно различных точек. Это следует из того, что такие $\widetilde{D}' = D'P_0$ из $U(DP_0)$ образуют всюду плотное подмножество в $U(DP_0) \cap (F_{g-1} \times P_0)$.

Доказательство 3. По теореме Абеля для характеров соотношение $r_\rho((P_1 \dots P_{g-1})^{-1}) \geq 1$ равносильно существованию $f \neq 0$ для ρ на F с $(f) = Q_1 \dots Q_{g-1}/P_1 \dots P_{g-1}$, что эквивалентно соотношению $\varphi(Q_1 \dots Q_{g-1}) = \psi(\rho) + \varphi(P_1 \dots P_{g-1}) \in W_{g-1}$. Если последнее выполняется для любых попарно различных $P_1, \dots, P_{g-1}$, то $\psi(\rho) + W_{g-1} \subset W_{g-1}$. Поэтому $\psi(\rho) = 0$ в $J(F)$ в силу плотности множества из $\varphi(P_1 \dots P_{g-1})$ в W_{g-1} для попарно различных точек $P_1, \dots, P_{g-1}$ на F и неприводимости W_{g-1}, а также того факта, что W_{g-1} не инвариантно относительно сдвига на фиксированный ненулевой элемент $\psi(\rho)$ при заданном ρ [12]. Но ρ — существенный характер, а значит, $\psi(\rho) \neq 0$ в $J(F)$.

Противоречие. Тем самым существуют попарно различные точки $P_1, \dots, P_{g-1}$ на F такие, что $r_\rho((P_1 \dots P_{g-1})^{-1}) = 0$. Теорема доказана.

Замечание 4.3. Последняя теорема и ее доказательство 1 дают способ выбора $P_1, \dots, P_{g-1}$ таких, что $i_{\rho^{-1}}(P_1 \dots P_{g-1}) = 0 = r_\rho((P_1 \dots P_{g-1})^{-1})$. Это также способ выбора мультипликативно неспециального дивизора $D = P_1 \dots P_{g-1}$ степени $g-1$, т. е. $i_{\rho^{-1}}(D) = 0$, для заданного существенного характера ρ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$.

Следствие 4.4. *Для любого существенного характера ρ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ и натурального числа $n, 1 \leq n \leq g-1$, существует целый дивизор $P_1 \dots P_n$ с попарно различными точками такой, что $r_\rho((P_1 \dots P_n)^{-1}) = 0$.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 4.3 следует существование $P_1, \dots, P_n$ попарно различных точек на F для существенного характера ρ такого, что $i_{\rho^{-1}}(P_1 \dots P_n) = g-1-n$. Отсюда по теореме Римана — Роха имеем равенство $r_\rho((P_1 \dots P_n)^{-1}) = 0$. Следствие доказано.

Предложение 4.5. *Если $\deg D \geq g$ у дивизора D, то существует нетривиальная мультипликативная мероморфная функция из пространства $L_\rho(D^{-1})$ для любого существенного характера ρ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$.*

Доказательство сразу следует из неравенства $r_\rho(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D) \geq 1$.

Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g \geq 1$, ρ — существенный характер и $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ — произвольная последовательность точек на F. Для нее определим последовательность дивизоров на F, полагая $D_0 = 1$, $D_{j+1} = D_j P_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots$.

Задачаj $(j = 1, 2, \dots)$. Существует ли мультипликативная функция

$$f \in L_\rho(D_j^{-1}) \backslash L_\rho(D_{j-1}^{-1}),$$

т. е. нетривиальная мероморфная мультипликативная функция f на F для ρ, такая, что (f) кратно D_j^{-1}, но (f) не кратно D_{j-1}^{-1}.

Теорема 4.6 (о мультипликативных пробелах Нётера). *Для любой последовательности точек $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 1$ и любого существенного характера ρ существует точно $g-1$ чисел n_i, удовлетворяющих неравенству*

$$0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{g-1} < 2g, \tag{$*$}$$

таких, что ответ на задачу j отрицательный, если и только если j — одно из таких чисел n_i, $i = 1, \dots, g-1$.

Доказательство. Число j назовем *мультипликативным пробелом Нётера* данной последовательности точек для ρ, если ответ на задачу j будет отрицательным.

Ответ на задачу 1 отрицателен тогда и только тогда, когда не существует функции $f \in L_\rho(P_1^{-1}) \backslash L_\rho(1)$, что равносильно выполнению равенства $r_\rho(P_1^{-1}) - r_\rho(1) = 0$. Здесь $r_\rho(1) = 0$.

Ответ на задачу 1 положителен в том и только в том случае, если существует функция $f \in L_\rho(P_1^{-1}) \backslash L_\rho(1)$, что равносильно выполнению равенства $r_\rho(P_1^{-1}) - r_\rho(1) = 1$.

Ответ на задачу j отрицателен тогда и только тогда, когда не существует функции $f \in L_\rho(D_j^{-1})\backslash L_\rho(D_{j-1}^{-1})$, что равносильно выполнению равенства $r_\rho(D_j^{-1}) - r_\rho(D_{j-1}^{-1}) = 0$.

Ответ на задачу j положителен в том и только в том случае, если существует функция $f \in L_\rho(D_j^{-1})\backslash L_\rho(D_{j-1}^{-1})$, что равносильно выполнению равенства $r_\rho(D_j^{-1}) - r_\rho(D_{j-1}^{-1}) = 1$.

Из теоремы Римана — Роха для характеров следует, что

$$r_\rho\big(D_j^{-1}\big) - r_\rho\big(D_{j-1}^{-1}\big) = 1 + i_{\rho^{-1}}(D_j) - i_{\rho^{-1}}(D_{j-1}).$$

Таким образом, для любого $k \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} r_\rho\big(D_k^{-1}\big) - r_\rho\big(D_0^{-1}\big) &= \sum_{j=1}^{k} r_\rho\big(D_j^{-1}\big) - r_\rho\big(D_{j-1}^{-1}\big) \\ &= k + \sum_{j=1}^{k} i_{\rho^{-1}}(D_j) - i_{\rho^{-1}}(D_{j-1}) = k + i_{\rho^{-1}}(D_k) - i_{\rho^{-1}}(D_0). \end{aligned}$$

Отсюда получаем равенство $r_\rho\big(D_k^{-1}\big) - 0 = k + i_{\rho^{-1}}(D_k) - (g-1)$. Это число совпадает с числом мультипликативных непробелов Нётера для ρ, не превышающих k.

Для $k > 2g-2$ верно $i_{\rho^{-1}}(D_k) = 0$. Поэтому при $k > 2g-2$ верно $k - \{$число мультипликативных пробелов Нётера, не превышающих $k\} = k + 0 - (g-1)$.

Следовательно, число мультипликативных пробелов Нётера для ρ точно $g-1$, причем все пробелы не превышают числа $2g-1$. Теорема доказана.

Замечание 4.4. Найденные точки $P_1, P_2, \dots, P_{g-1}$ в теореме 4.3, дополненные любыми $P_g, P_{g+1}, \dots,$ служат примером того, что числа $n = 1, n = 2, \dots, n = g-1$ будут мультипликативными пробелами Нётера последовательности точек $P_1, P_2, \dots, P_{g-1}, P_g, P_{g+1}, \dots$ для ρ и соответствующей ей последовательности дивизоров $D_0 = 1, D_1 = P_1, \dots, D_n = P_1 \dots P_n, \dots,$ а $n = g$ — мультипликативный непробел Нётера при любом существенном характере ρ на F, так как

$$0 = r_\rho(1) = r_\rho((P_1)^{-1}) = \dots = r_\rho((P_1 \dots P_n)^{-1}) = \dots = r_\rho((P_1 \dots P_{(g-1)})^{-1}),$$

но $r_\rho((P_1 \dots P_g)^{-1}) \geq 1$ по предложению 3.8.

Замечание 4.5. Число $n = 1$ будет мультипликативным пробелом Нётера для существенного характера ρ, если $\varphi(P_1) + \psi(\rho) \notin W_1$. Поэтому в предыдущей теореме в общем случае в строгих неравенствах нельзя заменить 0 на 1.

В [11] показано, что для существенного характера ρ_0 на F верно равенство $i_{\rho_0^{-1}}(P_1 \dots P_{2g-2}) = 1$ при условии $\varphi(P_1 \dots P_{2g-2}) = -2K - \psi(\rho_0)$. Тем самым в общем случае число $2g$ нельзя заменить на $2g-1$ в строгих неравенствах предыдущей теоремы для существенного характера ρ_0 на F (аналогично замечанию 3.2.), так как число $n = 2g-1$ будет мультипликативным пробелом Нётера для ρ_0 на F, удовлетворяющего уравнению $\varphi(P_1 \dots P_{2g-2}) = -2K - \psi(\rho_0)$.

Теорема 4.7 (о мультипликативных пробелах Нётера). *Для любой последовательности точек $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ и любого существенного характера ρ верны следующие утверждения:*

1) *число* j, $1 \le j \le g-1$, *будет мультипликативным непробелом Нётера для* ρ *на* F *тогда и только тогда, когда*

$$\psi(\rho) + \varphi(P_1 \dots P_j) \in W_j, \quad \psi(\rho) + \varphi(P_1 \dots P_{j-1}) \notin W_{j-1};$$

2) *число* g *будет мультипликативным непробелом Нётера для* ρ *на* F, *если* $r_\rho((P_1 \dots P_{g-1})^{-1}) = 0$, *т. е.* $D = P_1 \dots P_{g-1}$ *мультипликативно неспециален для* ρ.

Доказательство. 1. Число j — непробел Нётера, если существует функция $f \in L_\rho((P_1 \dots P_j)^{-1}) \backslash L_\rho((P_1 \dots P_{j-1})^{-1})$. Это эквивалентно условиям $\psi(\rho) + \varphi(P_1 \dots P_j) \in W_j$, $\psi(\rho) + \varphi(P_1 \dots P_{j-1}) \notin W_{j-1}$.

2. Нужно показать, что существует нетривиальная функция

$$f \in L_\rho(1/(P_1 \dots P_g)) \backslash L_\rho(1/(P_1 \dots P_{g-1}))$$

для последовательности $P_1, \dots, P_{g-1}, P_g, \dots$ на F. По предложению 4.5 имеем $r_\rho((P_1 \dots P_g)^{-1}) \ge 1$. По условию $r_\rho((P_1 \dots P_{g-1})^{-1}) = 0$, а значит, g будет мультипликативным непробелом Нётера для ρ на F. Теорема доказана.

Замечание 4.6. 1. Если $D = P_1P_2P_3 \dots P_s$, то для несущественного характера ρ верно равенство $i_{\rho^{-1}}(P_1P_2 \dots P_s) = i_{\rho^{-1}}(P_1) = g - 1$, если и только если числа $n = 2, \dots, n = s$ являются мультипликативными непробелами Нётера для последовательности дивизоров $D_0 = 1$, $D_1 = P_1, \dots, D_j = D_{j-1}P_j, j \le s$.

2. Если $D = P_1P_2P_3 \dots P_s$, то для существенного характера ρ верны равенства

$$i_{\rho^{-1}}(P_1P_2 \dots P_s) = i_{\rho^{-1}}(P_j) = i_{\rho^{-1}}(1) = g - 1, \quad j = 1, \dots, s,$$

если и только если выполняются два условия:

а) числа $n = 2, \dots, s$ являются мультипликативными непробелами Нётера для последовательности $D_0 = 1$, $D_1 = P_1, \dots, D_j = D_{j-1}P_j$, $j \le s$;

б) $\psi(\rho) + \varphi(P_j) \in W_1$, т. е. $n = 1$ является мультипликативным непробелом Вейерштрасса в точке P_j на F для таких j, $j = 1, \dots, s$.

3. Если $D = P_1P_2P_3 \dots P_s$, $s \ge 2g - 1$, то для любого характера ρ верно

$$r_\rho(D^{-1}) = \deg D - g + 1 \ge g \ge 1,$$

так как $i_{\rho^{-1}}(D) = i(D(f)) = 0$ ввиду $\deg D(f) \ge 2g - 1 > 2g - 2$, где f — мультипликативная функция для ρ на F. При этом числа $s \ge 2g - 1$ уже будут мультипликативными непробелами Нётера соответствующей последовательности дивизоров для ρ на F рода $g \ge 1$.

Пусть ϕ_1, ϕ_2 — два мероморфных дифференциала Прима для одного и того же характера ρ на F рода $g \ge 1$. Тогда ϕ_1/ϕ_2 — однозначная мероморфная функция на F и (ϕ_1) линейно эквивалентен (ϕ_2) на F [6, 7]. Обратно, если дивизор D_2 линейно эквивалентен $D_1 = (\phi_1)$, дивизору мероморфного дифференциала Прима для ρ, то $D_2 = (R)(\phi_1)$ для некоторой однозначной мероморфной функции R на F, а значит, D_2 является дивизором мероморфного дифференциала Прима $R\phi_1$ для ρ на F. Таким образом, все дивизоры мероморфных дифференциалов Прима для фиксированного ρ на F будут линейно эквивалентны и составляют класс Z_ρ линейной эквивалентности дивизоров на F, который назовем *ρ-каноническим классом дивизоров на F*. Пусть $|Z_\rho|$ — ρ-каноническая линейная система дивизоров на F, т. е. $|Z_\rho|$ содержит все дивизоры (ϕ) голоморфных дифференциалов Прима ϕ для ρ на F.

Отметим, что для несущественного характера ρ на F верно равенство $Z_\rho = Z$, где Z — канонический класс дивизоров абелевых дифференциалов на F. Действительно, если $(\phi) \in Z_\rho$, то $(\phi)/(f) \in Z$, где f — единица для ρ, и $(\phi)/(f) = (\phi)$. Известно, что каноническая линейная система $|Z|$ не имеет базисных точек на F [6; 13, с. 200].

Теорема 4.8. *На компактной римановой поверхности F рода $g \geq 1$ для существенного характера ρ верны следующие утверждения:*

1) $\varphi(Z_\rho) = -2K + \psi(\rho)$ *в* $J(F)$;

2) *существует* $D_0 \in F_g$ *такой, что* $Z_\rho = ZD_0/P_0^g$, *и* D_0/P_0^g *имеет степень 0, но не будет главным дивизором;*

3) *точка P является базисной точкой для $|Z_\rho|$ тогда и только тогда, когда $-\psi(\rho)+\varphi(P) \in W_1$ или, что равносильно, $n = 1$ — мультипликативный непробел Вейерштрасса в P для ρ^{-1} на F.*

Доказательство. Утверждение 1 сразу следует из предложения 3.1.

Докажем утверждение 2. По теореме обращения Якоби существует целый дивизор D_0 степени g такой, что $\varphi_{P_0}\big(D_0/P_0^g\big) = \psi(\rho)$, а в силу $\psi(\rho) \neq 0$ в $J(F)$ дивизор D_0/P_0^g не будет главным дивизором на F, причем $D_0/P_0^g = (f)$, где f — мультипликативная функция для ρ на F. При этом если $\psi(\rho) \notin W_g^1$, то существует единственный такой дивизор D_0 на F.

Наконец, обоснуем утверждение 3. Известно, что точка P является базисной точкой полной линейной системы дивизоров $|D|$, если и только если $r(P/D) = r(1/D)$, и $|D|$ не имеет базисных точек тогда и только тогда, когда для любой точки P верно равенство $r(P/D) = r(1/D) - 1$ [13, с. 158].

Для любого дивизора $D \in |Z_\rho|$ выясним, при каких условиях выполняется равенство $r(P/D) = r(1/D)$ для точки P на F. Так как D является дивизором голоморфного дифференциала Прима ϕ для ρ на F, то верны равенства

$$r(P/D) = i_\rho(P), \quad r(1/D) = i_\rho(1) = g - 1,$$

ибо если, например, $R \in L(P/D)$, т. е. $(R) \geq P/D$, то $(R)D \geq P$. Отсюда получаем равносильность следующих утверждений:

(a) P — базисная точка для системы $|Z_\rho|$;

(b) $i_\rho(P) = i_\rho(1)$;

(c) $r_{\rho^{-1}}(P^{-1}) = 1$;

(d) $n = 1$ — мультипликативный непробел Вейерштрасса в P для ρ^{-1} на F;

(e) $-\psi(\rho) + \varphi(P) \in W_1$.

Здесь учтено, что ρ^{-1} тоже существенный характер на F. Теорема доказана.

Рассмотрим (q,ρ)-канонический класс Z_ρ^q дивизоров, состоящий из всех дивизоров мероморфных q-дифференциалов Прима для ρ на F при $q > 1, q \in \mathbb{N}$. Пусть $\left|Z_\rho^q\right|$ — (q,ρ)-каноническая линейная система дивизоров на F, т. е. система, содержащая все дивизоры (ϕ) голоморфных q-дифференциалов Прима ϕ для ρ на F.

Ясно, что для несущественного характера ρ на F класс Z_ρ^q совпадает с q-каноническим классом Z^q дивизоров абелевых q-дифференциалов на F.

Выясним, имеет ли система $\left|Z_\rho^q\right|$ базисные точки P на F для характера ρ. Покажем, что для любой точки P на F верно равенство $r(P/D) = r(1/D) - 1$ для любого дивизора $D \in \left|Z_\rho^q\right|$, а значит, система $\left|Z_\rho^q\right|$ не имеет базисных точек на F для $g \geq 2$, $q > 1$. Действительно, если R — однозначная мероморфная функция на F с $(R) \geq P/D = P/(\phi)$, то $(R\phi) \geq P$. Отсюда $r(P/D) = i_{\rho,q}(P)$ —

размерность пространства голоморфных q-дифференциалов Прима для ρ, которые кратны P [11]. Покажем также, что $r(1/D) = i_{\rho,q}(1) = (2q-1)(g-1)$ для любого характера ρ при $q > 1$, $g \geq 2$ [11]. По теореме Римана — Роха для характеров [11] имеем равенство

$$i_{\rho,q}(P) = (2q-1)(g-1) - \deg P + i((f)Z^q/P) = i_{\rho,q}(1) - 1 + 0,$$

где f — мультипликативная функция для ρ на F, и $i((f)Z^q/P) = 0$, так как $\deg(f)Z^q/P = q(2g-2) - 1 > 2g-2$. Следовательно, доказана

Теорема 4.9. *На компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ для любого характера ρ и при $q > 1$ (q,ρ)-каноническая линейная система $\left|Z^q_\rho\right|$ дивизоров не имеет базисных точек на F.*

Учитывая замечание 3.5, введем вес $\tau_\rho(P) = \sum\limits_{j=1}^{g-1}(\mu_j - j + 1)$ в точке P для существенного характера ρ относительно пространства $\Omega_{\rho^{-1}}(1)$ голоморфных дифференциалов Прима для ρ^{-1} на F. Он равен порядку нуля в P для вронскиана

$$Wr_{\rho^{-1}} = \det[\phi_1, \dots, \phi_{g-1}]$$

при любом выборе базиса $\phi_1, \dots, \phi_{g-1}$ в $\Omega_{\rho^{-1}}(1)$, что доказывается аналогично [6, с. 84–86]. Найдем общий вес $\sum\limits_{P\in F}\tau_\rho(P)$ для ρ на F. Заметим, что $Wr_{\rho^{-1}}$ является нетривиальным голоморфным m-дифференциалом Прима для $(\rho^{-1})^{g-1}$ на F, где $m = 1 + 2 + \dots + (g-1) = (g-1)g/2$. Отсюда

$$\deg(Wr_{\rho^{-1}}) = m(2g-2) = (g-1)^2 g.$$

Таким образом, доказана

Теорема 4.10. *На компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ для существенного характера ρ верны следующие утверждения:*

1) *вес $\tau_\rho(P)$ равен порядку нуля в P для $Wr_{\rho^{-1}} = \det[\phi_1, \dots, \phi_{g-1}]$ при любом выборе базиса $\phi_1, \dots, \phi_{g-1}$ в $\Omega_{\rho^{-1}}(1)$ на F;*

2) *вронскиан $Wr_{\rho^{-1}}$ для любого базиса в $\Omega_{\rho^{-1}}(1)$ является нетривиальным голоморфным $m = (g-1)g/2$-дифференциалом Прима для $(\rho^{-1})^{g-1}$ на F;*

3) $\sum\limits_{P\in F}\tau_\rho(P) = (g-1)^2 g > 0$.

Определение 2. Точка $P \in F$ называется *мультипликативной q-точкой* (Вейерштрасса) ($q \geq 1$) для существенного характера ρ на F, если строго положителен ее вес $\tau_{\rho,q}(P)$ относительно пространства $\Omega_{\rho^{-1},q}(1)$ голоморфных q-дифференциалов Прима для ρ^{-1} на F. Последнее условие при $g \geq 2$ эквивалентно тому, что существует нетривиальный голоморфный q-дифференциал Прима ϕ для ρ^{-1} на F такой, что $\operatorname{ord}_P \phi \geq \dim \Omega_{\rho^{-1},q}(1) = d$, причем $d = g-1$ при $q = 1$ и $d = (2q-1)(g-1)$ при $q > 1$. Здесь мультипликативная 1-точка Вейерштрасса для существенного характера ρ на F является мультипликативной точкой Вейерштрасса для характера ρ на F, так как $1 \leq r_\rho(1/P^{g-1}) = i_{\rho^{-1}}(P^{g-1})$ и существует нетривиальный голоморфный дифференциал Прима ϕ для ρ^{-1} на F такой, что $(\phi) \geq P^{g-1}$ и $\operatorname{ord}_P \phi \geq g - 1 = d$ при $q = 1$.

Теорема 4.11. *На компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ при $q > 1$ и существенном характере ρ Вронскиан $Wr_{\rho^{-1},q}$ любого базиса в $\Omega_{\rho^{-1},q}(1)$*

является нетривиальным голоморфным m-дифференциалом Прима для $(\rho^{-1})^d$ на F, где $m = d(2q-1+d)/2$, $d = (2q-1)(g-1)$, и

$$\sum_{P \in F} \tau_{\rho,q}(P) = m(2g-2) = (g-1)d(2q-1+d) > 0.$$

Замечание 4.7. Теорема 2.3 верна также для любого существенного характера ρ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 1$. Таким образом, на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ для любого $q \geq 1$ всегда существуют мультипликативные q-точки Вейерштрасса для любого существенного характера ρ.

Следствие 4.12. *Пусть $N(\rho)$ и $N(\rho, q)$ — число мультипликативных точек Вейерштрасса и мультипликативных q-точек Вейерштрасса ($q > 1$) для любого существенного характера ρ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ соответственно. Тогда $1 \leq N(\rho) \leq (g-1)^2 g$ и $1 \leq N(\rho, q) \leq (g-1)^2 g(2q-1)^2$.*

Пусть ρ — существенный характер на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ и P — фиксированная точка на F. Тогда мультипликативные пробелы n_j в P для ρ удовлетворяют неравенствам

$$1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_{g-1} \leq 2g-1,$$

а мультипликативные непробелы α_j в P для ρ, не превышающие $2g-1$, удовлетворяют неравенствам

$$1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_g \leq 2g-1.$$

Эти два множества взаимно дополнительны на множестве $\{1, 2, \ldots, 2g-1\}$.

Если P не является мультипликативной точкой Вейерштрасса для ρ на F, то $n_j = j$, $j = 1, 2, \ldots, g-1$, и

$$\tau_\rho(P) = \sum_{j=1}^{g-1} (\mu_j - j + 1) = \sum_{j=1}^{g-1} (n_j - j) = 0.$$

Если мультипликативные пробелы n_j в P для ρ образуют последовательность $1, 2, \ldots, g-2, g$, то $\tau_\rho(P) = 1$ — минимальный вес в мультипликативной точке Вейерштрасса. Это эквивалентно тому, что $g-1$ — мультипликативный непробел в P для ρ или, что равносильно, $(g-1)\varphi(P) + \psi(\rho) \in W_{g-1}$, но $(g-1)\varphi(P) + \psi(\rho)) \notin W_{g-2} + \varphi(P)$. Для фиксированного P существует характер ρ такой, что выполняются эти условия. Действительно, существует ρ такой, что $\psi(\rho) \in W_{g-1} - (g-1)\varphi(P) = \widetilde{W}_1$ и $\psi(\rho) \notin \{W_{g-2} + \varphi(P)\} - (g-1)\varphi(P) = \widetilde{W}_2$, так как $\widetilde{W}_2$ — собственное подмножество комплексной коразмерности 1 в множестве $\widetilde{W}_1$ и ψ отображает $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)/L_g$ на $W_g = J(F)$. Таким образом, существуют мультипликативные точки Вейерштрасса с минимальным весом 1 для некоторых существенных характеров на F.

Вес $\tau_\rho(P)$ в P для ρ будет максимальным, если мультипликативные пробелы n_j в P для ρ образуют последовательность $g+1, g+2, \ldots, 2g-1$, а мультипликативные непробелы в P для ρ — последовательность $1, 2, \ldots, g-1, g$ при $g \geq 2$. Этот максимальный вес $\tau_\rho(P)$ равен $\sum\limits_{j=1}^{g-1} (n_j - j) = (g-1)g$. Отсюда если все мультипликативные точки Вейерштрасса для ρ на F будут максимального веса, то их число равно $g-1$. Все числа $1, 2, \ldots, g-1, g$ будут мультипликативными непробелами в P для ρ тогда и только тогда, когда для любого $j = 1, \ldots, g$ выполняются условия $j\varphi(P) + \psi(\rho) \in W_j \backslash (W_{j-1} + \varphi(P))$. Таким образом, доказана

Теорема 4.13. *На компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ для любого существенного характера ρ число $N(\rho)$ мультипликативных точек Вейерштрасса для ρ на F удовлетворяет неравенству*

$$g - 1 \leq N(\rho) \leq (g-1)^2 g.$$

§ 5. Фильтрации многообразий Якоби и мультипликативные пробелы Вейерштрасса и Нётера

По аналогии с $\mathbb{Z}$-фильтрованной алгеброй под *возрастающей $\mathbb{Z}$-фильтрацией в группе* $J(F)$ будем понимать такую последовательность подпространств $\{G_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, что $G_k \subseteq G_l$ и $G_k + G_l \subseteq G_{k+l}$. Тогда

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_{g-1} \subset W_g = J(F)$$

будет возрастающей $\mathbb{Z}$-фильтрацией в группе $J(F)$. Так как $W_k \subset W_l$ при $k < l$ и $W_k + W_l = W_{k+l}$. Более точно, это $\mathbb{Z}_g$-фильтрация на $J(F)$, или фильтрация длины g. Эта фильтрация также будет отделимой, поскольку пересечением всех этих подпространств будет $\{0\}$, и исчерпывающей, так как объединение всех этих подпространств равно $J(F)$.

При фиксированной точке $P \in F$ из теоремы 4.1 следует, что

$n = 1$ — мультипликативный непробел (Вейерштрасса) для ρ равносильно соотношениям

$$\varphi(P) + \psi(\rho) \in W_1, \quad \varphi(P) + \psi(\rho) \notin W_0 + \varphi(P);$$

$n = 2$ — мультипликативный непробел для ρ равносильно соотношениям

$$2\varphi(P) + \psi(\rho) \in W_2, \quad 2\varphi(P) + \psi(\rho) \notin W_1 + \varphi(P);$$

и т. д.,

$n = k$ — мультипликативный непробел для ρ равносильно соотношениям

$$k\varphi(P) + \psi(\rho) \in W_k, \quad k\varphi(P) + \psi(\rho) \notin W_{k-1} + \varphi(P);$$

и т. д.,

$n = g-1$ — мультипликативный непробел для ρ равносильно соотношениям

$$(g-1)\varphi(P) + \psi(\rho) \in W_{g-1}, \quad (g-1)\varphi(P) + \psi(\rho) \notin W_{g-2} + \varphi(P);$$

$n = g$ — мультипликативный непробел для ρ равносильно соотношениям

$$g\varphi(P) + \psi(\rho) \in W_g, \quad g\varphi(P) + \psi(\rho) \notin W_{g-1} + \varphi(P).$$

Эти утверждения равносильны утверждениям:

$n = 1$ — мультипликативный непробел для ρ равносильно тому, что

$$\psi(\rho) \in \{W_1 - \varphi(P)\} \backslash \{0\};$$

$n = 2$ — мультипликативный непробел для ρ равносильно тому, что

$$\psi(\rho) \in \{W_2 - 2\varphi(P)\} \backslash \{W_1 - \varphi(P)\};$$

и т. д.,

$n = k$ — мультипликативный непробел для ρ равносильно тому, что

$$\psi(\rho) \in \{W_k - k\varphi(P)\} \backslash \{W_{k-1} - (k-1)\varphi(P)\};$$

и т. д.,

$n = g-1$ — мультипликативный непробел для ρ равносильно тому, что

$$\psi(\rho) \in \{W_{g-1} - (g-1)\varphi(P)\} \backslash \{W_{g-2} - (g-2)\varphi(P)\};$$

$n = g$ — мультипликативный непробел для ρ равносильно тому, что

$$\psi(\rho) \in \{W_g - g\varphi(P)\} \backslash \{W_{g-1} - (g-1)\varphi(P)\}.$$

Отсюда получаем последовательность подпространств

$$0 \subset W_1 - \varphi(P) \subset W_2 - 2\varphi(P) \subset \dots \subset W_k - k\varphi(P) \\ \subset \dots \subset W_{g-1} - (g-1)\varphi(P) \subset W_g - g\varphi(P) = J(F),$$

причем $W_k - k\varphi(P) + W_l - l\varphi(P) = W_{k+l} - (k+l)\varphi(P)$. Это фильтрация длины g в $J(F)$, которую будем называть *P-фильтрацией для ρ в $J(F)$*. Она позволяет определять мультипликативные пробелы и непробелы (Вейерштрасса) для существенного характера ρ в фиксированной точке P среди чисел $\{1, 2, \dots, g\}$ через расположение $\psi(\rho)$ в $J(F)$.

Теорема 5.1. *При фиксированной точке P на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ для существенного характера ρ P-фильтрация для ρ в группе $J(F)$:*

$$0 \subset W_1 - \varphi(P) \subset W_2 - 2\varphi(P) \subset \dots \subset W_k - k\varphi(P) \\ \subset \dots \subset W_{g-1} - (g-1)\varphi(P) \subset W_g - g\varphi(P) = J(F),$$

будет отделимой исчерпывающей фильтрацией длины g в $J(F)$.

Замечание 5.1. Если $P = P_0$ — базисная точка для отображения Якоби φ на F, то P_0-фильтрация, полученная в теореме 5.1, сводится к фильтрации

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_{g-1} \subset W_g = J(F).$$

Пусть теперь фиксирован существенный характер ρ. Тогда по теореме 4.1 получаем утверждения:

$n = 1$ — мультипликативный непробел (Вейерштрасса) в P равносильно соотношениям

$$\varphi(P) \in W_1 - \psi(\rho), \quad 0 \notin W_0 - \psi(\rho);$$

$n = 2$ — мультипликативный непробел в P равносильно соотношениям

$$2\varphi(P) \in W_2 - \psi(\rho), \quad \varphi(P) \notin W_1 - \psi(\rho);$$

и т. д.,

$n = k$ — мультипликативный непробел в P равносильно соотношениям

$$k\varphi(P) \in W_k - \psi(\rho), \quad (k-1)\varphi(P) \notin W_{k-1} - \psi(\rho);$$

и т. д.,

$n = g-1$ — мультипликативный непробел в P равносильно соотношениям

$$(g-1)\varphi(P) \in W_{g-1} - \psi(\rho), \quad (g-2)\varphi(P) \notin W_{g-2} - \psi(\rho);$$

$n = g$ — мультипликативный непробел в P равносильно соотношениям

$$g\varphi(P) \in W_g - \psi(\rho), \quad (g-1)\varphi(P) \notin W_{g-1} - \psi(\rho).$$

Отсюда получаем последовательность подпространств

$$0 \neq -\psi(\rho) \subset W_1 - \psi(\rho) \subset W_2 - \psi(\rho) \\ \subset \dots \subset W_{g-1} - \psi(\rho) \subset W_g - \psi(\rho) = J(F),$$

так называемую *ρ-фильтрацию для P в* $J(F)$, хотя она не будет фильтрацией в $J(F)$, как в предыдущей теореме 5.1. Эта последовательность позволяет определять точки P и мультипликативные пробелы и непробелы (Вейерштрасса) в точке P для фиксированного существенного характера ρ среди чисел $\{1, 2, \dots, g\}$ через расположение $\varphi(P), 2\varphi(P), \dots, g\varphi(P)$ в $J(F)$.

Пусть $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ — произвольная фиксированная последовательность точек на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$. По теореме 4.7 для мультипликативных непробелов Нётера для существенного характера ρ на F при заданной последовательности точек верно, что

$n = 1$ — мультипликативный непробел (Нётера) для ρ равносильно соотношениям

$$\psi(\rho) \in W_1 - \varphi(P_1), \quad \psi(\rho) \notin W_0;$$

$n = 2$ — мультипликативный непробел для ρ равносильно соотношениям

$$\psi(\rho) \in W_2 - \varphi(P_1P_2), \quad \psi(\rho) \notin W_1 - \varphi(P_1);$$

и т. д.,

$n = g-1$ — мультипликативный непробел для ρ равносильно соотношениям

$$\psi(\rho) \in W_{g-1} - \varphi(P_1P_2\dots P_{g-1}), \quad \psi(\rho) \notin W_{g-2} - \varphi(P_1P_2\dots P_{g-2});$$

$n = g$ — мультипликативный непробел для ρ равносильно соотношениям

$$\psi(\rho) \in W_g - \varphi(P_1P_2\dots P_g) = J(F), \quad \psi(\rho) \notin W_{g-1} - \varphi(P_1P_2\dots P_{g-1}).$$

Отсюда получаем последовательность подпространств

$$0 \subset W_1 - \varphi(P_1) \subset W_2 - \varphi(P_1P_2) \\ \subset \dots \subset W_{g-1} - \varphi(P_1P_2\dots P_{g-1}) \subset W_g - \varphi(P_1P_2\dots P_g) = J(F),$$

которую будем называть *фильтрацией Нётера для* ρ при фиксированной последовательности $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ на F. Она позволяет определять мультипликативные пробелы и непробелы Нётера для существенного характера ρ при фиксированной последовательности точек среди чисел $\{1, 2, \dots, g\}$ через расположение $\psi(\rho)$ в $J(F)$.

Пусть теперь фиксирован существенный характер ρ. Тогда по теореме 4.7 получаем утверждения:

$n = 1$ — мультипликативный непробел (Нётера для данной последовательности $P_1, P_2, \dots$ на F) равносильно тому, что

$$\varphi(P_1) \in W_1 - \psi(\rho), \quad 0 \notin W_0 - \psi(\rho);$$

$n = 2$ — мультипликативный непробел равносильно тому, что

$$\varphi(P_1P_2) \in W_2 - \psi(\rho), \quad \varphi(P_1) \notin W_1 - \psi(\rho);$$

и т. д.,

$n = g$ — мультипликативный непробел равносильно тому, что

$$\varphi(P_1P_2\dots P_g) \in W_g - \psi(\rho), \quad \varphi(P_1P_2\dots P_{g-1}) \notin W_{g-1} - \psi(\rho).$$

Отсюда получаем последовательность подпространств

$$0 \neq -\psi(\rho) \subset W_1 - \psi(\rho) \subset W_2 - \psi(\rho) \subset \dots \subset W_{g-1} - \psi(\rho) \subset W_g - \psi(\rho) = J(F),$$

так называемую ρ-фильтрацию Нётера для данной последовательности точек $P_1, P_2, \dots$ в $J(F)$. Она позволяет определять мультипликативные пробелы и непробелы Нётера для фиксированного существенного характера ρ среди чисел $\{1, 2, \dots, g\}$ через расположение $\varphi(P_1), \varphi(P_1P_2), \dots, \varphi(P_1P_2\dots P_g)$ в $J(F)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Farkas H. M., Rauch H. E.* Period relations of Schottky type on Riemann surfaces // Ann. of Math. 1970. V. 92. P. 434–461.
2. *Rauch H. E., Farkas H. M.* Theta function with application to Riemann surfaces. Baltimore, Maryland: The Williams and Willkins Comp., 1974.
3. *Farkas H. M.* Theta function practitiones // Differential Geometry and Complex Analysis. Berlin: Springer-Verl., 1985. P. 33–47.
4. *Gunning R. C.* On the period classes of Prym differentials // J. Reine Angew. Math. 1980. V. 319. P. 153–171.
5. *Farkas H. M., Kra I.* Special sets of points on compact Riemann surfaces // Contemp. Math. 2000. V. 256. P. 75–94.
6. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New York: Springer-Verl., 1992. (Grad. Text's Math.; V. 71).
7. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. М.: Изд-во Иностр. лит., 1960.
8. *Крушкаль С. Л.* Квазиконформные отображения и римановы поверхности. Новосибирск: Наука, 1975.
9. *Чуешев В. В.* Векторные расслоение Прима и расслоение Ганнинга над пространством Тейхмюллера. // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 937–951.
10. *Koenig R.* Zur arithmetischen Theorie der auf einem algebraischen Gebilde existierenden Funktionen // Ber. der Verh. Saechs. Ges. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl. 1911. Bd 63. S. 348–368.
11. *Чуешев В. В.* Пространства мероморфных q-дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности и тэта-функция Римана // Вестн. НГУ. 2002. Т. 2, № 1. С. 3–36.
12. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
13. *Miranda R.* Algebraic curves and Riemann surfaces. Providence PI: Amer. Math. Soc., 1995..

Статья поступила 18 февраля 2002 г.

Чуешев Виктор Васильевич
Кемеровский гос. университет, ул. Красная, 6, Кемерово 650043
chueshev@lanserv1.kemsu.ru

Eduard Yakubov (Якубов Эдуард Хастович)
Department of Science Holon Academic Institute of Technology, 52 Golomb St., P.O. Box 305, Holon, 58102, Israel
yakubov@hait.ac.il