Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 513.881

О ДОПОЛНЯЕМЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ КЕТЕ БЕСКОНЕЧНОГО ТИПА

В. П. Кондаков

Аннотация: Доказано, что каждое дополняемое подпространство пространства Кёте из класса Драгилева типа 1 имеет базис.

Ключевые слова: пространства Кёте, определяемые функциями Драгилева, дополняемые подпространства, базисы

В работе [1] введены ядерные пространства Кёте — Фреше $L_f(a,\sigma)$ и показано, что при условии быстрого роста логарифмически выпуклой функции f имеет смысл рассматривать четыре класса таких пространств: $(f)_{-1}$, $(f)_0$, $(f)_1$, $(f)_\infty$ ($\sigma = -1, 0, 1, \infty$) (подробнее см. в [2]), причем $(f)_1$, $(f)_\infty$ вложены в более широкий класс (d_1) (и его расширение D_1 или (DN) [3, 4]) пространств бесконечного типа, а $(f)_{-1}$, $(f)_0$ — в класс (d_2) пространств Кёте конечного типа.

В [5] установлено, что каждое дополняемое подпространство пространства степенных рядов конечного типа имеет безусловный базис и изоморфно подходящему координатному подпространству. Затем в [6] этот факт был обобщен на ядерные пространства класса $(f)_0$, а в [7] снято требование ядерности и ослаблены ограничения на функцию f.

Тот же факт для представителей остальных трех классов доказывался только при различных дополнительных ограничениях на пространства и их дополняемые подпространства (см., например, [8] и библиографию там).

В настоящей работе рассматриваются счетно-гильбертовы пространства Кёте

$$l_2[\exp f(\sigma_r a_n)] = \left\{ \xi = (\xi_n)_{n=1}^\infty : \sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^2 \exp 2f(\sigma_r a_n) = |\xi|_r^2 < +\infty \ \forall r \in N \right\},$$

где $\sigma_r \uparrow 1$ (символ $\uparrow$ означает строгое возрастание), a_n — произвольные неотрицательные числа, f удовлетворяет дополнительным условиям, например, выпуклости и быстрого роста (точнее, условиям 1–3 ниже). Топология в пространствах Кёте задается системами норм $(|\cdot|_r)_{r=1}^\infty$.

Доказывается, что каждое дополняемое подпространство такого пространства имеет безусловный (= 2-абсолютный) базис, квазиэквивалентный подходящей подпоследовательности единичных ортов. Каждый проектор в этих пространствах подобен диагональному. В частности, получается характеризация дополняемых подпространств любого пространства класса $(f)_1$ Драгилева из [1, 2].

Существенную роль в доказательстве играют условия интерполяции линейных операторов из [9] (как и в [5] или [7, 8]).

1. Напомним необходимые обозначения, определения и факты.

Пусть неотрицательная непрерывная функция f, определенная на $\mathbb{R}_+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$, удовлетворяет условиям:

1) $f(t) \uparrow \infty$ при $t \uparrow \infty$;

2) $\forall \theta > 1 \ \lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{f(\theta t)} = 0$ (условие быстрого роста f);

3) $\forall \theta > 1 \ f(\theta t) - f(t) \uparrow \infty$ при $t \uparrow \infty$.

Этим условиям удовлетворяют логарифмически выпуклые функции Драгилева (т. е. $\ln \circ f \circ \exp$ выпукла) и просто выпуклые функции быстрого роста. Поэтому среди рассматриваемых счетно-гильбертовых пространств Кёте $l_2[\exp f(\sigma_r a_n)]$, где $\sigma_r \uparrow 1$, f удовлетворяет условиям 1–3, будут и аналогичные пространства Кёте $L_f(a, 1)$ с логарифмически-выпуклыми функциями f быстрого роста и определяемые таким же образом пространства $S_g(a, 1)$, где g предполагается просто выпуклой функцией с 1, 2, а 3 гарантировано выпуклостью g.

Среди рассматриваемых счетно-гильбертовых пространств Кёте содержатся и все ядерные пространства $L_f(a, 1)$, т. е. весь класс $(f)_1$ из [2], так как любое ядерное пространство Фреше имеет последовательность гильбертовых полунорм, задающую исходную топологию (см., например, [2, 10]).

Базис $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ пространства Фреше $(E, (\|\cdot\|_r))$ называют *p-абсолютным с* $1 \leq p \leq \infty$, если система полунорм

$$|e|_r^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n'(e)|^p \|x_n\|_r^p, \quad e \in E,\ r = 1, 2, \dots,$$

где $(x_n'(\cdot))_{n=1}^{\infty}$ — последовательность коэффициентных функционалов базиса (x_n), задает исходную топологию E.

Любой p-абсолютный базис пространства Фреше является безусловным, т. е. разложения элементов по этому базису сходятся при любой перестановке членов. В счетно-гильбертовых пространствах Фреше любой безусловный базис является 2-абсолютным (см., например, [2, 10]).

Напомним, что пространство Кёте — Фреше E с базисом ортов (e_n) относят к классу (d_1) [1] (бесконечного типа [2]), если выполняется условие

$$(\exists r(1)\, \forall r(2)\, \exists r(3),\, C > 0)\ |e_n|_{r(2)}^2 \leq C|e_n|_{r(1)}|e_n|_{r(3)}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

С привлечением свойства 2 (быстрого роста) функции f легко показать принадлежность рассматриваемых пространств $l_2[\exp f((1 - 1/r)a_n)]$ классу (d_1) (бесконечного типа).

Базис (x_n) называют согласно [1] *правильным в пространстве Фреше* E, если в E имеется система полунорм $(|\cdot|_r)$, задающая (исходную) топологию, такая, что

$$\frac{|x_n|_r}{|x_n|_{r+1}} \downarrow 0 \ (n \uparrow \infty), \quad r = 1, 2, \dots \ (\text{здесь предполагается } \frac{0}{0} = 0).$$

Свойство 3 функции f гарантирует в рассматриваемых счетно-гильбертовых пространствах Кёте правильность базиса ортов.

Два базиса (x_n) и (y_n) линейных топологических пространств E и F называют *квазиэквивалентными*, если существуют такие нормировка $\lambda_k \neq 0$ и перестановка $\sigma(k)$ натурального ряда, что оператор T, определяемый соотношениями $Tx_k = \lambda_k y_{\sigma(k)}, k = 1, 2, \dots$, является изоморфизмом E на F.

Известно, что в счетно-гильбертовых пространствах Ксте с правильным базисом ортов все безусловные базисы квазиэквивалентны (см., например, [10]).

Напомним известное условие интерполяции линейного оператора, действующего в семействах весовых пространств (см. [9]). Пусть заданы параметрические семейства гильбертовых пространств

$$H_\lambda = l_2(a_\lambda(n)) = \left\{ \xi = (\xi_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 a_\lambda^2(n) = |\xi|_\lambda^2 < \infty \right\}, \quad \lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2,$$

$$\mathscr{G}_{\lambda'} = l_2(b_{\lambda'}(n)) = \left\{ \xi = (\xi_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 b_{\lambda'}^2(n) = \|\xi\|_{\lambda'}^2 < \infty \right\}, \quad \lambda'_1 \le \lambda' \le \lambda'_2,$$

$$H_{\lambda_1} \subset H_\lambda \subset H_{\lambda_2}, \ \ \mathscr{G}_{\lambda'_1} \subset \mathscr{G}_{\lambda'} \subset \mathscr{G}_{\lambda'_2},$$

и оператор T, определенный на плотном множестве во всех пространствах H_λ, допускает продолжение по непрерывности до ограниченных отображений $T : H_{\lambda_1} \to \mathscr{G}_{\lambda'_1}$ и $T : H_{\lambda_2} \to \mathscr{G}_{\lambda'_2}$. Если выполнено следующее условие: для любого λ' такого, что $\lambda'_1 \le \lambda' \le \lambda'_2$, существует $\lambda(\lambda')$ такое, что $\lambda_1 \le \lambda(\lambda') \le \lambda_2$, $C = C(\lambda', \lambda(\lambda')) > 0$, для которого

$$\frac{b_{\lambda'}(n)}{a_{\lambda(\lambda')}(m)} \le C \max\left\{ \frac{b_{\lambda'_1}(n)}{a_{\lambda_1}(m)}, \ \frac{b_{\lambda'_2}(n)}{a_{\lambda_2}(m)} \right\} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \tag{$*$}$$

то оператор T допускает продолжение до ограниченного отображения $T : H_{\lambda(\lambda')} \to \mathscr{G}_{\lambda'}$.

Заметим, что это условие интерполяции оператора очевидно для весовых пространств с абсолютными базисами, т. е. семейств вида $l_1(a_\lambda(n))$, а в [9] показано, что оно же является и условием интерполяции оператора в семействах пространств $l_p(a_\lambda(n))$ с $1 < p < \infty$.

2. Сформулируем результат работы и проведем его доказательство.

Теорема. *Пусть F — бесконечномерное дополняемое подпространство счетно-гильбертова пространства Кёте $E = l_2[\exp f(\sigma_r a_n)]$, где f удовлетворяет условиям 1–3, $\sigma_r \uparrow 1$ $(r \uparrow \infty)$, $a_n \ge 0$. Тогда F имеет безусловный (= 2-абсолютный) базис, квазиэквивалентный подходящей подпоследовательности базиса единичных ортов в E. Таким образом, F изоморфно пространству Кёте вида $l_2[\exp f(\sigma_r a_{k(n)})]$, где $(k(n))$ — последовательность натуральных чисел без повторений.*

Доказательство. Пусть P — некоторый непрерывный линейный проектор из E на F, который существует по определению дополняемости F в E. Этому проектору соответствует инволютивный оператор $J = 2P - I$, т. е. изоморфизм со свойством $J^2 = I$ (здесь I — тождественный оператор в E). Если условие непрерывности P записывается в виде

$$(\forall r \in \mathbb{N}\, \exists s(r),\, \widetilde{C}(r) > 0) \quad |Pe|_r \le \widetilde{C}(r)|e|_{s(r)}, \quad e \in E,$$

где можем считать

$$|e|_r^2 = \sum_n |e'_n(e)|^2 \exp 2f\left(\left(1 - \frac{1}{r}\right) a_n\right)$$

(e_n' — координатные функционалы базисов ортов (e_n)), то J удовлетворяет условию

$$|Je|_r \le C(r)|e|_{s(r)}, \quad e \in E,\ r \in \mathbb{N} \ \ (C(r) = 3\widetilde{C}(r))$$

и ввиду инволютивности J

$$|e|_r \le C(r)|Je|_{s(r)}, \quad e \in E,\ r \in \mathbb{N}.$$

Введем новую систему норм $(\|\cdot\|_r)$:

$$\|e\|_r^2 = |e|_r^2 + |Je|_r^2, \quad e \in E,\ r \in \mathbb{N}.$$

Эта система норм эквивалентна исходной, так как при любом $r \in \mathbb{N}$

$$|e|_r \le \|e\|_r \le D(r)|e|_{s(r)}, \quad e \in E \quad (D(r) = \sqrt{1 + (C(r))^2}).$$

Кроме того,

$$\|Je\|_r = \|e\|_r \quad (\|Pe\|_r \le \|e\|_r), \quad r \in \mathbb{N},\ e \in E.$$

Для новой системы норм определим так называемую «тупиковую» норму на линейной оболочке $X_0 = \operatorname{span}(e_n)$ элементов e_n:

$$]e[_1^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r} \frac{\|e\|_r^2}{D^2(r)} \le |e|_\infty^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |e_n'(e)|^2 \exp 2f(a_n)$$

со свойством $]Je[_1 \le]e[_1$, $e \in X_0$. Обозначим пополнения X_0 по гильбертовым нормам $\|\cdot\|_1$ и $]\cdot[_1$ через H_0 и H_1 соответственно. Очевидно, при этом H_1 тождественно вложено в H_0 и умножением в случае необходимости нормы $\|\cdot\|_1$ на подходящее число можно добиться того, чтобы норма $]\cdot[_0 = \mathrm{const}\cdot\|\cdot\|_1$ удовлетворяла неравенству $]\cdot[_0 \le]\cdot[_1$ и оператор тождественного вложения $\pi_1^0 : H_1 \to H_0$ имел единичную норму. Если определяемый этим вложением самосопряженный оператор $S = (\pi_1^0)^*\pi_1^0 : H_1 \to H_1$ является вполне непрерывным (компактным), например в случае шварцевского пространства E, то счетное множество его собственных векторов определяет последовательность (h_j), которую можно рассматривать как ортогональный базис одновременно в H_0 и H_1.

В общем случае S может и не быть вполне непрерывным. Тогда согласно спектральной теореме этот самосопряженный (неотрицательный) ограниченный оператор может быть представлен в виде

$$S = \int_0^1 \lambda dE_\lambda^S,$$

где E_λ^S — спектральное семейство (разложение единицы), построенное по оператору S (см., например, [11, с. 452]). Затем по аналогии с [5] перейдем к функции от оператора S вида

$$\widetilde{S} = \int_0^1 g(\lambda) dE_\lambda^S, \quad g(\lambda) = 2^{-k}, \quad 2^{-k} < \lambda \le 2^{-k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда $\widetilde{S} \le S \le 2\widetilde{S}$ и определяемая этим оператором гильбертова норма $]e[_0 = (\widetilde{S}e, e)_1$ (здесь $(\cdot,\cdot)_1$ — скалярное произведение в H_1) эквивалентна норме $\|\cdot\|_1$. Выбирая в каждом инвариантном подпространстве $E^S_{(2^{-k},2^{-k+1}]}H_1$ ортонормированную полную систему, можем составить общий ортогональный базис (h_j) в $(H_0,]\cdot[_0)$ и $(H_1,]\cdot[_1)$.

Вспомним, что согласно построению норм $]\cdot[_0$ и $]\cdot[_1$ (точнее, исходных норм $\|\cdot\|_1$, $]\cdot[_1$) проектор P (и J) непрерывен одновременно в H_0 и H_1. Это означает, что можно просто повторить все построения отдельно для подпространства PH_1 и для $(I-P)H_1$, а затем составить общий ортогональный базис (h_j) в H_0 и H_1 при соответствующем выборе эквивалентных норм из части $(h_j)_{j\in\nu}$, порождающей PH_1, и части $(h_j)_{j\in\mathbb{N}\setminus\nu}$, порождающей $(I-P)H_1$.

Считая последовательность (h_j) нормированной в $(H_0,]\cdot[_0)$, обозначим $]h_j[_1 = \mu_j \geq 1$, $j=1,2,\ldots$. Теперь из равенств $\mu_j = \exp f(c_j)$, $j=1,2,\ldots$, можно определить числа $c_j = f^{-1}(\ln\mu_j)$, поскольку $\exp f$ — монотонная непрерывная функция.

Для пары пространств $H_1 \subset H_0$ образуем семейство промежуточных пространств H_λ, $0<\lambda<1$, путем пополнения линейной оболочки базиса ортов $(e_n)_{n=1}^\infty$ по «искусственным» нормам

$$\|e\|_\lambda^{*2} = \sum_{j=1}^\infty |h_j'(e)|^2 \exp 2f(\lambda c_j), \quad e\in\ X_0,$$

где h_j' — коэффициентные функционалы общего ортогонального базиса (h_j) (эти функционалы можно выразить в терминах скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_0$).

Другое семейство гильбертовых пространств $\{\mathscr{G}_{\lambda'},\ 0\leq\lambda'\leq 1\}$ получим путем пополнения X_0 относительно естественных норм

$$|e|_{\lambda'}^{*2} = \sum_{n=1}^\infty |e_n'(e)|^2 \exp 2f(\lambda' a_n), \quad 0\leq\lambda'\leq 1.$$

Для указанных семейств гильбертовых пространств согласно построению имеем тождественные вложения

$$\mathscr{G}_1 \subset H_1, \quad \mathscr{G}_{\lambda(0)} \subset H_0, \quad \lambda(0) = 1 - \frac{1}{s(0)},$$

и, с другой стороны, естественные вложения $H_0\subset\mathscr{G}_0$, $H_1\subset\mathscr{G}_q$ при любом $0<q<1$. Посредством проверки условия $(*)$ интерполяции операторов, осуществляющих указанные вложения, как и в [12], покажем, что при выборе последовательности $(\lambda(r))$, $\lambda(r)\uparrow 1$, последовательность норм $(\|\cdot\|_{\lambda(r)})_{r=1}^\infty$ эквивалентна последовательности норм $(|\cdot|^*_{\lambda'(r)})_{r=1}^\infty$, задающей исходную топологию в E. Это и будет означать, что (h_j) — 2-абсолютный базис (как базис ортов счетно-гильбертова пространства Ксте), а значит, $(h_j)_{j\in\nu}$ — 2-абсолютный (безусловный) базис в F.

С одной стороны, тождественные вложения $\mathscr{G}_1$ в H_1 и $\mathscr{G}_{\lambda(0)}$ в H_0 можно рассматривать как линейный оператор T_{id} на $\mathrm{span}(e_n)$, который допускает распространение до ограниченного оператора в каждом из крайних пространств

$$T_{\mathrm{id}}:\mathscr{G}_1\to H_1, \quad T_{\mathrm{id}}:\mathscr{G}_{\lambda(0)}\to H_0.$$

Убедимся, что при любом $\lambda(r)$ таком, что $0<\lambda(r)<1$, этот оператор допускает распространение до ограниченного оператора $T_{\mathrm{id}}:\mathscr{G}_{\lambda'(r)}\to H_{\lambda(r)}$, где $\lambda'(r)\geq\lambda(r)$. Это даст нам одну серию оценок норм

$$(\forall\lambda(r)<1\,\exists\lambda'(r),\ C(\lambda(r))>0) \quad \|e\|^*_{\lambda(r)} \leq C(\lambda(r))|e|^*_{\lambda'(r)}, \quad e\in\mathscr{G}_{\lambda'(r)}.$$

Указанная интерполяция T_{id} возможна при выполнении условия $(*)$, приведенного перед формулировкой теоремы, которое при данном выборе индексов имеет конкретный вид

$$\begin{aligned}&\exp\{f(\lambda(r)c_j) - f(\lambda'(r)a_i)\}\\&\quad \le B\max\{\exp\{f(c_j)-f(a_i)\}, \exp\{-f((1-1/s(0))a_i)\}\} \quad \forall i,j\ (\lambda'(r)>\lambda(r)),\end{aligned}$$

где $B>0$ — некоторая константа, которая может зависеть от $\lambda(r)$ и $\lambda'(r)$. В этих неравенствах рассмотрим два возможных случая:

а) $c_j \ge a_i$, и тогда

$$f(\lambda(r)c_j) - f(\lambda'(r)a_i) \le f(\lambda(r)c_j) - f(\lambda(r)a_i) \le f(c_j) - f(a_i)$$

ввиду $\lambda(r)<1$, $\lambda'(r)>\lambda(r)$ и свойства 3 функции f,

б) $c_j < a_i$, и в этом случае

$$f(\lambda(r)c_j) - f(\lambda'(r)a_i) \le -f((1-1/s(0))a_i)$$

при $a_i \ge M>0$, где M находится в силу свойства 2 быстрого роста f из условия

$$f(\lambda'(r)a_i)\left[\frac{f(\lambda(r)c_j)}{f(\lambda'(r)a_i)} + \frac{f((1-1/s(0))a_i)}{f(\lambda'(r)a_i)} - 1\right] \le 0 \quad \forall a_i \ge M.$$

Таким образом, условие интерполяции $(*)$ для $T_{\rm id}$ действительно выполняется с константой

$$B = \max_{c_j<a_i\le M}\{\exp\{f(\lambda(r)c_j) - f(\lambda'(r)a_i) + f((1-1/s(0))a_i)\}\},$$

и «искусственные» нормы $\|\cdot\|^*_{\lambda(r)}$ мажорируются естественными нормами пространства.

Чтобы доказать другую серию неравенств

$$(\forall\lambda'(r)<1\,\exists\varphi(\lambda'(r))<1,\ A(r)>0) \quad |e|^*_{\lambda'(r)} \le A(r)\|e\|^*_{\varphi(\lambda'(r))}, \quad e\in X_0,$$

покажем выполнение условия $(*)$ интерполяции оператора тождественного вложения $T_{\rm id}^{-1}$, который допускает распространение до ограниченного оператора

$$T_{\rm id}^{-1}: H_0 \to \mathscr{G}_0, \quad T_{\rm id}^{-1}: H_1\to\mathscr{G}_q, \quad q<1.$$

Для каждого фиксированного значения индекса $\lambda'(r)<1$ естественной нормы в E подберем свое значение $q=q(r)=1-\varepsilon(r)$ так, чтобы выполнялись неравенства $\lambda'(r)<1-\varepsilon(r)<1$. При каждом выборе q условие $(*)$ интерполяции оператора $T_{\rm id}^{-1}$, а точнее непрерывности вложения $T_{\rm id}^{-1}: H_{\varphi(\lambda'(r))}\to\mathscr{G}_{\lambda'(r)}$, где $\varphi(\lambda'(r)) = (1-\varepsilon(r))^{-1}\lambda'(r)$, имеет конкретный вид

$$\begin{aligned}&\exp\{f(\lambda'(r)a_j) - f((1-\varepsilon(r))^{-1}\lambda'(r)c_i)\}\\&\qquad\qquad \le D\max\{1, \exp\{f((1-\varepsilon(r))a_j) - f(c_i)\}\} \quad \forall i,j\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

В одном из возможных случаев, а именно $\lambda'(r)a_j \ge (1-\varepsilon(r))^{-1}\lambda'(r)c_i$, имеем

$$f(\lambda'(r)a_j) - f((1-\varepsilon(r))^{-1}\lambda'(r)c_i) \le f((1-\varepsilon(r))a_j) - f(c_i)$$

согласно свойству 3 функции f, так как $(1-\varepsilon(r))^{-1}\lambda'(r)<1$.

В случае $a_j < (1-\varepsilon(r))^{-1}c_i$ ввиду монотонности f

$$f(\lambda'(r)a_j) - f((1-\varepsilon(r))^{-1}\lambda'(r)c_i) \le 0 \quad (\text{тогда } D = 1)$$

и вложение $T_{\mathrm{id}}^{-1} : H_{(1-\varepsilon(r))^{-1}\lambda'(r)} \to \mathscr{G}_{\lambda'(r)}$ доказано, а вместе с тем полностью доказана эквивалентность системы «искусственных» норм $(\|\cdot\|^*_{\lambda(r)}), \lambda(r) \uparrow 1$, любой системе норм вида $(|\cdot|^*_{\lambda'(r)}), \lambda'(r) \uparrow 1$, задающей исходную топологию E. Отсюда следует, что последовательность (h_j) является 2-абсолютным базисом пространства E и его подпоследовательность $(h_j)_{j\in\nu}$ — 2-абсолютным базисом в F. Согласно указанному выше результату о квазиэквивалентности безусловных базисов в рассматриваемых пространствах базис (h_j) квазиэквивалентен базису единичных ортов (e_n). Отсюда вытекает последняя часть утверждения теоремы, поскольку базис $(h_j)_{j\in\nu}$ в F квазиэквивалентен некоторой последовательности единичных ортов в E и порождаемые этими последовательностями подпространства изоморфны. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть E — ядерное пространство Фреше — Кёте из класса $(f)_1$. Тогда каждое дополняемое подпространство F в нем имеет базис и принадлежит тому же классу.*

Вопрос о существовании базиса в произвольном дополняемом подпространстве пространства Кёте остается открытым даже для случаев ядерных пространств классов $(f)_{-1}$ и $(f)_\infty$. Интересный частичный результат в этом направлении, относящийся к пространствам класса $(f)_\infty$, имеется в [13]. Заметим, что среди рассмотренных в теореме (и следствии) пространств имеются и представители классов $(f)_\infty$, как это следует из обзора [14]. В [14] приводятся условия, при которых пространство из класса $(f)_1$ может одновременно принадлежать классу $(g)_\infty$ (вообще говоря, с другой функцией g).

Автор выражает признательность рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Драгилев М. М.* О правильных базисах в ядерных пространствах // Мат. сб. 1965. Т. 68, № 2. С. 153–173.
2. *Драгилев М. М.* Базисы в пространствах Ксте. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1983.
3. *Захарюта В. П.* Некоторые линейные топологические инварианты и изоморфизмы тензорных произведений центров шкал // Изв. Сев.-Кав. Научн. Центра Высш. Школы. 1974. Т. 4. С. 62–64.
4. *Vogt D.* Charakterisierung der Unterraume von (s) // Math. Z. 1977. Bd 155. S. 109–117.
5. *Митягин Б. С.* Квазиэквивалентность базисов в гильбертовых шкалах // Studia Math. 1971. V. 37. P. 111–117.
6. *Ahonen H.* On nuclear Köthe spaces defined by Dragilev functions: Math. Dissertationes // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. 1981. V. 38. P. 1–57.
7. *Кондаков В. П.* О базисах в некоторых функциональных пространствах и их дополняемых подпространствах // Математ. весник. Белград. 1988. Т. 40, № 3–4. С. 267–270.
8. *Кондаков В. П.* Замечания о существовании безусловных базисов в весовых счетно-гильбертовых пространствах и их дополняемых подпространствах // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 6. С. 1308–1313.
9. *Peetre J.* On interpolation functions // I: Acta Sci. Math. 1966. V. 27, № 3–4. P. 167–171; III: Acta Sci. Math. 1969. V. 30, № 3–4. P. 235–239.
10. *Кондаков В. П.* Вопросы геометрии ненормируемых пространств. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1983.
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
12. *Драгилев М. М.* О продолжаемых базисах некоторых пространств Ксте // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 4. С. 878–882.

13. *Aytuna A., Krone J., Terzioglu T.* On complemented subspaces of certain nuclear Köthe spaces // Advances in the theory of Frechet spaces. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1989. P. 325–332.

14. *Kocatepe M., Nurlu Z.* Some special Köthe spaces // Advances in the theory of Frechet spaces. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1989. P. 269–296.

Статья поступила 14 мая 2002 г.

Кондаков Виктор Петрович
Ростовский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра теории функций и функционального анализа,
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090
kond@ns.math.rsu.ru