Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 519.46

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И КОГОМОЛОГИИ НА НЕКОТОРЫХ СОЛВМНОГООБРАЗИЯХ

В. В. Горбацевич

Аннотация: Рассматриваются вопросы существования симплектических и кэлеровых структур на компактных однородных пространствах треугольных разрешимых групп Ли. Цель работы — прояснение ситуации с построением примеров в этой области. Доказано, что невозможно довести до конца построение примеров, рассмотренных в известной работе Бенсона и Гордон о строении компактных солвмногообразий, имеющих кэлерову структуру. Это сделано с помощью доказательства отсутствия решеток (и тем самым — компактной формы) в группах Ли из указанной работы. Построен новый (аналогичный) пример, для которого в отличие от примеров в указанной работе компактная форма существует. Рассмотрен один класс разрешимых групп Ли — почти абелевых — и для него получена характеризация тех групп Ли, для которых когомологии их компактных солвмногообразий изоморфны когомологиям соответствующих алгебр Ли. До сих пор такой изоморфизм был известен только для одного конкретного класса групп Ли — треугольных. Приведены примеры новых (почти абелевых) групп Ли с таким изоморфизмом.

Ключевые слова: симплектическая структура, решетка, солвмногообразие, когомологии

Пусть M — некоторое гладкое многообразие. Симплектическая структура на M задается замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формой ω. Пара (M,ω) называется симплектическим многообразием. В последние десятилетия наблюдается постоянный рост интереса к изучению симплектических многообразий, особенно компактных. Это вызвано, в частности, связями таких многообразий с многими проблемами физики, а также чисто внутренними математическими проблемами (например, изучением кэлеровых многообразий, так как любое кэлерово многообразие имеет естественную симплектическую структуру). При этом постоянно имеется потребность в построении примеров и контрпримеров к разнообразным утверждениям относительно симплектических многообразий. Такого рода примеры строятся, в основном, двумя способами. С одной стороны, за основу берутся компактные односвязные (или почти односвязные, т. е. имеющие конечную фундаментальную группу) многообразия, такими являются орбиты коприсоединенного представления компактных групп Ли (на этих орбитах, как известно, всегда имеется естественная симплектическая структура). Однако явное построение и исследование таких многообразий

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00709).

© **2003 Горбацевич В. В.**

за пределами стандартного набора классических однородных пространств компактных групп Ли довольно трудоемко. Второй путь — построение симплектических структур на однородных пространствах групп Ли с дискретной стационарной подгруппой. Такие пространства имеют вид $M = G/\Gamma$, где G — некоторая связная группа Ли, а Γ — дискретная подгруппа в ней. Особый интерес представляет случай, когда M компактно, т. е. дискретная подгруппа Γ является решеткой в G. Однако на таких однородных G-пространствах M полезно рассматривать не только G-инвариантные симплектические структуры (задаваемые левоинвариантными дифференциальными формами ω, определяемыми симплектическими формами на соответствующей алгебре Ли $L(G)$). Дело в том, что, как показано в [1], инвариантные симплектические структуры на пространствах вида G/Γ существуют, только если G абелева (тогда M — это четномерный тор с естественной симплектической структурой). Поэтому в последние годы интерес сосредоточился именно на изучении неинвариантных симплектических структур на указанных многообразиях. В случае, когда G нильпотентна, компактное многообразие G/Γ имеет симплектическую структуру тогда и только тогда, когда G абелева (это было почти одновременно доказано сразу несколькими авторами, см., например, [2]). Поэтому в самое последнее время особый интерес стал проявляться к солвмногообразиям — однородным пространствам разрешимых групп Ли, при этом обычно предполагается, что эти пространства имеют дискретную стационарную подгруппу и компактны. Однако, за исключением простейших ситуаций, здесь редко удавалось построить содержательные примеры и контрпримеры. Это, по нашему мнению, связано с тем, что при работе с солвмногообразиями требуется применение некоторых специальных техник, не слишком хорошо известных большинству геометров. Особенно сложно, как оказалось, доказывать именно отсутствие решеток в группах Ли. Методы, использованные в данной работе, могут оказаться полезными при построении различных примеров и для доказательства несуществования примеров разного рода на компактных солвмногообразиях.

Данная статья посвящена рассмотрению примеров и контрпримеров симплектических структур на солвмногообразиях в связи со статьей Ч. Бенсона и Каролины Гордон [3], а также с последующими работами других авторов (обзор некоторых работ см. в [4]). Также будут доказаны некоторые общие результаты о когомологиях одного класса солвмногообразиий, тесно связанные с построением примеров симплектических и кэлеровых структур.

В статье [3] была доказана теорема о структуре одного класса разрешимых групп Ли (а именно вполне разрешимых или, что то же, треугольных), для которых на G/Γ (при подходящей решетке Γ) существует кэлерова (не обязательно инвариантная) структура.

Теорема 1 [3]. *Пусть G — односвязная треугольная группа Ли и $M = G/\Gamma$ — компактное солвмногообразие, на котором существует кэлерова структура. Тогда*

(i) *существует абелево дополнение a в алгебре Ли $g = L(G)$ к коммутанту $n = [g, g]$;*

(ii) *алгебры Ли a и n имеют четные размерности;*

(iii) *центр алгебры Ли g имеет с n тривиальное пересечение;*

(iv) *кэлерова форма на M когомологична левоинвариантной симплектической форме $\omega = \omega_0 + \omega_1$, причем $n = \ker(\omega_0)$, $a = \ker(\omega_1)$, в частности, a и n*

симплектичны и ортогональны относительно формы ω*;*

(v) *формы* ω_0, ω_1 *замкнуты, но не точны на* g *(а также на* a *и* n *соответственно);*

(vi) *присоединенное действие* a *на* n *состоит из инфинитезимальных симплектических автоморфизмов пары* (n, ω)*.*

Таким образом, G *разлагается в полупрямое произведение* $G = A \cdot N$*, где* A *— связная абелева подгруппа,* N *— (нильпотентный) коммутант группы* G*. Более того,* N *имеет левоинвариантную симплектическую структуру, и действие* A *на* N *симплектично.*

В частности, кэлерова форма на G когомологична некоторой инвариантной симплектической форме. Тем самым работа [3] тесно связана с симплектической геометрией (не говоря уже о том, что мнимая часть кэлеровой формы всегда является симплектической формой). В целом теорема 1 дает необходимые условия для существования кэлеровой структуры на G/Γ в случае, если G треугольна. Ранее авторы работы [3] доказали (параллельно с другими, см. выше), что на нильмногообразии, отличном от тора, не существует кэлеровой структуры. Они высказали предположение (называемое теперь иногда гипотезой Бенсона — Гордон), что для треугольных групп Ли G на $M = G/\Gamma$ кэлерова структура существует, только если G абелева (тогда M — это тор). Кстати, для инвариантных кэлеровых структур указанная гипотеза справедлива (это замечено в [3, с. 972]). Если $M = G/\Gamma$ компактно, то группа Ли G обязательно унимодулярна. Однако нужно отметить, что на неунимодулярных разрешимых (в том числе и на некоторых треугольных) группах Ли инвариантные кэлеровы структуры существуют.

В попытках построить контпримеры к своей гипотезе авторы [3] приводят три примера (примеры 1, 2 и 3). Пример 1 — это просто иллюстрация основного результата статьи [3]. Тут строится четырехмерное компактное многообразие (солвмногообразие), удовлетворяющее всем необходимым условиям из [3]. Однако показывается, что оно не имеет кэлеровой структуры. В [3] также предполагается, что некоторые дополнительные необходимые условия для существования кэлеровой структуры могли бы быть сформулированы в терминах когомологий (примеры условий такого рода приводятся в [3]). Однако для многообразия из примера 1 вещественные когомологии «кэлеровы» (т. е. изоморфны алгебре когомологий некоторого кэлерова многообразия, а именно $S^2 \times T^2$). Интересно отметить, что для прямого произведения этого многообразия на тор T^4 или на самого себя (полученные многообразия тоже когомологически кэлеровы) существование или отсутствие кэлеровой структуры на них остается открытым вопросом.

Примеры 2 и 3 в [3] не были доведены до конца, в них были построены инвариантные симплектические формы на двух разрешимых (треугольных) группах Ли, но не было установлено, имеют ли полученные симплектические пространства компактные формы. Другими словами, авторам [3] не удалось доказать, что в примерах 2 и 3 в соответствующих группах Ли G существуют решетки Γ (т. е. дискретные подгруппы с компактными фактор-пространствами), дающие упомянутые выше компактные формы в виде $M = G/\Gamma$. Построенные ими группы Ли удовлетворяют только самому простому необходимому условию существования решеток — они унимодулярны. Других условий авторам [3], как и большинству других геометров, не известно. В данной работе будут приведены примеры более тонкой работы с решетками в группах Ли. Не построив компактной формы, авторам [3] тем более не удалось построить на ней (т. е. на многообразии G/Γ) кэлерову структуру. Вопрос о построении кэлеровой структуры исходя из когомологичной ей симплектической структуры очень непрост, и в данной работе не затрагивается.

Недавно А. Тралле доказал [4], что в примере 3 из [3] на самом деле компактной формы не существует. Это, в частности, означает, что один из кандидатов на роль контрпримера к гипотезе Бенсона — Гордон отвергнут. Доказательство в [4] довольно громоздко, оно использует весьма изощренную топологическую технику (рациональные модели для многообразий и их расслоений). В данной работе мы дадим намного более простое (и чисто алгебраическое) доказательство основного результата из [4]. Далее, мы докажем, что и в примере 2 из [3] тоже не существует компактной формы. Однако оказывается, что небольшая модификация этого примера дает другой пример, в котором компактная форма уже существует. Тем самым в этом случае доведено до конца намерение авторов работы [3] представить правдоподобного кандидата на роль контрпримера к гипотезе Бенсона — Гордон. К сожалению, доказать наличие (или, что более вероятно, отсутствие) на соответствующем компактном многообразии $M = G/\Gamma$ кэлеровой структуры нам не удалось. Также в данной статье дается очень короткое доказательство уточненного результата работы [5] о гипотезе Бенсона — Гордон (причем в более общей форме) в четырехмерном случае. Всему этому посвящен § 1 работы.

Далее в § 2 работы рассматривается тесно связанный с построением симплектических структур на солвмногообразиях вопрос о совпадении алгебр когомологий разрешимых алгебр Ли, солвмногообразий для соответствующих групп Ли и их решеток. Именно совпадение этих когомологий для случая треугольных групп Ли позволило перейти в [3] от произвольной кэлеровой формы на группе Ли G к инвариантной симплектической структуре (что является ключевым моментом доказательства основного результата этой работы) и дало основания построить указанные выше примеры 1–3. Мы указываем один новый класс разрешимых групп Ли, для которого имеет место указанный изоморфизм, и строим примеры, для которых тоже справедливы все необходимые условия существования кэлеровой структуры из [3].

Автор благодарен А. Тралле за то, что он обратил его внимание на данную тематику.

§ 1 Об инвариантных симплектических структурах на некоторых солвмногообразиях

Здесь мы будем заниматься вопросами, тесно связанными с примерами 2 и 3 из работы [3].

Начнем с описания алгебр Ли $L(R)$ для разрешимых групп Ли R, фигурирующих в примерах 2 и 3 работы [3].

Пример 2. Алгебра Ли $L(R)$ имеет вид $\mathrm{Span}(A, B, X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3)$, где

$$[X_2, X_3] = 2Z_1, \quad [X_1, X_3] = Z_2, \quad [X_1, X_2] = -Z_3, \quad [A, X_1] = -X_1,$$

$$[A, X_2] = -2X_2,\ [A, X_3] = 3X_3,\ [A, Z_1] = Z_1,\ [A, Z_2] = 2Z_2,\ [A, Z_3] = -3Z_3.$$

Алгебра Ли $L(R)$ имеет разложение $L(R) = T + U$ в полупрямую сумму абелевой подалгебры T и нильпотентного идеала U, где

$$T = \mathrm{Span}(A, B), \quad U = \mathrm{Span}(X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3).$$

Пример 3. Здесь $L(R) = \mathrm{Span}(A, B, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2)$, где

$$[X_1, Y_1] = Z_1, \quad [X_2, Y_2] = Z_2, \quad [A, X_1] = X_1, \quad [A, X_2] = -X_2,$$

$$[A, Y_1] = -2Y_1, \quad [A, Y_2] = 2Y_2, \quad [A, Z_1] = -Z_1, \quad [A, Z_2] = Z_2.$$

В этом примере мы тоже имеем разложение $L(R) = T + U$ в прямую сумму абелевой подалгебры и двумерного идеала, где

$$T = \mathrm{Span}(A, B), \quad U = \mathrm{Span}(X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z_1, Z_2).$$

Укажем некоторые общие черты алгебр Ли $L(R)$ и соответствующих им односвязных групп Ли R из примеров 2 и 3.

В обоих примерах группа Ли R (односвязная) имеет форму прямого произведения на одномерную группу Ли (группу Ли, изоморфную $\mathbf{R}$): $R = \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times_\phi N)$, где, в свою очередь, группа Ли $R' = \mathbf{R} \times_\phi N$ — полупрямое произведение одномерной подгруппы $\mathbf{R}$ и нильпотентной нормальной подгруппы N (причем $L(N) = U$, где алгебры Ли U описаны выше), отвечающее некоторому гомоморфизму $\phi : \mathbf{R} \to \mathrm{Aut}(N)$. В обоих примерах группы Ли R восьмимерны (отметим, что четырехмерный случай практически исчерпан, см. ниже, он, как и шестимерный, не дает должной свободы для конструкций), а N — шестимерные 2-нильпотентные группы Ли (т. е. их коммутанты центральны). В примере 2 соответствующая группе Ли N алгебра Ли является свободной 2-нильпотетной алгеброй с тремя образующими. В примере 3 группа Ли N изоморфна прямому произведению $N_3(\mathbf{R}) \times N_3(\mathbf{R})$, где $N_3(\mathbf{R})$ — (единственная) трехмерная неабелева односвязная нильпотентная группа Ли, изоморфная группе всех унипотентных вещественных матриц третьего порядка. В обоих примерах имеем $[R, R] = N$. Далее, в обоих случаях гомоморфизм ϕ определяет однопараметрическую подгруппу в группе автоморфизмов группы Ли N, все собственные значения которой (рассматриваемой как матричная группа в силу линейности группы $\mathrm{Aut}(N)$) вещественны. Тем самым группы Ли R в рассматриваемых примерах треугольны (в [3] они названы вполне разрешимыми, более подробно об алгебраических свойствах таких групп Ли см., например, [6]). Для треугольных групп и алгебр Ли имеет место следующее ключевое в нашей теме свойство (см. [7] и § 2 ниже): алгебра когомологий $H^\star(L(R), \mathbf{R})$ алгебры Ли $L(R)$ изоморфна алгебре когомологий компактного солвмногообразия $H^\star(R/\Gamma, \mathbf{R})$, где Γ — некоторая решетка в R. Отметим, что для любой односвязной разрешимой группы Ли алгебра $H^\star(R/\Gamma, \mathbf{R})$ всегда изоморфна алгебре когомологий $H^\star(\Gamma, \mathbf{R})$ решетки Γ, так как многообразие G/Γ асферично.

Для анализа обоих примеров нам потребуется один общий результат о решетках в треугольных группах Ли. Его можно найти в [8], но мы предпочтем дать здесь прямое (и более простое, чем в [8]) доказательство.

Предложение 1. *Пусть R — некоторая треугольная связная группа Ли, а Γ — решетка в R. Тогда коммутант $[\Gamma, \Gamma]$ группы Γ является решеткой в $[R, R]$. В частности, пересечение $\Gamma \cap [R, R]$ будет решеткой в $[R, R]$.*

Доказательство. Мы можем предположить, что R односвязна, иначе перейдем к группе Ли, универсально накрывающей R, и возьмем в ней в качестве решетки прообраз подгруппы Γ при универсальном накрытии, при этом переходе доказываемые нами свойства для обоих групп Ли, как нетрудно понять, эквивалентны. Положим $N = [R, R]$, тогда N — односвязная нильпотентная (ибо R разрешима) группа Ли, поэтому она имеет естественную структуру алгебраической группы (см. например, [6, 9]). Рассмотрим алгебраическое замыкание N_1 подгруппы $[\Gamma, \Gamma]$ в N, подгруппа $[\Gamma, \Gamma]$ будет решеткой в N_1 (это вытекает из дискретности $[\Gamma, \Gamma]$ и нильпотентности N_1, см., например, [9]). Так как Γ нормализует подгруппу $[\Gamma, \Gamma]$, то Γ нормализует группу Ли N_1. Теперь нам потребуется следующая простая

Лемма 1 [10]. *Пусть R — треугольная связная группа Ли и F — ее связная подгруппа Ли. Тогда нормализатор $N_R(F)$ подгруппы F в R связен.*

Интересно отметить, что использование этой леммы позволяет упростить формулировку основного результата работы [11] (теоремы 1, в которой чуть более слабое, чем гипотеза Бенсона — Гордон, утверждение доказывается в одном очень частном случае), а именно можно удалить условие 1 в этой теореме: оно лишнее. Однако условие 2 в ней настолько ограничительно, что имеется лишь немного случаев, когда эта теорема применима.

Продолжим доказательство предложения 1. В силу леммы 1 получаем, что нормализатор $N_R(N_1)$ подгруппы Ли N_1 в R связен (и всегда замкнут). Так как $N_R(N_1)$ содержит решетку Γ, фактор-пространство $R/N_R(N_1)$ должно быть компактно. С другой стороны, это фактор-пространство диффеоморфно $\mathbf{R}^k$ при некотором $k \in \mathbf{N}$. Из компактности $R/N_R(N_1)$ вытекает, что $k = 0$ и потому $N_R(N_1) = R$, т. е. N_1 — нормальная подгруппа в R.

Рассмотрим теперь фактор-группы $R_1 = R/N_1$ и $\Gamma_1 = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$, здесь Γ_1 — абелева решетка в треугольной группе Ли R_1. Из треугольности этой группы легко вытекает, что она может иметь абелеву решетку, только если она сама абелева. Поэтому $N_1 \supset [R, R]$, а следовательно, $N_1 = [R, R]$. Тем самым $[\Gamma, \Gamma]$ является решеткой в $[R, R]$. Что касается пересечения $\Gamma \cap [R, R]$, то эта подгруппа дискретна и содержит решетку $[\Gamma, \Gamma]$ группы Ли $[R, R]$, а потому сама является решеткой в этой же группе Ли.

Продолжим наше рассмотрение примеров 2 и 3 из работы [3]. Мы будем предполагать (как это делали авторы указанной работы), что в группах Ли R из этих примеров существуют решетки Γ (хотя это, как мы покажем, на самом деле окажется неверным). В силу предложения 1 в обоих примерах пересечение $\Gamma \cap N$ будет решеткой в нильпотентной группе Ли $N = [R, R]$, описанной выше.

Хорошо известно (см., например, [9]), что если некоторая нильпотентная группа N Ли имеет решетку, то соответствующая ей алгебра Ли имеет рациональную структуру, т. е. ее структурные константы в некотором базисе являются рациональными числами. Если при этом мы рассмотрим естественную структуру алгебраической группы на N (предполагая, что N односвязна), то такая N будет определена над $\mathbf{Q}$, а решетка Γ будет соизмерима с подгруппой $N_{\mathbf{Z}}$ целых точек в N.

В [12] были классифицированы все нильпотентные алгебры Ли размерности не более чем 6 (над произвольным полем характеристики 0, что существенно сильнее, чем многие другие классификации такого же рода, опубликованные позднее другими авторами). В частности, это дает нам классификацию рациональных нильпотентных алгебр Ли до размерности 6 включительно. Интересно отметить, что в некоторых нильпотентных группах Ли имеется бесконечное число серий несоизмеримых между собой решеток (что соответствует бесконечному числу неизоморфных рациональных структур на соответствующей нильпотентной алгебре Ли). Например, это имеет место для группы Ли $N_3(\mathbf{R}) \times N_3(\mathbf{R})$, фигурирующей в примере 3.

Рассмотрим теперь подробнее пример 3 из [3]. Здесь $N = N_3(\mathbf{R}) \times N_3(\mathbf{R})$. Имеем разложение $L(R) = \mathbf{R} \oplus L'$, где $\mathbf{R} = \mathrm{Span}(B)$, $L' = \mathbf{R} +_\phi U$ (здесь $\mathbf{R} = \mathrm{Span}(A), U = L(N)$). Действие элемента $A = \phi(1)$ на U задается матрицей $\Phi = \mathrm{diag}(1, -2, -1, -1, 2, 1)$. Мы предполагаем, что в R существует решетка Γ (дающая компактную форму для примера 3). Так как R треугольна, в силу предложения 1 в группе Ли $N = [R, R]$ существует решетка (а именно, $\Gamma \cap N$). Поэтому на N (и на соответствующей алгебре Ли $L(N)$) должна существовать некоторая рациональная структура. Пусть R' — связная (и односвязная) подгруппа Ли в R, соответствующая подалгебре Ли L', описанной выше. Тогда имеем разложение $R' = \mathbf{R} \cdot_\psi N$ в полупрямое произведение, отвечающее гомоморфизму $\psi : \mathbf{R} \to \mathrm{Aut}(N)$, который однозначно определяется гомоморфизмом ϕ алгебр Ли, описанным выше. Так как группа Ли R/N абелева, с помощью подходящего выбора элемента A (не меняя коммутационных соотношений) в силу треугольности мы может добиться того, что $\Gamma' = \Gamma \cap R'$ будет решеткой в R'. Ясно, что решетка Γ' может быть записана в виде полупрямого произведения $\Gamma' = \mathbf{Z} \cdot (\Gamma \cap N)$. Пусть z — образующая подгруппы $\mathbf{Z}$ в этом разложении. Действие этого элемента на $L(N)$, порожденное присоединенным представлением группы Ли R', совпадает с действием элемента $C \cdot J$, где $C = \exp(\Phi \cdot t_0)$ для некоторого $t_0 \in \mathbf{R}$, а J — некоторая унипотентная матрица. Как следует из описания матрицы Φ, характеристическими числами элемента C будут $z, 1/z^2, 1/z, 1/z, z^2, z$, где $z = \exp(t_0)$, причем $t_0 \neq 0$.

Действие элемента C на $L(N)$ индуцирует его действие на алгебре Ли $L_{ab} = L(N)/[L(N), L(N)]$ — абелеанизации алгебры Ли $L(N)$. Рассмотрим подробнее решетку $D = \Gamma \cap N$ в N. Ее пересечение с $[N, N]$ будет решеткой в $[N, N] = \mathbf{R}^2$, а потому $D/D \cap [N, N]$ — решетка в абелевой группе Ли $N/[N, N] = \mathbf{R}^4$ (подробнее о свойствах решеток в группах Ли, используемых в этом доказательстве, см., например, в [6]). Естественное действие элемента C на $[N, N]$ (порожденное действием на R с помощью сопряжений) сохраняет решетку $D \cap [N, N] = \mathbf{Z}^2$. Характеристическими числами этого действия являются, как следует из конструкции алгебры Ли $L(R)$, числа $z, 1/z$. Их сумма должна быть целым числом, $z + 1/z = n$, $n \in \mathbf{N}$, так как действие это сохраняет решетку в $\mathbf{R}^2$ и потому в подходящем базисе записывается целочисленной матрицей. Тот факт, что след матрицы не только целый, но и положительный, вытекает из треугольности группы Ли R.

Теперь нам потребуется описание всех рациональных структур на рассматриваемой алгебре Ли $L(N)$, поскольку одна из них соответствует решетке $D = \Gamma \cap N$.

Лемма 2. *Пусть L — некоторая (нильпотентная) алгебра Ли над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$, для которой $L \otimes \mathbf{R}$ изоморфна $n_3(\mathbf{R}) + n_3(\mathbf{R})$, где $n_3(\mathbf{R})$ — алгебра Ли унипотентных вещественных матриц третьего порядка. Тогда L изоморфна (над $\mathbf{Q}$) одной (и только одной) из алгебр Ли вида $L(p_1, p_2, \ldots, p_k)$, где p_i — некоторые попарно различные простые или все равные 0 числа, задаваемой* *следующими коммутационными соотношениями:*

$$[X_1, X_2] = X_5, \quad [X_2, X_4] = X_5, \quad [X_1, X_4] = X_6, \quad [X_2, X_3] = q \cdot X_6,$$

где $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$.

Доказательство. Мы используем классификацию шестимерных нильпотетных алгебр Ли над полем $k = \mathbf{Q}$ [12]. Наша решетка D 2-нильпотентна, и ранги ее коммутанта и центра равны 2 (это следует из описания соответствующей группы Ли N, см. выше). Существует очень немного рациональных шестимерных нильпотентных алгебр Ли с такими свойствами в списке из [12]. А именно (мы используем обозначения из более доступного источника, чем статья [12], — из обзора [6]) это $g_{3,1} \oplus g_{3,1}$ (где $g_{3,1} = n_3$), $g_{5,1} \oplus \mathbf{Q}, g_{6,4}, g_{6,5}$. Легко проверить, что из этих алгебр Ли при тензорном умножении на $\mathbf{R}$ только $g_{3,1} \oplus g_{3,1}$ и $g_{6,5}$ изоморфны $n_3(\mathbf{R}) \times n_3(\mathbf{R})$. Для $g_{6,5}$ коммутационные соотношения таковы:

$$[X_1, X_2] = X_5, \quad [X_2, X_4] = X_5, \quad [X_1, X_4] = X_6, \quad [X_2, X_3] = q \cdot X_6,$$

где $q \geq 0$ принадлежит множеству $\mathbf{Q}/\mathbf{Q}^2$ (при $q = 0$ мы получаем $g_{3,1} \oplus g_{3,1}$). Поэтому мы положим $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ и получим требуемое утверждение.

При $q = 2$ явная конструкция соответствующих алгебр Ли (использующая квадратичные расширения поля $\mathbf{Q}$) приведена в [9].

Рассмотрим подробнее алгебры Ли $g_{6,5}$ при $q > 0$. Нетрудно вычислить группы автоморфизмов этих алгебр Ли. Вначале рассмотрим два специальных автоморфизма A_α, B_β:

$$A_\alpha : X_1 \to X_1,\ X_2 \to X_2,\ X_3 \to \alpha X_3,\ X_4 \to \alpha X_4,\ X_5 \to \alpha X_5,\ X_6 \to \alpha X_6,$$

$$B_\beta : X_1 \to \beta X_1,\ X_2 \to \beta X_2,\ X_3 \to X_3,\ X_4 \to X_4,\ X_5 \to \beta X_5,\ X_6 \to \beta X_6,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Положим $A = \mathrm{span}(A_\alpha)$, $B = \mathrm{span}(A_\beta)$.

Легко проверить, что $\mathrm{Aut}(g_{6,5}) = (A \cdot B) \cdot U$, здесь $F = A \cdot B$ — редуктивная часть (являющаяся абелевой двумерной группой Ли) группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(g_{6,5})$, а U — ее унипотентный радикал ($\dim U = 7$). Матричная реализация группы F может быть выбрана в виде $F = \{\mathrm{diag}(\beta, \beta, \alpha, \alpha, \alpha\beta, \alpha\beta)\}$, здесь два последних числа $\alpha\beta$, $\alpha\beta$ соответствуют действию на центре алгебры Ли U.

На $L(N)$ мы имеем рациональную структуру, соответствующую решетке в N (см. выше). В силу леммы 2 эта структура изоморфна $g_{6,5}$ для некоторого $q \geq 0$. Вначале рассмотрим случай, когда $q > 0$. Решетка в R' порождает, как было указано выше, автоморфизм алгебры Ли $L(N)$ с характеристиками значениями $z, z, 1/z, 1/z, z^2, 1/z^2$, где $z = \exp(t_0)$, причем $z > 0$. Как легко понять, множество чисел $z, z, 1/z, 1/z, z^2, 1/z^2$ совпадает с множеством $(\beta, \beta, \alpha, \alpha, \alpha\beta, \alpha\beta)$, только если $z = 1$. Но $z = \exp(t_0)$ и $t_0 \neq 0$. Получили противоречие.

Теперь рассмотрим случай, когда $q = 0$, здесь над $\mathbf{Q}$ имеем $L = L(N) = n_3(\mathbf{Q}) \oplus n_3(\mathbf{Q})$. В этом случае группа автоморфизмов алгебры ли L имеет разложение $(GL_2(\mathbf{Q}) \times GL_2(\mathbf{Q})) \cdot W$, где W — нильрадикал ($\dim W = 8$), два экземпляра группы $GL_2(\mathbf{Q})$ соответствуют двум подгруппам автоморфизмов в прямых слагаемых n_3. Рассмотрим абелеанизацию $L_{ab} = L/[L, L] = \mathbf{Q}^4$ и индуцированное действие элемента C на этом векторном пространстве. Характеристическими числами этого действия будут z, $1/z$, z^2, $1/z^2$. Как мы знаем, z вещественно и положительно. Если $z \neq 1$, то все четыре указанные числа различны. Поэтому в данном случае возможны только три разложения пространства L_{ab} в прямую сумму двух двумерных инвариантных подпространств. Если e_1, e_2, e_3, e_4 — собственные векторы, соответствующие z, $1/z$, z^2, $1/z^2$, то эти разложения таковы:

$$\mathrm{Span}(e_1, e_2) \oplus \mathrm{Span}(e_3, e_4),\ \mathrm{Span}(e_1, e_3) \oplus \mathrm{Span}(e_2, e_4),\ \mathrm{Span}(e_1, e_4) \oplus \mathrm{Span}(e_2, e_3).$$

Мы покажем вначале, что первое и последнее из них над $\mathbf{Q}$ невозможны.

Предположим, что первое из приведенных выше разложений определено над $\mathbf{Q}$ (соответственно рациональной структуре на $L = L(N)$). Тогда $z + z^2 = k, 1/z + 1/z^2 = l$ для некоторых натуральных $k, l \in \mathbf{N}$. Из этих соотношений следует, что $z = (kl-1)/l$, т. е. z должно быть рациональным. Но также должно быть $z + 1/z \in \mathbf{N}$. Легко понять, что одновременно эти условия могут выполняться только при $z = 1$. Но мы знаем, что $z \neq 1$, поэтому рассматриваемое нами разложение в прямую сумму невозможно. Совершенно аналогично доказывается, что и третьего из выписанных выше разложений в прямые суммы тоже не существует.

Напомним, что мы рассматриваем случай, когда $q = 0$, здесь рациональная структура на $L(N)$ изоморфна $n_3 \oplus n_3$ и потому должно иметь место некоторое разложение пространства L_{ab} в прямую сумму (соответствующее разложению алгебры Ли L в прямую сумму и существующее в силу ее определения). Более того, такое разложение пространства L_{ab} должно порождать разложение алгебры Ли L в прямую сумму. В силу доказанного выше остается только одно возможное разложение: $L_{ab} = \mathrm{Span}(e_1, e_3) \oplus \mathrm{Span}(e_2, e_4)$. Но $[e_1, e_3] = [e_2, e_4] = 0$ (в силу коммутационных соотношений), тем самым это разложение не может соответствовать разложению алгебры Ли L в прямую сумму идеалов (e_1, e_3 не могут порождать такой идеал, то же относится к e_2, e_4). Мы снова приходим к противоречию.

Итак, во всех возможных случаях мы приходим к противоречиям. Поэтому не существует никакой решетки в группе Ли R из примера 3 работы [3]. Это означает, что пример 3 не дает возможности усомниться в выдвинутой авторами указанной работы гипотезы (о которой говорилось выше). Тем самым представляют интерес другие примеры подобного рода, в которых если не кэлерова, то хотя бы симплектическая структура может быть построена на компактном солвмногообразии соответствующей теореме 1 структуры. Два многообразия такого рода были упомянуты выше (в связи с примером 1 из [3]). Мы перейдем теперь к рассмотрению еще одного примера из работы [3] — примеру 2, в котором ситуация была аналогична примеру 3 — симплектическая инвариантная структура на разрешимой группе Ли R была авторами построена, но вот существование компактной формы (или, что эквивалентно, существование в R решетки) для авторов [3] осталось невыясненным. Мы покажем, что и в этом случае их надежды не оправдались — нет в построенной ими группе Ли ни одной решетки. Однако после доказательства этого факта мы дадим пример не только разрушительной работы (по доказательству несуществования решеток), но и позитивной, построив на основе примера 2 другой пример с теми же геометрическими и когомологическими свойствами, в котором решетки в R уже существуют.

Доказательство отсутствия решеток в группе Ли R из примера 2 во многом аналогично, но заметно короче доказательства для примера 3. При этом мы позволим себе здесь употребить «грубую силу» в виде компьютера. Дело в том, что задач об отсутствии в группах Ли решеток может появиться в геометрии довольно много и для каждой из них придумывать новые, специальные, методы будет довольно утомительно. Поэтому полезно иметь в своем распоряжении методы, которые позволяют если и не очень изящно, то по крайней мере быстро и надежно решать некоторые возникающие при этом проблемы.

Рассмотрим, как и выше, подгруппу Ли R' и разложение для нее $R' = \mathbf{R} \cdot_\phi N$. Мы предполагаем, что в R существует некоторая решетка, тогда в силу леммы 1 $D = \Gamma \cap N$ будет решеткой в N. Как и раньше, мы можем считать, что и пересечение Γ с R' будет решеткой. Тогда эта решетка допускает разложение $\Gamma' = \mathbf{Z} \cdot D$. Алгебра Ли группы Ли N является, как следует из определения, свободной 2-нильпотентной алгеброй Ли с тремя образующими. Она изоморфна $g_{6,3}$ над $\mathbf{Q}$ в силу [12].

Запишем алгебру Ли $L = L(N)$ в виде $L = V + \Lambda^2 V$, где V — некоторое векторное пространство, $\dim V = 3$, здесь $Z(L) = \Lambda^2 V$ — центр. Действие на L образующей $B \in \mathbf{R}$ одномерной подалгебры в разложении алгебры Ли $L(R)$ (см. выше) имеет характеристические значения $-1, -2, 3, 1, 2, -3$, что следует из определения алгебры Ли $L(R)$. Поэтому действие образующей γ подгруппы $\mathbf{Z}$ из разложения решетки Γ' имеет характеристические значения $1/z$, $1/z^2$, z^3, z, z^2, $1/z^3$, где $z = \exp(Bt_0), t_0 \neq 0$. Так как коммутант инвариантен относительно действия элемента γ, то для соответствующей решетке рациональной структуры на L получаем два действия, определенных над $\mathbf{Q}$, — на V и на центре $Z(n) = \Lambda^2 V$ (на трехмерных векторных пространствах, которые можно отождествить как с абелевыми группами Ли, так и с соответствующими им абелевыми алгебрами Ли). Соответствующие характеристические значения для действия на V равны $1/z, 1/z^2, z^3$. Так как это действие сохраняет некоторую решетку (а именно решетку $D/D \cap [N, N]$), то, в частности, его след должен быть целочисленным, т. е. должно быть $1/z + 1/z^2 + z^3 = m$ для некоторого $m \in N$. Аналогично для действия на $\Lambda^2 V$ характеристические значения равны $z, z^2, 1/z^3$, поэтому $z + z^2 + 1/z^3 = n$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Мы получили два условия, которые перепишем в виде системы двух полиномиальных уравнений:

$$x^5 - mx^2 + x + 1 = 0, \quad x^5 + x^4 - nx + 3 + 1 = 0.$$

Нам нужно решить эту систему. Точнее, нас интересуют вещественные решения x при каких-либо целых m, n. Это, наверное, можно сделать здесь с помощью некоторого красивого специального приема, но нам хотелось иметь в своем распоряжении метод, который позволяет единообразно решать разные системы такого рода (ибо они часто появляются при изучении решеток в разрешимых группах Ли). Поэтому мы используем «грубую силу» — компьютер. А именно, с его помощью мы найдем базис Гребнера для рассматриваемой системы уравнений (более подробно о базисе Гребнера см., например, в [13]). Для проведения вычислений была использована программа Maple V 3 (свободно распространяемая через Интернет). Мы получили следующую систему полиномиальных образующих идеала, порожденного уравнениями нашей полиномиальной системы, т. е. базис Гребнера из пяти элементов:

1) $-7m^2 + m^3 - m^4 - m^5 - 13mn - m^2 n + 5m^3 n - 3m^4 n - 7n^2 - mn^2 + 10m^2 n^2 + n^3 + 5mn^3 + m^3 n^3 - n^4 - 3mn^4 - n^5$,

2) $-28m + 4m^2 - 4m^3 - 4m^4 - 20n - 16mn + 29m^2 n - 8m^3 n - m^4 n - 8n^2 + 8mn^2 + 17m^2 n^2 - m^3 n^2 - 5mn^3 + 12m^2 n^3 + 2m^3 n^3 + m^4 n^3 - 10n^4 - 12mn^4 - -2m^2 n^4 + 3m^3 n^4 - 6n^5 - 12mn^5 + m^2 n^5 - 6n^6 - m^2 n^6 + 2n^7 + mn^7 + 12nx + 8n^2 x + 23n^3 x + 9n^4 x + 12n^5 x + n^7 x - n^8 x$,

3) $-52m+6m^2+4m^3-6m^4-20n-68mn+63m^2n-14m^3n-m^4n-52n^2+26mn^2+24m^2n^2+3m^3n^2+3m^4n^2+16n^3-13mn^3-4m^2n^3+9m^3n^3--18n^4-39mn^4+4m^2n^4-20n^5-mn^5-3m^2n^5+6n^6+3mn^6+40mx+68nx+18n^2x+33n^3x+22n^4x+2n^5x+4n^6x-3n^7x$,

4) $-20-26m-7m^2-8m^3-3m^4-20n+36mn+9m^2n-7m^3n+2m^4n+24n^2+33mn^2-18m^2n^2+4m^3n^2-m^4n^2+18n^3-14mn^3+8m^2n^3-3m^3n^3--14n^4+8mn^4-3m^2n^4+10n^5+2mn^5+m^2n^5-2n^6-mn^6-20x+4nx-31n^2x+9n^3x-14n^4x+6n^5x-3n^6x+n^7x-20x^2-10nx^2-10n^2x^2$,

5) $40-52m+6m^2+4m^3-6m^4-20n-68mn+63m^2n-14m^3n-m^4n-52n^2+26mn^2+24m^2n^2+3m^3n^2+3m^4n^2+16n^3-13mn^3-4m^2n^3++9m^3n^3-18n^4-39mn^4+4m^2n^4-20n^5-mn^5-3m^2n^5+6n^6+3mn^6+68nx+18n^2x+33n^3x+22n^4x+2n^5x+4n^6x-3n^7x+40nx^2-40x^3$.

Громоздкость ответа наводит на мысль, что без компьютера этот ответ вряд ли был бы найден. Хотя на самом деле нас будет интересовать не столько сам ответ целиком, сколько некоторые его особенности.

Рассмотрим уравнения, соответствующие элементам полученного базиса. Первый полином — это просто результант нашей исходной системы полиномиальных уравнений. Следующие два полинома (с номерами 2 и 3) дают уравнения, линейные по x. Вот их мы и используем. Если хотя бы в одном из этих двух уравнений коэффициент при x ненулевой, то так как m, n целые, число x должно быть рациональным. Но рациональные (и положительные, как нам на самом деле нужно) корни исходного уравнения $x^5-mx^2+x+1=0$ могут равняться, как нетрудно убедиться стандартными методами, только 1. Выясним теперь, могут ли оба коэффициента при x обращаться в 0. Для второго (по номеру) базисного уравнения коэффициент при x равен $12n+8n^2+23n^3+9n^4+12n^5+n^7-n^8$. Ненулевой целый корень у этого полинома — это только $n=3$. Тогда для коэффициента при x из третьего уравнения получаем равенство $-120+40m=0$ (используя $n=3$), откуда $m=3$. Наша исходная система при $m=n=3$ имеет только одно решение $x=1$. Итак, должно быть $x=1$, но это противоречит нашему предположению. Отсюда следует, что в рассматриваемых случаях оба коэффициента при x для второго и третьего многочленов одновременно нулевыми быть не могут. Но это приводит к противоречию, как только что показано. Поэтому получаем, что и в группе Ли R из примера 2 не существует решеток.

Тем самым доказана

Теорема 2. *В связных группах Ли, алгебры Ли которых описаны выше* (*в примерах* 2 *и* 3) *не существует решеток* (*дискретных подгрупп с компактным фактор-пространством*).

Рассмотрим теперь некоторую модификацию примера 2. Пусть L — алгебра Ли с базисом

$$A, B, X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3$$

и коммутационными соотношениями

$$[X_1, X_2] = -Z_3, \quad [X_1, X_3] = Z_2, \quad [X_2, X_3] = 2X_1,$$

$$[A, X_1] = \lambda_1 X_1, \quad [A, X_2] = \lambda_2 X_2, \quad [A, X_3] = \lambda_3 X_3,$$

$$[A, Z_1] = (\lambda_2+\lambda_3)Z_1, \quad [A, Z_2] = (\lambda_1+\lambda_3)Z_2, \quad [A, Z_3] = (\lambda_1+\lambda_2)Z_3$$

для некоторых $\lambda_i \in \mathbf{R}$. Следуя [3], положим

$$\omega = \alpha\wedge\beta + \mu_1\wedge\zeta_1 + \mu_2\wedge\zeta_2 + \mu_3\wedge\zeta_3,$$

где $\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ — двойственный базис для L.

Как легко проверить, все свойства алгебры Ли L и симплектической формы ω для нашего (общего) примера те же, что для примера 2 в [3], если $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, и $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Следовательно, как и в [3], для нашей алгебры Ли L выполнено «сильное свойство Лефшеца», заключающееся в том, что отображение $\Lambda[\omega]^{m-1} : H^{m-k}(M, \mathbf{R}) \to H^{m+k}(M, \mathbf{R})$ является изоморфизмом при всех k. Так же, как в [3], вычисляется и кольцо когомологий алгебры Ли L — оно изоморфно кольцу когомологий кэлерова многообразия $T^2 \times \mathbf{CP}^3$. Теперь докажем, что хотя бы для некоторых троек чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2$ мы можем построить решетки в треугольной односвязной разрешимой группе Ли R, отвечающей нашей алгебре Ли L.

Рассмотрим полином $x^3 - px^2 + qx - 1$ с целыми коэффициентами и предположим, что он имеет три вещественных корня. Таких полиномов существует много. Например, полином $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$ имеет корни $x_1 \approx 0.198$, $x_2 \approx 1.555$, $x_3 \approx 3,247$. Положим $\lambda_i = \ln(x_i)$, тогда для только что приведенного примера $\lambda_1 \approx -1.619$, $\lambda_2 \approx 0.441$, $\lambda_3 \approx 1.777$.

Для указанных чисел λ_i действие матрицы $C = \mathrm{diag}(\exp(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3))$ на V имеет характеристический многочлен $x^3 - px^2 + qx - 1$ и сопряжено действию некоторого элемента из $\mathrm{GL}(3, \mathbf{Z})$. Соответствующее действие на $\Lambda^2 V$ тоже целочисленно. Тем самым существует такая решетка D в N, которая инвариантна относительно действия ϕ некоторого элемента γ из группы автоморфизмов группы Ли N. Положим $\Gamma_1 = \mathbf{Z} \times_\phi D$, получим решетку в R_1. Группа $\Gamma = \Gamma_1 \times \mathbf{Z}$ является решеткой в $R = R_1 \times \mathbf{R}$. Поэтому мы получили решетку в нашей группе Ли R, которая немного отличается от группы Ли R из примера 2 в [3]. Компактное симплектическое многообразие $M = R/\Gamma$ дает нам пример того самого рода, что не удалось построить авторам работы [3]. Для этого M все когомологические свойства те же, что у кэлерова многообразия (это проверяется точно такими же вычислениями, как в [3]), более того, (нильпотентная) минимальная модель для M та же, что для кэлерова многообразия $T^2 \times \mathbf{CP}^3$ (как и в [3]). Однако неизвестно, есть ли на этом M комплексная структура. Если ее нет, то на M нет и кэлеровой структуры. И если это действительно так, то получится, что не существует когомологических инвариантов, которые могли бы характеризовать кэлеровы солвмногообразия (напомним, что мы рассматриваем на солвмногообразиях не только инвариантные, а всевозможные кэлеровы структуры). Как уже отмечалось выше, на роль подобных примеров претендуют и два примера прямых произведений, указанные в [3] при обсуждении примера 1 (см. выше). Следует отметить, что во всех примерах из [3], а также в нашем примере для построенных групп Ли выполняются все необходимые условия существования на солвмногообразии кэлеровой структуры, содержащиеся в сформулированной выше теореме 1 из [3].

Аналогичные примеры можно строить, исходя и из других нильпотентных (четномерных) алгебр Ли n малой размерности. Выше были использованы две шестимерные алгебры Ли n — сумма двух изоморфных трехмерных и свободная 2-нильпотентная с тремя образующими. При этом необходимо, чтобы на выбранной четномерной нильпотентной алгебре Ли существовала симплектическая структура. Как показано в [14], неабелевыми они будут только начиная с размерности 6, все шестимерные (только комплексные — такова специфика этой статьи) нильпотентные алгебры Ли, которые допускают симплектическую структуру, перечислены в [14] (их 26 из общего числа 36, причем на одной алгебре Ли может существовать несколько различных симплектических структур). Полезно отметить, что вещественная классификация нильпотентных шестимерных алгебр Ли отличается от комплексной — в последней некоторые серии неизоморфных вещественных алгебр Ли оказываются изоморфными. После выбора нильпотентной симплектической алгебры Ли нужно выбрать еще абелеву (и расщепимую) алгебру дифференцирований и образовать соответствующую полупрямую сумму. Именно с помощью таких разрешимых алгебр Ли и следует искать контрпримеры для гипотезы из [3] и просто интересные примеры симплектических структур на разрешимых группах Ли.

Рассмотрим вкратце вопрос о кэлеровых структурах на компактных солвмногообразиях малой размерности. Для случая размерности 2 есть только одно компактное солвмногообразие — это тор, на котором, конечно, есть кэлерова структура (причем инвариантная). Для размерности 4 в работе [5] была предпринята попытка доказать гипотезу Бенсона — Гордон. Однако, как было отмечено позже в [15], доказательство содержит ошибку — используемое там для исключения случая, когда второе число Бетти рассматриваемого многообразия равно 2, утверждение о несуществовании тут даже комплексной структуры неверно (в [15] показано, что такого рода многообразия могут иметь структуру гиперэллиптической поверхности). Ниже мы дадим простое доказательство ослабленного (более точно, исправленного) результата из [5], причем даже в более общей ситуации — для произвольных компактных четырехмерных солвмногообразий, а не только для порожденных треугольными группами Ли и не только с дискретной стационарной подгруппой (последнее условие требуется в [5]). В [5] доказательство довольно громоздко и использует подробное описание всех решеток в трехмерных разрешимых группах Ли.

Предложение 2 (ср. [5]). *Пусть $M = G/H$ — ориентируемое компактное четырехмерное солвмногообразие (R — разрешимая группа Ли, H — замкнутая подгруппа в ней). Если на M существует кэлерова структура, то M — расслоение над двумерным тором, слой которого тоже двумерный тор.*

Доказательство. Рассмотрим $b_1(M)$ — первое число Бетти многообразия M. Как известно, любое солвмногообразие асферично (т. е. все его гомотопические группы, за исключением, возможно, первой, тривиальны). Поэтому $b_1(M) = b_1(\Gamma)$, где $\Gamma = \pi_1(M)$ — фундаментальная группа многообразия M. Далее, известно, что $b_1(\Gamma) = \operatorname{rank} \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$. Так как M четырехмерно и асферично, то $1 \leq b_1(\Gamma) \leq 4$. Для кэлерова многообразия (каковым мы предполагаем M) случаи $b_1(\Gamma) = 1, 3$ невозможны (первое число Бетти кэлерова многообразия должно быть четным).

В случае $b_1(\Gamma) = 2$ рассмотрим строение группы Γ. Группа $[\Gamma,\Gamma]$ нильпотентна, не имеет кручения (так как M асферично), полициклична (ибо Γ полициклична, см. [9]), причем ранга 2. Такая группа обязательно изоморфна $\mathbf{Z}^2$. Поэтому группу Γ можно рассматривать как расширение $\{0\} \to \mathbf{Z}^2 \to \Gamma \to \mathbf{Z}^2 \to \{0\}$ (подробнее о строении фундаментальной группы солвмногообразий см. [9, 16]). Но тогда солвмногообразие M может быть представлено в виде расслоения над T^2 со слоем T^2 [16].

Рассмотрим случай $b_1 = 4$, здесь $[\Gamma,\Gamma]$ должна быть конечной подгруппой в Γ. Но Γ не имеет кручения и полициклична. Следовательно, Γ конечно определена, абелева и не имеет кручения. Поэтому она должна быть изоморфна $\mathbf{Z}^4$.

Но компактное солвмногообразие с такой фундаментальной группой диффеоморфно тору T^4 [16], который есть пространство тривиального расслоения над двумерным тором со слоем тор.

Для шестимерных солвмногообразий R/Γ в [11] доказано, что нильрадикал треугольной группы Ли R должен быть абелев и группа Ли представляется в виде полупрямого произведения $\mathbf{R}^2 \cdot_\phi \mathbf{R}^4$. Так как действие $\mathbf{R}^2$ должно сохранять на $\mathbf{R}^4$ симплектическую структуру (см. выше), получаем, что образ $\phi(\mathbf{R}^2)$ гомоморфизма ϕ, задающий рассматриваемое полупрямое произведение, является абелевой подгруппой размерности ≤ 2 в симплектической группе $Sp(4, \mathbf{R})$. Это может помочь в более подробном рассмотрении указанного случая (мы здесь этим заниматься не будем). Для M из сказанного выше вытекает, что имеется расслоение над тором T^2 со слоем T^4. Тем самым получаем результат, подобный полученному выше в четырехмерном случае.

§ 2. Когомологии компактных солвмногообразий почти абелевых групп Ли

Как уже отмечалось выше, появление условия треугольности групп Ли при рассмотрении на их однородных пространствах симплектических и кэлеровых структур связано с тем, что здесь имеет место изоморфизм когомологий алгебры Ли и компактного солвмногообразия соответствующей группы Ли. Для нильмногообразий это доказано К. Номидзу [17], а для треугольных — А. Хаттори [7]. Кроме этих результатов имеется одно общее утверждение, дающее достаточные условия для существования указанного изоморфизма [9]. Однако применять это утверждение при построении примеров не так просто, как кажется на первый взгляд. Поэтому полезно рассмотреть некоторые частные случаи, что и будет сделано ниже.

Пусть G — некоторая связная группа Ли, $L(G)$ — ее алгебра Ли. Пусть также Γ — некоторая решетка в G. Рассмотрим однородное пространство $M = G/\Gamma$ и алгебру его вещественных когомологий $H^\star(M, \mathbf{R})$. Имеется естественное отображение $H^\star(L(G), \mathbf{R}) \to H^\star(M, \mathbf{R})$, которое строится следующим образом. Произвольный коцикл алгебры Ли $L(G)$ порождает левоинвариантную замкнутую форму на G, а та, в свою очередь, замкнутую дифференциальную форму на M. Переходя к когомологиям и используя теорему де Рама, получаем указанное выше отображение. Для компактных M оно является вложением [9], однако изоморфизмом, вообще говоря, не будет (см. ниже).

Теорема 3 [9]. *Пусть G — некоторая связная группа Ли, Γ — решетка в G. Предположим, что алгебраические замыкания $\langle \mathrm{Ad}_G(G) \rangle$ и $\langle \mathrm{Ad}_G(\Gamma) \rangle$ образов группы Ли G и решетки Γ при присоединенном представлении $\mathrm{Ad} : G \to GL(L(G))$ совпадают (в группе линейных преобразований алгебры Ли $L(G)$). Тогда естественное отображение алгебр когомологий $H^\star(L(G), \mathbf{R}) \to H^\star(M, \mathbf{R})$, описанное выше, является изоморфизмом.*

Отметим, что для фигурирующего в теореме 3 отображения алгебр когомологий доказывать нужно только его эпиморфность. Далее, так как $\langle \mathrm{Ad}_G(G) \rangle$ всегда содержит $\langle \mathrm{Ad}_G(\Gamma) \rangle$, то существенным в условии теоремы 3 является лишь существование обратного включения $\langle \mathrm{Ad}_G(G) \rangle \subset \langle \mathrm{Ad}_G(\Gamma) \rangle$.

Посмотрим, в каких случаях применима теорема 3.

Если группа Ли G нильпотентна, то группа Ли $\mathrm{Ad}_G(G)$ унипотентна и потому $\langle \mathrm{Ad}_G(G) \rangle$ совпадает с $\mathrm{Ad}_G(G)$. При этом $\langle \mathrm{Ad}_G(\Gamma) \rangle$ является решеткой в группе Ли $\mathrm{Ad}_G(G)$ и алгебраическое замыкание этой решетки совпадает с этой объемлющей ее группой Ли. Поэтому из теоремы 3 вытекает основной результат работы [17].

Если G треугольна, то группа $\mathrm{Ad}_G(G)$ не обязательно будет алгебраична. Однако оказывается, что здесь всегда $\langle \mathrm{Ad}_G(G)\rangle = \langle \mathrm{Ad}_G(\Gamma)\rangle$ (частный случай этого см. ниже), что позволяет применить теорему 3. Полученный при этом изоморфизм алгебр когомологий был впервые доказан А. Хаттори [7] другим методом.

Рассмотрим один специальный класс алгебр Ли. Назовем алгебру Ли *почти абелевой*, если она имеет абелев идеал коразмерности 1. Ясно, что любая почти абелева алгебра Ли разрешима и может быть представлена в виде $L = \mathbf{A} +_\phi B$ полупрямой суммы одномерной абелевой подалгебры $\mathbf{A} \simeq \mathbf{R}$ и абелева идеала B. Гомоморфизм $\phi : A \to \mathrm{Der}(B) = \mathrm{gl}(B)$ в алгебру Ли дифференцирований алгебры Ли B (являющуюся алгеброй Ли всех линейных преобразований алгебры Ли B, которую можно рассматривать просто как векторное пространство) задается матрицей $\Phi = \phi(1)$. Эту матрицу можно рассматривать с точностью до подобия (в алгебре Ли всех матриц) и с точностью до умножения на произвольную ненулевую константу (что соответствует выбору другой образующей в алгебре Ли A). Среди почти абелевых алгебр Ли можно найти представителей многих классов алгебр Ли: нильпотентные (если Φ нильпотентна) и ненильпотентные, треугольные (если все собственные значения матрицы Φ вещественны) и нетреугольные, алгебры Ли типов (E), (I) (подробнее о которых см. в [6]) и др. Почти абелевы группы Ли определяются условием наличия абелева нормального делителя коразмерности 1 или же, что эквивалентно, условием почти абелевости их алгебры Ли. Односвязная почти абелева группа Ли имеет разложение в полупрямое произведение $R = A \times_\psi B$, где A — одномерная подгруппа, а B — односвязная абелева нормальная подгруппа коразмерности 1 (изоморфная $\mathbf{R}^n$ при некотором натуральном n). При этом гомоморфизм $\psi : A \to GL(B)$ определяет однопараметрическую подгруппу в $GL(B)$. Если алгеброй Ли для этой группы Ли R является алгебра Ли L, описанная выше, то $\psi(t) = \exp(t \cdot \Phi)$.

Пусть D — некоторая решетка в односвязной почти абелевой группе Ли R. Оказывается, что можно так выбрать подгруппу A и нормальный делитель B, что $D \cap B$ будет решеткой в B и тогда саму решетку D можно будет представить в виде полупрямого произведения $D = C \cdot (D \cap B)$, где $C \simeq \mathbf{Z}$, а $D \cap B$ — решетка в абелевой группе Ли $B \simeq \mathbf{R}^n$, изоморфная $\mathbf{Z}^n$. А именно, рассмотрим в R нильрадикал N. Так как B — абелев нормальный делитель, то либо R нильпотентна либо ее нильрадикал совпадает с B.

Если R не нильпотентна, то подгруппа $D \cap N$ — решетка в N (см. [9]). Ясно, что $D/D \cap N \simeq \mathbf{Z}$, откуда без труда вытекает указанное выше разложение. Если же R нильпотентна, то вместо нильрадикала рассмотрим коммутант $[R, R]$. Пересечение решетки D с ним будет в нем решеткой (см. [9, 16] и лемму 1 выше), а фактор-группа группы D по этому пересечению — свободная абелева группа — будет решеткой в $R/[R, R] \simeq \mathbf{R}^k$ (при некотором натуральном k). Выберем в $R/[R, R]$ связную подгруппу (фактически подпространство) коразмерности 1 такую, что ее пересечение с решеткой будет в этой подгруппе решеткой, которая не пересекается с образом группы A при естественном эпиморфизме $R \to R/[R, R]$. Взяв прообраз этой связной подгруппы Ли при естественном эпиморфизме, получим, как нетрудно понять, такую новую подгруппу B', при которой имеет место указанное выше разложение для D.

В дальнейшем мы будем предполагать, что выбраны разложения для R и D вида $R = \mathbf{R} \cdot_\psi \mathbf{R}^n$, $D = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^n$, согласованные между собой в указанном выше смысле.

Пусть z — образующая в подгруппе $\mathbf{Z} \subset D$. Элемент z действием на $\mathbf{R}^n$ порождает некоторую матрицу, т. е. $z \in GL_n(\mathbf{L}(R))$. Пусть однопараметрическая подгруппа, соответствующая подгруппе $A \simeq \mathbf{R}$, имеет вид $\exp(t \cdot Z)$, где матрица Z — это некоторая матрица из алгебры Ли дифференцирований алгебры $L(N)$. Тогда существует такая унипотентная матрица J, что $z = J \cdot \exp(Z)$. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ спектр матрицы Z (совокупность всех ее характеристических значений, возможно, кратных и/или комплексных).

Теорема 4. *Пусть $R = \mathbf{R} \times_\psi \mathbf{R}^n$ — односвязная почти абелева группа Ли, а $D = \mathbf{Z} \times_{\psi|_\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^n$ — решетка в ней. Алгебраические замыкания подгрупп $\mathrm{Ad}_R(R)$ и $\mathrm{Ad}_R(D)$ совпадают тогда и только тогда, когда число πi нельзя представить в виде линейной комбинации с рациональными коэффициентами чисел λ_k* (здесь $\pi = 3.14159\dots$, *а i — мнимая единица*).

Доказательство. Рассмотрим присоединенное представление $\mathrm{Ad} : R \to GL(L(R))$ группы Ли R. Образ группы R при этом представлении тоже почти абелев. Рассмотрим его алгебраическое замыкание. Образ нильрадикала N группы Ли R унипотентен, связен и потому является алгебраически замкнутым. Поэтому $\langle \mathrm{Ad}_R(R) \rangle = \langle \mathrm{Ad}_R(A) \rangle \cdot \mathrm{Ad}_R(n)$ и нахождение алгебраического замыкания $\langle \mathrm{Ad}_R(R) \rangle$ сводится к нахождению алгебраического замыкания одномерной подгруппы $\mathrm{Ad}_R(A)$. Теперь рассмотрим $\langle \mathrm{Ad}_R(\Gamma) \rangle$. Образ подгруппы $\Gamma \cap N$ унипотентен, и его алгебраическое замыкание совпадает с Ad-образом нильрадикала N. Поэтому подобно группе Ли R нахождение алгебраического замыкания образа решетки при присоединенном представлении сводится к нахождению алгебраического замыкания образа циклической подгруппы (в приведенном выше разложении для Γ она обозначена как $\mathbf{Z}$).

Начнем с нильрадикала. Так как $\Gamma \cap N$ — решетка в N, то алгебраические замыкания их образов при присоединенном представлении совпадают. Остается выяснить, совпадают ли алгебраические замыкания циклической и однопараметрической подгрупп. Поскольку описанная выше матрица J унипотентна (она соответствует действию некоторого элемента из нильрадикала), она несущественна при сравнении алгебраически замыканий указанных выше циклической и однопараметрической подгрупп. Это означает, что мы можем считать элемент z принадлежащим подгруппе $\exp(tZ)$, в частности, что $z = \exp(Z)$. Ключевым моментом в нашем доказательстве является следующая

Лемма 3. *Пусть $X \in \mathrm{gl}_n(\mathbf{R})$ — некоторая матрица, $A = \exp(tX)$ — одномерная подгруппа в $GL_n(\mathbf{R})$, $c = \exp(Y)$ ($Y \in \mathrm{gl}_n(\mathbf{R})$, причем Y пропорционален X) — некоторый ее неединичный элемент и C — порожденная им циклическая подгруппа. Алгебраические замыкания подгрупп A и C совпадают тогда и только тогда, когда число πi не может быть представлено в виде линейной комбинации с рациональными коэффициентами собственных значений матрицы C.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $c = \exp(Y)$ и алгебраическое замыкание порожденной ею циклической подгруппы C. Имеем разложение Жордана $Y = Y_s + Y_n$ в сумму двух коммутирующих между собой матриц: полупростой Y_s (т. е. вполне приводимой над $\mathbf{C}$) и нильпотентной Y_n. Тогда $c = c_s \cdot c_u$, где матрица c_s полупроста, c_u унипотентна и они между собой коммутируют. Ясно, что $\langle C\rangle_n = \langle \exp(tY_u)\rangle$. Поэтому нам остается только сравнивать $\langle C\rangle_s$ и $\exp(tC_s)$.

Мы можем считать, переходя к подходящему базису, что c_s диагональна, $c_s = \mathrm{diag}(\exp(\lambda_1, \lambda_2, \dots))$. Обозначим $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$.

Алгебраическое замыкание тогда тоже состоит из диагональных матриц, т. е. лежит в некотором алгебраическом торе. Ясно, что алгебраическое замыкание полупростого элемента абелевой алгебраической группы совпадает с пересечением ядер всех характеров этой группы. Характеры тора, состоящего из диагональных матриц $\mathrm{diag}(\exp(\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n))$, имеют вид $\Pi_k e^{\mu_k n_k}$.

Предположим, что $\langle A\rangle = \langle C\rangle$. При совпадении алгебраических замыканий в случае выполнения любого равенства вида $\Pi_k e^{\lambda_k n_k} = 1$ для некоторого набора целых чисел n_k должно выполнятся и равенство $\Pi_k e^{\lambda_k n_k t} = 1$ при всех значениях параметра t.

Равенство $\Pi_k e^{\lambda_k n_k} = 1$ эквивалентно условию $\Sigma_k \lambda_k n_k = 2\pi i N$ при некотором натуральном N. Если $N \neq 0$, то $\Pi_k e^{\lambda_k n_k t}$ не может тождественно равняться 1. Поэтому из равенства $\langle A\rangle = \langle C\rangle$ вытекает, что число πi не должно быть рациональной линейной комбинацией чисел λ_k. Верно и обратное, как нетрудно убедиться, обращая приведенные выше рассуждения. Лемма доказана.

Продолжим доказательство нашей теоремы. Применим лемму 3 к указанной выше однопараметрической подгруппе и к ее циклической подгруппе, действующим с помощью присоединенного представления на алгебре Ли $L(R)$. Совпадение их алгебраических замыканий необходимо и достаточно для справедливости утверждения доказываемой теоремы. В силу леммы 2 такое совпадение эквивалентно отсутствию указанной выше рациональной линейной комбинации характеристических чисел. В этой комбинации рассматриваются все характеристические числа действия. Однако действие на фактор-алгебре по нильрадикалу тривиально, поэтому мы можем (отбросив нулевые корни) ограничиться рассмотрением характеристических чисел действия на n. Но тогда доказанное выше и дает требуемое утверждение.

Из доказанной теоремы 4 сразу видно, почему в частном (почти абелевом) случае теорема 3 справедлива для нильпотентных и треугольных групп Ли. Если почти абелева R нильпотентна, то все λ_k равны 0 и никакая их линейная комбинация не может равняться πi. Если R треугольна, то все λ_k вещественны и их рациональные линейные комбинации тоже не могут дать мнимое число πi.

Рассмотрим несколько конкретных примеров в связи с теоремой 4. Начнем с одной группы Ли типа (I) (по терминологии из [6]). А именно, пусть R — универсальная накрывающая для группы $E(2)$ движений евклидовой плоскости. В R существует решетка D, изоморфная $\mathbf{Z}^3$ (прообраз подгруппы целочисленных параллельных переносов при универсальном накрытии). Как нетрудно проверить, ненулевые характеристические значения присоединенного представления алгебры Ли чисто мнимые (т. е. это алгебра Ли типа (I)). Для решетки здесь обязательно соответствующие λ имеют вид $r \cdot \pi$ для некоторых рациональных r. В силу теоремы 4 здесь $\mathrm{Ad}_R(R)$ не совпадает с $\mathrm{Ad}_R(D)$. Непосредственно видно, что и когомологии многообразия R/D (изоморфные когомологиям тора

T^3) не изоморфны когомологиям алгебры Ли $e(2)$ (у нее первое число Бетти равно 1, а у тора оно равно 3).

На основе этого примера можно построить немало подобных примеров разрешимых групп Ли, для которых не выполняется заключение теоремы 4. Достаточно, например, просто заменить $\mathbf{R}^2$ на $\mathbf{R}^n$ и выбрать так действие $\mathbf{R}$ на $\mathbf{R}^n$, что оно имеет пару мнимых сопряженных корней.

Еще один интересный класс разрешимых алгебр Ли — алгебры Ли типа (E) или экспоненциальные. Они характеризуются тем, что для них экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом (если рассматривать односвязные группы Ли), подробнее см. [6]. Односвязная группа Ли экспоненциальна тогда и только тогда, когда присоединенное представление ее алгебры Ли не имеет чисто мнимых характеристических значений. Любая треугольная группа Ли является экспоненциальной. Вначале покажем, что среди экспоненциальных алгебр Ли есть такие, для которых заключение теоремы 2 неверно.

Рассмотрим группы Ли вида $R = \mathbf{R} \cdot_\phi \mathbf{R}^4$ — полупрямые произведения, задаваемые гомоморфизмами вида $\phi(t) = \exp tZ$ для матриц $Z \in M_4(\mathbf{R})$. Эти матрицы будем предполагать диагонализируемыми (над $\mathbf{C}$), подобными диагональным матрицам вида $\mathrm{diag}(\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2)$. Положим

$$\lambda_1 = \alpha + i\pi, \lambda_2 = -\alpha + i\pi.$$

Получится группа Ли, не имеющая тип (I), более того, она типа (E), так как не имеет ненулевых чисто мнимых собственных значений. Если α выбрать так, что $e^\alpha + e^{-\alpha} = n$ при некотором целом (точнее, натуральном ≥ 2) n, то очевидно, что в построенной группе Ли R имеется решетка вида $D = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{R}^2 \oplus \mathbf{R}^2)$.

После рассмотрения ряда «негативных» примеров дадим и позитивные. А именно, покажем, что среди почти абелевых групп Ли заключение теоремы 2 об изоморфизме когомологий справедливо не только для треугольных групп Ли. Тем самым мы покажем, что введенный класс почти абелевых групп Ли представляет интерес для построения примеров, в частности, в симплектической геометрии.

Рассмотрим группы Ли вида $R = \mathbf{R} \cdot_\phi \mathbf{R}^3$ — полупрямые произведения, задаваемые гомоморфизмами вида $\phi(t) = \exp tZ$ для матриц $Z \in M_3(\mathbf{R})$. Эти матрицы будем предполагать диагонализируемыми (над $\mathbf{C}$), подобными диагональным матрицам вида $\mathrm{diag}(\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2)$. Положим $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = -2\alpha$. Выпишем условия для существования в R решетки. Это требования равенства единице произведения характеристических значений матрицы $\phi(1)$ (в нашем случае оно выполняется автоматически), а также целочисленности суммы характеристических значений и суммы попарных их произведений. Эти условия эквивалентны целочисленности матрицы третьего порядка в некотором базисе.

Для нашего случая условия эти имеют вид

$$2e^\alpha \cdot \cos\beta + e^{-2\alpha} = m, \quad 2e^{-\alpha} \cdot \cos\beta + e^{2\alpha} = n,$$

где m, n — некоторые целые числа. Еще одно условие (из теоремы 4) в данном случаем означает, как нетрудно понять, что число β не должно быть равно $r\pi$ ни при каком рациональном r.

Выразив из второго уравнения $\cos\beta = e^\alpha(n - e^{2\alpha})/2$, подставим это выражение в первое и придем к такому уравнению для $t = e^{2\alpha}$:

$$t^3 - nt^2 + mt - 1 = 0.$$

Нам нужно выяснить, имеет ли при некоторых целых m, n это уравнение вещественное положительное решение t. Найдя с его помощью $\alpha = 1/2\ln(t)$, мы сможем найти β, для чего, в свою очередь, нужно, чтобы выполнялось условие $e^{\alpha}(n - e^{2\alpha})/2 \leq 1$.

Покажем, что такие решения существуют уже при $m = 1$ (а также, несомненно, и при других значениях m, но мы на этом здесь останавливаться не будем) при (почти) всех натуральных n.

Положим $m = 1$. Оказывается, что уравнение для t имеет ровно один вещественный корень, расположенный между $n - \frac{1}{n+1}$ и n (более точно, он имеет асимптотику вида $t_0 = n - \frac{1}{n} + \dots$).

Для многочлена $P(t) = t^3 - nt^2 + t - 1$ имеем $P(n) = n - 1 \geq 0$ (при $n \geq 2$). Далее,

$$P\left(n - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{2n+3}{(n+1)^3} < 0$$

при натуральных n. Отсюда вытекает существование вещественного корня t_0 в интервале $(n - \frac{1}{n+1}, n)$. Тот факт, что остальные два корня (при натуральных n) не вещественны, не понадобится, поэтому доказывать его не будем (это стандартная алгебраическая задача). Так как $t_0 > 0$, можно найти соответствующее значение $\alpha = 1/2\ln(t_0)$. Остается найти вещественное значение для β. Для этого, как отмечено выше, достаточно проверить выполнение следующих условий: $0 \leq e^{\alpha}(n - e^{2\alpha}) \leq 2$.

Из $e^{2\alpha} = t_0$ и неравенств $n - 1/n < t_0 < n$ получаем, что

$$0 < \ e^{\alpha}(n - e^{2\alpha}) = \sqrt{t}_0(n - t_0) < \sqrt{n}\left(n - n + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{\sqrt{n}}{n+1} < 1$$

при всех натуральных n. Тем самым α, β могут быть найдены (причем однозначно) и потому решетка в построенной выше группе Ли R существует. Для того чтобы иметь возможность применить теорему 4, остается только проверить фигурирующее в ней условие. Как отмечено выше, в рассматриваемом случае оно означает, что число β не должно иметь вид $r\pi$ ни при каком ненулевом рациональном $r = p/q$.

Рассмотрим кубическое поле $K = \mathbf{Q}(t_0)$, полученное присоединением к $\mathbf{Q}$ вещественного корня t_0 кубического уравнения $t^3 - nt^2 + t - 1 = 0$. Для $\cos\beta$ имеем выражение

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{t_0}(n - t_0^2)}{2}.$$

Число

$$\cos^2(\beta) = \frac{t_0(n - t_0^2)^2}{4}$$

принадлежит полю K и потому является корнем некоторого (неприводимого) кубического уравнения с целыми коэффициентами, что верно и для числа $\cos 2\beta$. С другой стороны,

$$\cos 2\beta = \frac{e^{2i\beta} + e^{-2i\beta}}{2},$$

и потому $z = e^{2i\beta}$ является корнем некоторого уравнения 6-й степени с целыми коэффициентами. Поэтому z является корнем некоторого неприводимого многочлена с целыми коэффициентами $R(z)$ степени ≤ 6. Но, с другой стороны, если $\beta = \frac{p}{q}\pi$ (где p, q предполагаются взаимно простыми), то z является корнем уравнения $z^q = 1$. Отсюда следует, что z — корень одного из уравнений деления круга — неприводимых делителей многочлена $z^q - 1$ (см., например, [18, гл. 3]). Получаем, что многочлен $R(z)$ — один из многочленов $X_k(z)$ деления круга. Однако существует только конечное число многочленов деления круга степени ≤ 6 (как и любой другой ограниченной степени). Это вытекает из того, что степень такого многочлена, отвечающего первообразному корню m-й степени, равна $\phi(m)$ (числу натуральных чисел, не превышающих m и взаимно простых с m). Можно проверить, что в нашем случае таких многочленов ровно одиннадцать (при k=2,3,4,5,6,7,8,9,10,14,18, см. [18]). Поэтому для бесконечного числа значений целочисленного параметра n уравнение $t^3 - nt^2 + t - 1 = 0$ не может иметь решений, которые порождают значения для β вида $r\pi$, $r \in \mathbf{Q}$. Тем самым для бесконечного числа значений n для построенной нами решетки Γ в группе Ли R выполнены все условия теоремы 4.

Получаем компактное солвмногообразие $M = R/\Gamma$, для когомологий которого имеет место указанный выше изоморфизм.

Отметим, что построенная группа Ли R не является треугольной, т. е. нам удалось расширить область разрешимых групп Ли, для которых имеет место изоморфизм когомологий. На самом деле она типа (E) . Это следует из характеризации групп Ли типа (E) в терминах характеристических корней присоединенного представления (см. выше).

Можно рассматривать и более широкие классы разрешимых групп Ли, для которых удается в достаточно явной форме проверить условие теоремы 2. Например, таков класс почти нильпотентных групп Ли, т. е. имеющих нильпотентный нормальный делитель коразмерности 1 (или, что эквивалентно, которые либо нильпотентны, либо их нильрадикал имеет коразмерность 1). Здесь нужно рассматривать действия $\mathbf{R}$ на абелевых факторах центрального ряда, в которых исходная решетка индуцирует решетки и потому указанные действия должны быть, как и выше, связаны с целочисленными матрицами. Некоторые результаты такого рода автор надеется опубликовать позже.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hucklberry A.* Homogeneous pseudo-Kählerian manifolds // Note Math. 1990. V. 10, N 2. P. 337–342.
2. *Hasegawa K.* Minimal models of nilmanifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 106, N 1. P. 65–71.
3. *Benson C., Gordon C.* Kähler structures on compact solvmanifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 108, N 4. P. 971–979.
4. *Tralle A.* A note on solvable Lie groups without lattices and the Felix-Thomas models of fibrations // arXiv:math.DG/0009105 11 Sep 2000.
5. *Oprea J., Tralle A.* Koszul-Sullivan models and the cohomology of certain solvmanifolds // Ann. Glob. Anal. and Geom. 1997. V. 15. P. 347–360.
6. *Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Строение групп и алгебр Ли // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1990. Т. 41. С. 5–258. (Итоги науки и техники).
7. *Hattori A.* Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1960. V. 8. P. 289–331.
8. *Saito M.* Sur certains groupes de Lie resolubles // Sci. Pap. Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo. 1957. V. 7, N 1. P. 1–11; II — N 2. P. 157–168.
9. *Рагунатан.* Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977.
10. *Горбацевич В. В.* О решетках в группах Ли типов (E) и (R) // Вестн. МГУ. Сер. I. Математики и механика. 1975. № 6. С. 56–63.

11. *Tralle A., Andrzejewski W.* On solvmanifolds and a conjecture of Benson and Gordon from hamiltonian viewpoint // J. Lie Theory. 1998. V. 8. P. 279–292.

12. *Морозов В. В.* Классификация нильпотентных алгебр Ли // Известия вузов. Математика. 1958. № 4. С. 161–171.

13. *Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир, 2000.

14. *Gómez J., Jiménez-Merchán A., Khakimdjanov Y.,* Symplectic structures on the filiform Lie algebras // J. Pure Appl. Algebra. 2001. V. 156, N 1. P. 15–31.

15. *Hasegawa K.* A class of compact kählerian solvmanifolds and a general conjecture // Geom. Dedicata. 1999. V. 78. P. 253–258.

16. *Auslander L.* An exposition of the structure of solvmamifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. V. 79, N 2. P. 227–261.

17. *Nomizu K.* On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups // Ann. Math. 1954. V. 59, N . P. 531–538.

18. *Чеботарев Н. Г.* Основы теории Галуа. М.; Л.: ОНТИ — ГТТИ, 1934.

Статья поступила 1 октября 2002 г.

Горбацевич Владимир Витальевич
Московский государственный технологический университет МАТИ
им. К. Э. Циолковского, кафедра высшей математики,
ул. Оршанская, 3, Москва 121552