Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 512.542

О ГРУППЕ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ ЛОКАЛЬНО СВОБОДНО НА АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ

А. Х. Журтов

Аннотация: Действие группы G на нетривиальной абелевой группе V с аддитивной записью операции называется свободным, если $vg \neq v$ для всех $g \in G, g \neq 1$, и всех $v \in V, v \neq 0$. Доказывается конечность группы, действующей на абелевой группе и порожденной классом сопряженных элементов простого порядка таким, что любые два элемента из этого класса порождают конечную подгруппу, действующую свободно.

Ключевые слова: свободное действие, сопряженные элементы, группа Фробениуса

Введение

Действие группы G на нетривиальной абелевой группе V с аддитивной записью операции называется *свободным*, если $vg \neq v$ для всех $g \in G$, $g \neq 1$, и всех $v \in V$, $v \neq 0$. Целью работы является доказательство следующих результатов.

Теорема. *Пусть x — элемент простого порядка p из группы G, действующей на абелевой группе V. Если для любого $g \in G$ подгруппа $\langle x, x^g \rangle$ является конечной и действует свободно на V, то группа $H = \langle x^G \rangle$ конечна и действует свободно на V.*

Более точно, либо порядок H равен p, либо $p = 5$ и H изоморфна $SL_2(5)$, либо $p = 3$ и H изоморфна одной из групп $SL_2(3), SL_2(5)$.

Следствие 1. *Пусть G — группа, действующая на абелевой группе V, и x — элемент порядка 3 из G. Если для любого $g \in G$ элемент $[x, g]$ имеет конечный порядок и подгруппа $\langle x, x^g \rangle$ действует свободно на V, то группа $\langle x^G \rangle$ конечна и действует свободно на V.*

Следствие 2. *Пусть G — группа, действующая на абелевой группе V. Если для любого элемента $x \in G$ простого порядка и любого $g \in G$ подгруппа $\langle x, x^g \rangle$ является конечной и действует свободно на V, то подгруппа H группы G, порожденная всеми элементами простого порядка, изоморфна $L \times R$, где L либо тривиальна, либо изоморфна $SL_2(3)$, либо изоморфна $SL_2(5)$, а R — прямое произведение групп различных простых порядков. При этом H не содержит нециклических конечных абелевых подгрупп.*

Следствие 1 обобщает теорему 1 из [1], а следствие 2 — теорему 5 из [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00495), гранта Е00–1.0–77 в области фундаментального естествознания Минобразования России и программы «Университеты России» (грант УР.04.01.031).

© **2003 Журтов А. Х.**

Предварительные результаты

Лемма 1. *Пусть H — конечная группа, действующая свободно на абелевой группе. Если $H = \langle x^H \rangle$ для некоторого элемента x простого порядка p, то либо H — циклическая группа, либо $p = 5$ и H изоморфна $SL_2(5)$, либо $p = 3$ и H изоморфна $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$.*

Доказательство следует из классификации Цассенхауза дополнительных множителей конечных фробениусовых групп [3].

Лемма 2. *Если группа x порядка 2 действует свободно на абелевой группе V, то $vx = -v$ для любого $v \in V$.*

Доказательство. Так как $(v + vx)x = v + vx$, то $v + vx = 0$.

Пусть $x \vartriangle y$ означает, что $x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1$, а $x \square y$ означает, что $x^3 = y^3 = (xy)^5 = (x^y x)^2 = 1$. Отметим, что $\langle x, y \mid x \vartriangle y\rangle \simeq A_4$, $\langle x, y \mid x \square y\rangle \simeq A_5$.

Лемма 3. 1. *Если x, y — элементы порядка 3, порождающие A_4, то либо $x \vartriangle y$, либо $x \vartriangle y^{-1}$.*

2. *Если x, y — элементы порядка 3, порождающие A_5, то $x \square y$.*

Доказательство состоит из непосредственных вычислений.

Лемма 4. *Пусть $H = \langle x, y, z \mid R\rangle$, $u = z^y, v = xy^{-1}x^{-1}y$.*

1. *Если $R = \{x \vartriangle y, x \vartriangle z, y \vartriangle z\}$, то $H \simeq A_5$.*

2. *Пусть $R = R(ijk) = \{x \square y, y \vartriangle z, A_i, B_j, C_k\}$, где A_1 означает $x \vartriangle z$, A_2 — $x \vartriangle z^{-1}, A_3$ — $x \square z$, B_i получается из A_i заменой z на u, а C_i получается из A_i заменой x на $v, i = 1, 2, 3$. Тогда при данной тройке $(ijk), i, j, k = 1, 2, 3$, порядок группы H определяется следующим образом:*

(а) *если $(ijk) \in \{(123), (132), (212), (231), (313), (322)\}$, то $|H| = 60$;*

(б) *если $(ijk) = (332)$, то $|H| = 960$;*

(в) *если $(ijk) = (333)$, то $|H| = 360$;*

(г) *в остальных случаях $H = 1$.*

3. *Пусть $R = R(i) = \{x \square y, y \vartriangle z, x \square z, x \square u, v \vartriangle z^{-1}, D_i\}, i = 1, 2, 3$, где $D_1 = u \vartriangle v, D_2 = u \vartriangle v^{-1}, D_3 = u \square v$. Тогда $|H| = 60$ при $i = 2$ и $|H| = 1$ при $i = 1, 3$.*

4. *Пусть $R = R(i) = \{x \square y, y \vartriangle z, x \square z, x \square u, v \square z, E_i\}, i = 1, 2, 3$, где $E_1 = z^v \vartriangle x, D_2 = z^v \vartriangle x, D_3 = z^v \square x$. Тогда $|H| = 1$ для любого $i = 1, 2, 3$.*

Доказательство проводится вычислениями с помощью алгоритма перечисления смежных классов [4].

Лемма 5. *Если a, b — элементы порядка 5 из знакопеременной группы A_5 степени 5, порождающие A_5, то для одной из пар $(i, j) \in I = \{(1, 1), (1, 3), (3, 3), (2, 1)\}$ порядок ab^{-i} равен 3, а порядок $b^i a^j$ равен 2. Обратно, если $(i, j) \in I$, то найдутся такие элементы a, b порядка 5 из A_5, порождающие A_5, что порядок ab^{-i} равен 3, а порядок $b^i a^j$ равен 2.*

Доказательство — непосредственные вычисления в A_5.

Лемма 6. *Пусть F — свободная группа ранга 3 с порождающими x, y, z. Положим*

$$A = \{x^5, y^5, z^5, (xy^{-1})^3, (xy)^2, (xz^{-1})^3, (xz)^2\},$$

$$B_1 = \{(yz^{-1})^3, (yz)^2\}, \quad B_2 = \{(yz^{-3})^3, (y^3z^3)^2\},$$

$$B_3 = \{(yz^{-1})^3, (y^3z)^2\}, \quad B_4 = \{(yz^{-2})^3, (yz^2)^2\}.$$

Пусть C_i получается из B_i заменой y на $u = x^y$, $i = 1, \dots, 4$, и пусть $R_{ij} = A \cup B_i \cup C_j$, $i, j = 1, \dots, 4$. Тогда

$$\left|F/\langle R_{ij}^F\rangle\right| = \begin{cases} 60, & \text{если } (i,j) \in \{(3,1),(3,2),(4,2)\}, \\ 1 & \text{для остальных пар.} \end{cases}$$

Доказательство следует из вычислений с помощью алгоритма перечисления смежных классов.

Лемма 7 [5]. *Пусть x — элемент нечетного простого порядка из собственной подгруппы H группы G. Если для любого $g \in G \setminus H$ подгруппа $\langle x, x^g\rangle$ является конечной группой Фробениуса с дополнением $\langle x\rangle$, то $G = FH$ для некоторой периодической нормальной подгруппы F и $F\langle x\rangle$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle x\rangle$.*

Лемма 8. *Пусть P — подгруппа простого порядка p в группе H. Если для любого $h \in H \setminus N_H(P)$ подгруппа $\langle P, P^h\rangle$ изоморфна A_4 или A_5, то для $Q = \langle P^H\rangle$ справедливо одно из следующих утверждений:*

(а) *$Q = P$;*

(б) *Q — группа Фробениуса, ядро которой является элементарной абелевой 2-группой, а дополнение равно P;*

(в) *$Q \simeq A_5$.*

Доказательство. Можно считать, что $H \neq N_G(H)$. Из условия следует, что $p = 2$ или $p = 3$.

Пусть вначале $p = 3$. В случае, когда для любого $h \in H \setminus N_H(P)$ подгруппа $\langle P, P^h\rangle$ изоморфна A_4, подгруппа Q по лемме 6 является группой Фробениуса. Поскольку ее ядро порождается элементами порядка 2, то оно — элементарная абелева 2-группа. Таким образом, можно считать, что найдется такой элемент $h \in H \setminus N_H(P)$, для которого $U = \langle P, P^h\rangle) \simeq A_5$. Покажем, что в этом случае $U = Q$.

Предположим противное. Пусть z — элемент порядка 3, сопряженный с элементом из P и не лежащий в U. Если $R = \langle y, z\rangle \simeq A_5$, то в R можно найти элемент z_1 порядка 3, сопряженный с x и не лежащий в U, для которого $(yz_1)^2 = 1$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $(yz)^2 = 1$. Теперь по лемме 4 порядок группы $\langle x, y, z\rangle$ не превосходит числа 60; противоречие.

Пусть $p = 5$. По леммам 5 и 6 подгруппа $R = \langle P, P^h\rangle \simeq A_5$ для $h \in H \setminus N_H(P)$ содержит любую подгруппу из H, сопряженную с P, поэтому $Q = R$.

Лемма доказана.

Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы. Предположим, что существует элемент $g \in G$, для которого $R = X^g \neq X$. По лемме 1 R содержит инволюцию t, которая по лемме 2 лежит в центре группы G. Теперь $H = G/\langle t\rangle$ и $P = \langle t\rangle/\langle t\rangle$ удовлетворяют условиям леммы 8. Если $Q = \langle P^H\rangle$ порождается двумя подгруппами, сопряженными с P, то из леммы 1 следует заключение теоремы. Поэтому можно считать, что Q — группа Фробениуса, ядро F которой является элементарной абелевой 2-группой, а дополнение равно P. Пусть K — прообраз F в группе G. Если K не является группой кватернионов порядка 8, то она содержит инволюцию i, отличную от t. Очевидно, $T = \langle i^X, t\rangle$ — элементарная группа порядка 8, и, следовательно, существует инволюция $j \in T$, для которой $\langle X, X^t\rangle \simeq A_4$. Поскольку такая группа не может действовать свободно на абелевой группе, то K

является группой кватернионов порядка 8 и поэтому $\langle X^G \rangle \simeq SL_2(3)$. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Для $g \in G$ положим $y = (x^g)^{-1}$. Тогда группа $\langle x, y \rangle = \langle x, x^g \rangle$ удовлетворяет условиям предложения 2 из [1] и, следовательно, конечна. По теореме выполнено заключение следствия 1.

Доказательство следствия 2. Предположим вначале, что либо в G нет элементов порядка 3, либо любые два элемента порядка 3, сопряженные в G, порождают циклическую подгруппу. Тогда по теореме любая силовская подгруппа из H инвариантна в G и имеет простой порядок. Поэтому $H = R$ — прямое произведение своих силовских подгрупп, каждая из которых имеет простой порядок. Пусть в G существуют два сопряженных элемента x, x^g порядка 3, порождающие нециклическую группу. По теореме $U = \langle x^G \rangle$ изоморфна $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$. В первом случае $H = U \times R$, где R порождена всеми элементами простых порядков, больших трех, и является по теореме прямым произведением своих силовских подгрупп, имеющих простые порядки. Во втором случае U совпадает с нормальным замыканием в G своих элементов порядков 2, 3 и 5 и $H = U \times R$, где R порождена всеми элементами простых порядков, больших пяти, и поэтому в силу теоремы является прямым произведением групп различных простых порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазуров В. Д., Чуркин В. А.* О свободном действии группы на абелевой группе // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 3. С. 600–608.
2. *Созутов А. И.* О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 893–901.
3. *Zassenhaus H.* Kennzeichnung endlicher linearen Gruppen als Permutationsgruppen // Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg. 1936. Bd 11. S. 17–40.
4. *Schönert M. et al.* Groups, Algorithms and Programming. 1997. http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/gap.
5. *Шунков В. П.* Об одном признаке непростоты групп // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 5. С. 491–522.

Статья поступила 30 декабря 2002 г.

Журтов Арчил Хазешович
Кабардино-Балкарский гос. университет, ул. Чернышевского, 127, Нальчик 360006
archil@ns.kbsu.ru